

Multi-variate Stopping Problem with a Monotone Logical Rule

千葉大 教養 安田正実
理 中神潤一
教育 蔵野正美

§ 1. Formulation

確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ 上の分布既知なる p 次元 random vector の process $X_n \equiv \begin{bmatrix} X_n^1 \\ \vdots \\ X_n^p \end{bmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p \quad n=1, 2, \dots$ が与え

られている。 p 人の players からなる system はこの process を次々に観測していく。 各期毎にそれぞれの player は random vector の表われた値によって, stop または continue を宣言する。 各個人の宣言に対して, system 全体の意志をあらかじめ定められた rule にもとづいて決定する。 全体の意志決定が continue であれば, process の観測を続け, もし, n 期において stop ということであれば, player i ($i=1, \dots, p$) は net gain として

$$(1.1) \quad Y_n^i \equiv X_n^i - nc^i$$

を受けとるとする。 ここで c^i は cost を表わす定数。

n 期での player i の宣言が stop ならば $\sigma_n^i = 1$, continue ならば $\sigma_n^i = 0$ と対応させると

$$(1.2) \quad \sigma_n^i = \sigma_n^i(\omega) : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

であって, ここでは

$$(1.3) \quad \sigma_n^i \in \mathcal{B}(X_n)$$

と仮定する。ただし, $\mathcal{B}(X_n)$ は X_n 可測な σ -algebra。

つまり, 各 player の宣言は自分に対応した値 X_n^i だけでなく他人の値までを情報として考慮しながら宣言をしてよい。

定義 1.1. 用語の定義として

$$(1.4) \quad \sigma^i \equiv (\sigma_1^i, \dots, \sigma_n^i, \dots)$$

を player i の individual stopping strategy (i.s.s.), その集まりを S^i で表わす。 p 次元 $\{0, 1\}$ 値 random vector

$$(1.5) \quad \sigma_n \equiv \begin{bmatrix} \sigma_n^1 \\ \vdots \\ \sigma_n^p \end{bmatrix}$$

は n 期での player の strategy を表わしている。この列

$$(1.6) \quad \sigma \equiv (\sigma_1, \dots, \sigma_n, \dots)$$

を stopping strategy (s.s.) とよぶ。この全体を S で表わす。

これらの individual な宣言から system 全体の意志決定として stop か continue かを定める rule として, p 変数の $\{0, 1\}$ 値

logical function :

$$(1.7) \quad f = f(x^1, \dots, x^p) ; \{0, 1\}^p \rightarrow \{0, 1\}$$

を導入する。

$x^i, y^i \in \{0, 1\}$ とする。すべての $i=1, \dots, p$ に対して $x^i \leq y^i$ ならば

$$(1.8) \quad f(x^1, \dots, x^p) \leq f(y^1, \dots, y^p)$$

が成り立つとき, logical function は monotone とよばれている。(cf. Fishburn [2])

定義 1.2 stopping rule は logical function と同一視し, 定数ではなく (i) monotone と (ii) $f(1, 1, \dots, 1) = 1$ なる logical function を monotone logical rule (m.l.r.) とよぶ。

性質 (ii) $f(1, \dots, 1) = 1$ は unanimity (cf. [2]) とよばれ, この dual (cf. [2]) として 当然 $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ も考えられ, 自然な性質であるが, ここでは仮定する必要がない。
 $f(0, 0, \dots, 0) = 1$ ということは, 定数ということと, 問題が trivial になってしまう。

定義 1.3 s.s. $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots) \in S$ に対して, 各 n での $\sigma_n = \begin{bmatrix} \sigma_n^1 \\ \vdots \\ \sigma_n^p \end{bmatrix}$ から $f = f(\sigma_n^1, \dots, \sigma_n^p)$ を考えて

Stopping time (s.t.) $\tau(f, \sigma)$ を

$$(1.9) \quad \tau(f, \sigma) = n \iff \text{first } n \geq 1 \text{ such that } f(\sigma_n^1, \dots, \sigma_n^p) = 1 \\ = \infty \iff \text{if no such } n \text{ exists}$$

で定義する。

いま (1.1) の Y_n^i に対して

$$(1.10) \quad Y_{\tau(f, \sigma)}^i = Y_n \quad \text{on } \{\tau(f, \sigma) = n\} \\ = 0 \quad \text{on } \{\tau(f, \sigma) = \infty\}$$

と定義すると, はじめて system が stop, つまり " $f=1$ " となる time $\tau(f, \sigma)$ で各 player i は $Y_{\tau(f, \sigma)}^i$ を受ける。

例 1.1. m.l.r の例をいくつか考えよう。

(i) Kurano, Yasuda, Nakagami [5] では p 人中 r 人以上 (ただし $p \geq r \geq 1$) が stop と宣言すれば system が stop という rule で議論している。これは平等な majority rule である。

$$(1.11) \quad f(\sigma_n^1, \dots, \sigma_n^p) = 1 \iff \sum_{i=1}^p \sigma_n^i \geq r \\ = 0 \iff < r$$

である。たとえば $p=3, r=2$ ならば + を論理和, を論理積として $f(\sigma_n^1, \sigma_n^2, \sigma_n^3) = \sigma_n^1 \cdot \sigma_n^2 + \sigma_n^2 \cdot \sigma_n^3 + \sigma_n^1 \cdot \sigma_n^3$ である。

(ii) 必ずしも平等とは限らない場合に拡張した

$$(1.12) \quad f(\sigma_m^1, \dots, \sigma_n^p) = 1 \iff \sum w_i \sigma_m^i \geq r$$

$$= 0 \iff \sum w_i \sigma_m^i < r$$

(ただし $w_i \geq 0$ は定数)

なども (1.8) の monotone な性質をもつ。

(iii) monotone な logical function の合成関数は, また monotone であり, これは階層的な意志集約な system (Murakami's representative system, cf. [2]) と考えられ, 我々の対象とする rule の例である。

本論では, f を m.l.r. として定義され, s.t. $t(f, \sigma)$ に対し, vector valued な expected net gain :

$$(1.13) \quad E[Y_{t(f, \sigma)}] \quad (\text{但し } Y_n = \begin{bmatrix} Y_n^1 \\ \vdots \\ Y_n^p \end{bmatrix})$$

を, $S_f \equiv \{\sigma \in S; P(t(f, \sigma) < \infty) = 1\}$ の class で考える。

定義 1.4 f を m.l.r. とし, s.s. $*\sigma = \begin{bmatrix} \sigma^1 \\ \vdots \\ \sigma^p \end{bmatrix}$ が f に関する equilibrium stopping strategy (e.s.s.) であるとは, 各 i について

$$(1.14) \quad E[Y_{\tau(f, *\sigma)}^i] \geq E[Y_{\tau(f, *\sigma(i))}^i]$$

$$*\sigma(i) \equiv \begin{bmatrix} \sigma^1 \\ \vdots \\ \sigma^i \\ \vdots \\ \sigma^p \end{bmatrix}_{i} \quad (\text{任意 } \sigma^i \in S^i)$$

で, $*\sigma \in S_f$ が成り立つとき。

s.e. を $T(\{A^i\}) = T(f, \{A^i\}_{i=1, \dots, p}) = F(A^1, \dots, A^p)$ とする。
 いうまでもなく、各 player の宣言は A^i が起、たかどうかに
 よって決めていて、system の決定は s.e. $T(\{A^i\})$ によって意
 志決定される。いま system が "stop" ならば player i は
 $X^i - c^i$, continue ならば $v^i - c^i$ なる net gain を受け取る
 ものとする。ここで c^i, v^i は定数。このとき、player
 i の expected net gain は

$$(1.21) \quad E[(X^i - c^i) I_{T(\{A^i\})}] + P(\overline{T(\{A^i\})}) (v^i - c^i) \\
 = E[(X^i - v^i) I_{T(\{A^i\})}] + v^i - c^i$$

で与えられる。ただし I は indicator を表わす。一般に

$$f(x^1, \dots, x^p) = x^i \cdot f(x^1, \dots, \overset{i}{1}, \dots, x^p) + x^i \cdot f(x^1, \dots, \overset{i}{0}, \dots, x^p)$$

と書けるから、s.e. の関係式では $T(\{A^i\}) = \{A^i \cap F(A^1, \dots, \overset{i}{\Omega}, \dots, A^p)\} \cup \{\overline{A^i} \cap F(A^1, \dots, \overset{i}{\emptyset}, \dots, A^p)\}$ が成り立つ。これを

(1.21) に代入すれば (1.21) は

$$(1.22) \quad \int_{A^i} (X^i - v^i) \{I_{F(A^1, \dots, \overset{i}{\Omega}, \dots, A^p)} - I_{F(A^1, \dots, \overset{i}{\emptyset}, \dots, A^p)}\} dP \\
 + \int_{F(A^1, \dots, \overset{i}{\emptyset}, \dots, A^p)} (X^i - v^i) dP + v^i - c^i$$

に等しい。stopping rule f は monotone としているから、

$$(1.20) \text{ より } I_{F(A^1, \dots, \overset{i}{\Omega}, \dots, A^p)} - I_{F(A^1, \dots, \overset{i}{\emptyset}, \dots, A^p)} \geq 0 \text{ である。}$$

したがって $A^1, \dots, A^{i-1}, A^{i+1}, \dots, A^p$ を固定して $A^i \in \beta(X)$ を動かしたとき、player i の maximum expected net gain は

$$(1.23) \quad *A^i \equiv \{ X^i \geq v^i \}$$

のときに attain され, その値は

$$(1.24) \quad \int_{\Omega} (X^i - v^i)^+ I_{F(A^1, \dots, \Omega, \dots, A^P)} dP - \int_{\Omega} (X^i - v^i)^- I_{F(A^1, \dots, \emptyset, \dots, A^P)} dP$$

である。ここで $X^+ = \max(X, 0)$, $a^- = \max(-X, 0)$ 。

このことから, 上の形に帰着される問題では, maximum を attain する i.s.e. は (1.23) の形で, random vector X のうち自分の値 X^i だけにしか依存しないこともわかった。これは直感的にもうなづける。要するに非協力であり, 他人の値は自分の利得にならないから, 自分の値だけに注目していればよいということである。また自分の宣言が, どの程度 system にくみいれてくれるかは別にして, 自分の値を大きくしたければ, あるレベルよりも大きな観測が現われたら stop と宣言すべきということも (1.23) は意味している。注意として, monotone でない一般の rule では必ずしもこの形 (1.23) にはならない。

この section の最後に Kadane [4] の winning class との関係を述べる。これは Sakaguchi [6] の conjecture (多人数による秘書採用の問題での Reversibility) で用いられた rule である。

彼は Reversibility の証明が目的であったので, 順序についての

仮定をしているが、ここでは次のように定義する。

定義 1.6 $p > 1$ を players の数。 $\{1, 2, \dots, p\}$ の部分集合の集まり $\mathcal{W}$ が winning class であるとは

$$(i) \quad \{1, 2, \dots, p\} \in \mathcal{W}$$

$$(ii) \quad W \in \mathcal{W} \text{ で } W' \supset W \text{ ならば } W' \in \mathcal{W}$$

いま, l 人の player $i_1, \dots, i_l$ が stop と宣言したとする。
集合 $\{i_1, \dots, i_l\}$ が $\mathcal{W}$ の要素ならば system は stop と決定し,
そうでなければ continue という rule である。

$\{1, 2, \dots, p\}$ の空でない部分集合 W と p 次元立方体の頂点 x とは

$$\mathcal{W} \ni W = \{i_1, \dots, i_l\}$$



$$R^p \ni x = (x^1, \dots, x^{i_1}, \dots, x^{i_l}, \dots, x^p)$$

$$\text{ただし } \begin{pmatrix} x^{i_k} = 1 & k=1, \dots, l, \\ x^j = 0 & j \neq i_1, \dots, i_l \end{pmatrix}$$

で 1 対 1 対応できる。また, 2 つの対応 $W \longleftrightarrow x \in R^p$,
 $W' \longleftrightarrow x' \in R^p$ があるとき, $W \subset W'$ である必要十分条件は, 成分毎に $x \leq x'$ となること。したがって
class $\mathcal{W}$ に対応する頂点の集合を ∇ とおいて, logical
function f を $f(x^1, \dots, x^p) = 1$, $(x^1, \dots, x^p) \in \nabla$,

$f(x^1, \dots, x^p) = 0$ その他, と定義すれば次の定理を得る。

定理 1.1 p 人の winning class W による stopping rule と, p 変数の logical function f が m.l.r. であることは同値。

§ 2. Finite horizon case

観測期間が与えられた $N < \infty$ で制限されている場合をとり扱う。次の仮定をする。

仮定 2.1

- (a) 任意の $\sigma \in S$ に対して $\sigma_N^i = 1 \quad i = 1, \dots, p$ 。
- (b) random vector $X_1, \dots, X_N$ は independent で, 各 n で
 $E|X_n^i| < \infty \quad i = 1, \dots, p$ 。
- (c) rule f は m.l.r.。

我々はまず次の p 次元 vector 列 $\psi_n = \begin{bmatrix} \psi_n^1 \\ \vdots \\ \psi_n^p \end{bmatrix}$ を定義する。

$$(2.1) \quad \psi_{n+1} \equiv \psi_n - C$$

$$+ \begin{bmatrix} E[(X_{N-n}^1 - \psi_n^1)^+ \beta_n^{F(1)}(\psi_n^{1:3} | X_{N-n}^1)] \\ - E[(X_{N-n}^1 - \psi_n^1)^- \alpha_n^{F(1)}(\psi_n^{1:3} | X_{N-n}^1)] \\ \vdots \\ -11- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ E[(X_{N-n}^p - v_n^p)^+ \beta_n^{F(p)}(v_n^{(p)} | X_{N-n}^p)] \\ \dots & \dots \\ -E[(X_{N-n}^p - v_n^p)^- \alpha_n^{F(p)}(v_n^{(p)} | X_{N-n}^p)] \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \quad n \geq 1$$

$$(2.2) \quad v_1 \equiv \begin{bmatrix} E[X_N^1] \\ \dots \\ E[X_N^p] \end{bmatrix} - C$$

ここで

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \beta_n^{F(i)}(v_n^{(i)}) &\equiv P(F(*A_{N-n}^1, \dots, \overset{i}{\Omega}, \dots, *A_{N-n}^p) | X_{N-n}^i) \\ \alpha_n^{F(i)}(v_n^{(i)}) &\equiv P(F(*A_{N-n}^1, \dots, \phi, \dots, *A_{N-n}^p) | X_{N-n}^i) \end{aligned}$$

$v_n^{(i)} \equiv (v_n^1, \dots, v_n^{i-1}, v_n^{i+1}, \dots, v_n^p) \in R^{p-1} \quad i=1, \dots, p$ で, F は m.l.r. f に対応する s.e.f. であり, $*A_{N-n}^i \equiv \{X_{N-n}^i \geq v_n^i\} \in \mathcal{B}(X_{N-n})$ とする。

明らかに, すべての $f, \sigma \in S$ に対して $P(\tau(f, \sigma) \leq N) = 1$ が成り立っている。

定理 2.1 (2.1), (2.2) の vector v_1 $\{v_n\}$ から定まる s.s. $*\sigma$;

$$(2.4) \quad \begin{aligned} *\sigma_n^i(\omega) &= 1 \quad \text{if } \omega \in *A_n^i, \text{ i.e., } X_n^i(\omega) \geq v_{N-n}^i \\ &= 0 \quad \text{if } \omega \notin *A_n^i \\ &\quad (1 \leq n \leq N-1) \\ *\sigma_N^i(\omega) &= 1 \quad (\text{すべての } \omega \in \Omega \text{ に対して}) \end{aligned}$$

は m.l.r. f に関する e.s.s. であり,

$$(2.5) \quad E[Y_{\tau(f, *\sigma)}] = v_N$$

が成り立つ。

とくに X_n で $X_n^1, \dots, X_n^p$ も independent で X_n と同一分布とすれば (2.1) は

$$(2.6) \quad v_{n+1}^i = v_n^i - c^i + \beta_n^{F(i)} E(X_{N-n} - v_n^i)^+ - \alpha_n^{F(i)} E(X_{N-n} - v_n^i)^-$$

ただし $\beta_n^{F(i)} \equiv \beta_n^{F(i)}(v_n^{(i)}) \equiv P(F(*A_{N-n}^1, \dots, \underset{i}{Q}, \dots, *A_{N-n}^p))$, $\alpha_n^{F(i)} \equiv \alpha_n^{F(i)}(v_n^{(i)}) \equiv P(F(*A_{N-n}^1, \dots, \underset{i}{\phi}, \dots, *A_{N-n}^p))$, $i=1, \dots, p$, とする。

さらに cost vector C が $c^i = c^j$ かつ m.l.r. f が i, j について対称;

$$(2.7) \quad f(\dots, \underset{i}{\sigma^i}, \dots, \underset{j}{\sigma^j}, \dots) = f(\dots, \underset{j}{\sigma^j}, \dots, \underset{i}{\sigma^i}, \dots)$$

ならば $v_n^i = v_n^j$ $n=1, \dots, N$ 。さらにまた, ある定数 C があり, $c^i = C$ $i=1, \dots, p$, すべての組に対して f が対称ならばつまり, cost も rule も平等ならば v_n の成分, expected net gain は等しくなる。

例 2.1 $\overbrace{3 \text{ 人の player } 1, 2, 3 \text{ が } 1 \text{ 人の秘書を選ぼうとしている。}}^{N \text{ 人の中から}}$ rule は player 1 が "yes" (stop と宣言) といふか, または player 2 と 3 がともに "yes" と宣言した場合に彼女は accept される。つまり

$$(2.8) \quad f(x^1, x^2, x^3) = x^1 + x^2 \cdot x^3 \quad x^i \in \{0, 1\}$$

a_n^i, y_n^i を n 番目に表わされた秘書に対する player i についての

real rank, relative rank とし, player 1 だけは real rank が独立と仮定する。 $X_n = \begin{bmatrix} X_n^1 \\ X_n^2 \\ X_n^3 \end{bmatrix}$ を $X_n^i \equiv P(a_n^i = 1 | y_n^i)$

と定めると $X_n^i = \begin{cases} n/N & \text{if } y_n^i = 1 \\ 0 & \text{if } y_n^i \neq 1 \end{cases}$ である。任意の

stopping time $\tau = \tau(f, \sigma)$ $\sigma \in S$ に対して

$$(2.9) \quad E X_\tau = \begin{bmatrix} P(a_\tau^1 = 1) \\ P(a_\tau^2 = 1) \\ P(a_\tau^3 = 1) \end{bmatrix}$$

となるから, 我々はこれについて equilibrium strategy と考える。

定理 2.1 より strategy を定める v_n^i $i=1,2,3$ は

$$(2.10) \quad v_{n+1}^i = v_n^i + \beta_n^{i1} E[(X_{N-n}^i - v_n^i)^+] - \alpha_n^{i1} E[(X_{N-n}^i - v_n^i)^-]$$

ただし $\beta_n^{11} \equiv 1$, $\alpha_n^{11} \equiv P(X_{N-n}^2 \geq v_n^2, X_{N-n}^3 \geq v_n^3)$, $\beta_n^{i1} \equiv P(\{X_{N-n}^1 \geq v_n^1\} \cup \{X_{N-n}^{5-i} \geq v_n^{5-i}\})$ $i=2,3$ $\alpha_n^{12} \equiv \alpha_n^{13} \equiv P(X_{N-n}^1 \geq v_n^1)$

$$(2.11) \quad v_1^i = 1/N \quad i=1,2,3$$

明らかに (2.8) の rule は player 2, 3 については対称だから $v_n \equiv v_n^1$, $w_n \equiv v_n^2 = v_n^3$ とおいて $\overset{(2.10)}{\text{計算}}$ すればよい。しかし, ここでは次のような考え方で進む。

いま $v_{N-n} > n/N$ とすると w_{N-n} の値がどうあろうと, $v_{N-n+1} > (n-1)/N$ であり, w についても同様なことが成り立つ。また $v_n \geq w_n$ $n=1, \dots, N$ もわかる。したがって equilibrium strategy は次の形である: player 1 ははじ

めの $m-1$ 人までは観測するだけで, m 人以降でいままてと
比較して best rank な秘書が現われたら "yes" を宣言する。

player 2, 3 なども同様で, $l-1$ 人までは観測するだけで, それ
以降に, それぞれにとって best が現われたら, それぞれが
"yes" を宣言する。ここで $l \leq m$ である。我々はこの

ような (m, l) の形を strategy とした場合の各 player の
expected gain $\varphi^1(m, l)$, $\varphi^2(m, l) = \varphi^3(m, l)$ を計算する。

これを (m, l) について maximize すれば equilibrium と
なる。その前に $N \rightarrow \infty$ としたものを考える。このとき

$m/N \rightarrow a$ なる極限值があると仮定すれば

$$(2.12) \quad \varphi^1(m, l) \rightarrow -a \log a, \quad \varphi^2(m, l) \rightarrow 0$$

を得る。player 1 は $a = e^{-1}$ のとき maximum となる。

これは 1 次元の秘書選択問題 (Gilbert, Mosteller [3]) と

同じ値で, これから次のことが考えられる。この問題では

best 秘書以外, 利得は 0 となるから, (2.8) の rule の場合

player 1 の 1 人問題で player 2, 3 は無視されている。

player 2 と 3 にとっては, 同時にそれぞれの best が現われな
ければ利得が得られず, たぶん, この事象の起る確率が小さ
すぎるのである。

§ 3. Infinite horizon case

期間 $N = \infty$ なる infinite horizon の場合を考える。

仮定 3.1

- (a) random vector の process $X_1, \dots, X_n, \dots$ と X は independent
 i. identically distributed で $E|X^i| < \infty$ 。
 (b) C は positive ($C^i > 0$) な定数 vector。
 (c) f は m.l.f. とし, 対応する s.e.f. を F で表わす。
 (d) vector $v = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^p \end{bmatrix}$ に関する方程式:

$$(3.1) \quad \begin{bmatrix} E[(X^1 - v^1)^+ \beta^{F(1)}(v^{1:1} | X^1)] - E[(X^1 - v^1)^- \alpha^{F(1)}(v^{1:1} | X^1)] \\ \vdots \\ E[(X^p - v^p)^+ \beta^{F(p)}(v^{1:p} | X^p)] - E[(X^p - v^p)^- \alpha^{F(p)}(v^{1:p} | X^p)] \end{bmatrix} = C$$

は解をもつ。 ここで

$$\beta^{F(i)}(v^{1:i} | X^i) \equiv P(F(A^1, \dots, \underset{i}{Q}, \dots, A^p) | X^i)$$

$$\alpha^{F(i)}(v^{1:i} | X^i) \equiv P(F(A^1, \dots, \underset{i}{,}, \dots, A^p) | X^i)$$

で $v^{1:i} \equiv (v^1, \dots, v^{i-1}, v^{i+1}, \dots, v^p)$, $A^i \equiv \{X^i \geq v^i\}$ とする。

もし $p=1$ のとき m.l.r. f は 定義 1.2 より $f(0) = 0$ であるから

(d) の方程式は $E(X - v)^+ = C$ の形でよく知られた 1次元 stopping problem である。(Chow, Robbins [1])

定理 3.1 仮定 3.1 のもとで (3.1) の解 $*v = \begin{bmatrix} *v^1 \\ \vdots \\ *v^p \end{bmatrix}$ から

$$(3.2) \quad \begin{aligned} *o_n^i(\omega) &= 1 && \text{if } X_n^i(\omega) \geq *v^i \\ &= 0 && \text{if } < \end{aligned}$$

で定まる strategy $*\sigma = (*\sigma_1, \dots, *o_m, \dots)$ は m.l.r. f に関する e.s.s. で $*\sigma \in S_f$ かつ

$$(3.3) \quad E[Y_{t(f, *o)}] = *v$$

が成り立つ。

証明は truncation を行ない、^{(b) の仮定より} $Y_n^i \rightarrow -\infty, n \rightarrow \infty$ が本質である。
もし (b) で $C = 0$ のときには $*\sigma \in S_f$ と限らない。
そこで

系 3.2 もし (b) の代わりに

$$(b') \quad C = 0$$

であるときは、さらに仮定をつけ加えて

$$(e) \quad X \text{ は確率 1 で有界}$$

$$(f) \quad (3.2) \text{ の s.s. } *o \text{ が } P(t(f, *o) < \infty) = 1$$

とすれば、定理 3.2 の結果は成り立つ。

さらに簡単のため

$$(a') \quad \text{各 } n \text{ で } X_n^i \ i=1, \dots, p \text{ も independent}$$

とすれば (3.1) の方程式は

$$(3.4) \quad \frac{E(X^i - v^i)^+}{E(X^i - v^i)^-} = \rho_F^{ii}(v^{ii})$$

$$\text{ここで } \rho_F^{ii}(v^{ii}) \equiv \frac{\alpha^{Fii}(v^{ii})}{\beta^{Fii}(v^{ii})} \equiv \frac{P(F(A^1, \dots, \emptyset, \dots, A^p))}{P(F(A^1, \dots, \Omega, \dots, A^p))}$$

で表わされる。

(3.4) の解は $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n^i \equiv v^i$ の存在する場合の net gain の値を求めることができる。よく知られているように (3.4) の左辺は v^i の関数として、連続かつ単調減少。また右辺は f が monotone であるから (1.20) より

$$(3.6) \quad 0 \leq \rho_F^{ii}(v^{ii}) \leq 1$$

したがって

定理 3.3 任意の m.l.f. f に対し (b') のもとで (e), (f) をさらに仮定すれば expected net gain v の値は各 i に對して

$$(3.7) \quad EX^i \leq v^i \leq \sup \{x; P(X^i > x) = 1\} \\ (= X^i \text{ の max. increasing point})$$

(3.7) の右の等号は $\rho_F^{ii}(v^{ii}) = 0$, 左の等号は $\rho_F^{ii}(*v^{ii}) = 1$ のとき。

これらの等号の意味するところを考えてみる。

$$(3.8) \quad \rho_F^{ii}(v^{ii}) = 0 \iff F(A^1, \dots, \emptyset, \dots, A^p) = \emptyset$$

$$\longleftrightarrow f(\sigma^1, \dots, 0, \dots, \sigma^p) = 0$$

すなわち, player i が $\sigma^i = 0$, continue と宣言するときは, 他 player がどう宣言しようとも continue する。(stop と宣言しても stop しない場合もあり得る) これは, stop したくないとき, continue するから, この player i は "veto" の権利をもつと考えられる。つぎに

$$(3.9) \quad p_F^{(i)}(v^{(i)}) = 1 \iff F(A^1, \dots, \phi, \dots, A^p) = F(A^1, \dots, \Omega, \dots, A^p) \\ \iff f(\sigma^1, \dots, 0, \dots, \sigma^p) = f(\sigma^1, \dots, 1, \dots, \sigma^p)$$

すなわち $\sigma^i = 0$ とか 1 とか宣言しても system の決定は変わらない。つまり player i は決定に影響を与えない "outsider" におかれている。(a)-(f), (a') に加えて

$$(a'') \quad \text{各 } n, i \text{ で } X_n^i \text{ は } X \text{ と identically distributed}$$

と仮定すれば 1 つの m.l.r. f に対する player 間の比較として

定理 3.4 (3.4) の解を $v = \begin{bmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^p \end{bmatrix}$ とする。 i, j に対して

$$(3.10) \quad v^i \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} v^j \text{ なる必要十分条件は } p_F^{(i)}(v^{(i)}) \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} p_F^{(j)}(v^{(j)})$$

例 3.1 3 人 player で すべて一様分布 $X \sim U(0, 1)$ と

とする。 m.l.r. f は $f(x^1, x^2, x^3) = x^1 + x^2 \cdot x^3$ を考える。

$v = \begin{bmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ v^{(3)} \end{bmatrix}$ を gain とすると player 2 と 3 は対称だから

$v \equiv v^{(1)}$, $w \equiv v^{(2)} = v^{(3)}$ とおける。簡単な計算で

$$p_F^{\{1\}}(w) = (1-w)^2, \quad p_F^{\{2\}}(v, w) = p_F^{\{3\}}(v, w) = \frac{1-v}{1-vw}$$

を得る。一方 $X \sim U(0, 1)$ であるから, $\frac{E(X-v)^+}{E(X-v)^-} = \frac{(1-v)^2}{v^2}$

(3.4) の関係式から $\frac{(1-v)^2}{v^2} = (1-w)^2$. ゆえに $v = \frac{1}{2-w}$.

これから $p_F^{\{3\}}(\frac{1}{2-w}, w) = \frac{1}{2}$ ($w \neq 1$). w の値は

(3.7) より 等号を除いて $\frac{1}{2} < w < 1$ であるから, 明らかに

$p_F^{\{1\}} < p_F^{\{2\}} = p_F^{\{3\}}$. したがって player 1 のほうが

player 2, 3 より gain は大きくなる。

この定理と同様な特徴づけは, rule の違いによる比較としても求められる。

系 3.5 2つの m.l.r. f, g に対する s.e.f. を F, G とするとき, (3.4) の解を v_F, v_G と表わせば

$$(3.11) \quad v_F \begin{cases} > \\ = \\ < \end{cases} v_G \quad \text{なる必要十分条件は} \quad p_F^{\{1\}}(v_F) \begin{cases} < \\ = \\ > \end{cases} p_G^{\{1\}}(v_G)$$

となるが, あまり有効ではない。各 i についての比較として, 次の十分条件を述べる。

定理 3.6 m.l.r. f, g において 任意の $x^i \in \{0, 1\}, (i \neq j)$

$$(3.12) \quad f(x^1, \dots, \underset{i}{1}, \dots, x^p) \geq g(x^1, \dots, \underset{i}{1}, \dots, x^p)$$

$$f(x^1, \dots, \underset{i}{0}, \dots, x^p) \leq g(x^1, \dots, \underset{i}{0}, \dots, x^p)$$

ならば $v_F^i \geq v_G^i$ である。

仮定をつけ加えて

(c') m.l.r. f はすべての組で対称, すなわち平等な rule とし,

(a'') X は有界区間で, 密度関数をもつ

とすれば (3.4) の方程式は 1 変数に関するもので明らかに解をもつ。そこで $p_F(u) \equiv p_F^{(ii)}(u^{(ii)})$ とおいて この $p_F(u)$ を計算すれば 次の定理を得る。

定理 3.6 p 人の player がいて, r 人以上 stop と宣言したら system は stop するという rule の s.e. f. を $F[r]$ と表わせば (^{平等な} majority rule), それに対応する gain $v_{F[r]}$ は

$$(3.12) \quad v_{F[p]} > v_{F[p-1]} > \dots > v_{F[1]} > EX$$

ただし $F[p]$ の unanimity の場合, stopping time = ∞ で $v_{F[p]} = \sup \{x; P(X > x) = 1\}$ 。

§ 4. Numerical Example

$p=3$ のとき, 考えられる自明でない 8通りの rule に対する数値計算を行なう。ここで 分布は 一様分布 $U(0,1)$ とする。 Table 1, Figure 1, 2, 3 を見よ。

Reference

- [1] Chow, Y. S., Robbins, H. and Siegmund, D. : Great Expectation: The Theory of Optimal Stopping, Houghton Mifflin, Boston, 1971.
- [2] Fishburn, P. C. : The Theory of Representative Majority Decision, Econometrica, 39, (1971), 273 - 284.
- [3] Gilbert, J. and Mosteller, F. : Recognizing the Maximum of Sequence, Amer. Stat. Assoc. 61 (1966), 35-73.
- [4] Kadane, J. B. : Reversibility of a Multilateral Sequential Game : Proof of a Conjecture of Sakaguchi, J. Op. Res. Soc. Japan, 21 (1978), 509-516.
- [5] Kurano, M., Yasuda, M. and Nakagami, J. : Multi-variate Stopping Problem with a Majority Rule, (preprint)
- [6] Sakaguchi, M. : A Bilateral Sequential Games for Sums of Bivariate Random Variables, J. Op. Res. Soc. Japan, 21 (1978), 486-508.

番号	stopping rule $f(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$	comment	$v^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n^1$ (pl.1) v^2 (pl.2) v^3 (pl.3)
①	$\sigma^1 + \sigma^2 + \sigma^3$	$p=3, r=1$ の 平等な majority	0.5437 0.5437 0.5437
②	$\sigma^1 + \sigma^2$	pl.1 と pl.2 は 同じ力でそれぞれ 単独で stop できる pl.3 は outsider	$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180$ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $\frac{1}{2}$
③	$\sigma^1 + \sigma^2 \cdot \sigma^3$	pl.1 が $\gamma > 3$ 強 pl.2 と 3 は 協同 して stop できる	$\sqrt{2}/2 = 0.7071$ $2 - \sqrt{2} = 0.5858$ $2 - \sqrt{2}$
④	$\sigma^1 \cdot \sigma^2 + \sigma^2 \cdot \sigma^3 + \sigma^1 \cdot \sigma^3$	$p=3, r=2$ の 平等な simple majority	$\sqrt{2}/2 = 0.7071$ $\sqrt{2}/2$ $\sqrt{2}/2$
⑤	σ^1	pl.1 が dictator pl.2 と 3 は outsider	1 $1/2$ $1/2$
⑥	$\sigma^1 \cdot \sigma^2 + \sigma^1 \cdot \sigma^3$	pl.1 は pl.2 と 3 の 協力を得て stop できる pl.1 は veto をもつ	1 $(\sqrt{5}-1)/2 = 0.6180$ $(\sqrt{5}-1)/2$
⑦	$\sigma^1 \cdot \sigma^2$	pl.1 は pl.2 の 協力 で stop できる. pl.3 は outsider	1 1 $1/2$
⑧	$\sigma^1 \cdot \sigma^2 \cdot \sigma^3$	unanimity, $p=3, r=3$ の majority	1 1 1

Table 1. $p=3$ の一様分布 $U(0,1)$ のとき, $v^i = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n^i$ の値, つまり (3.4) の解

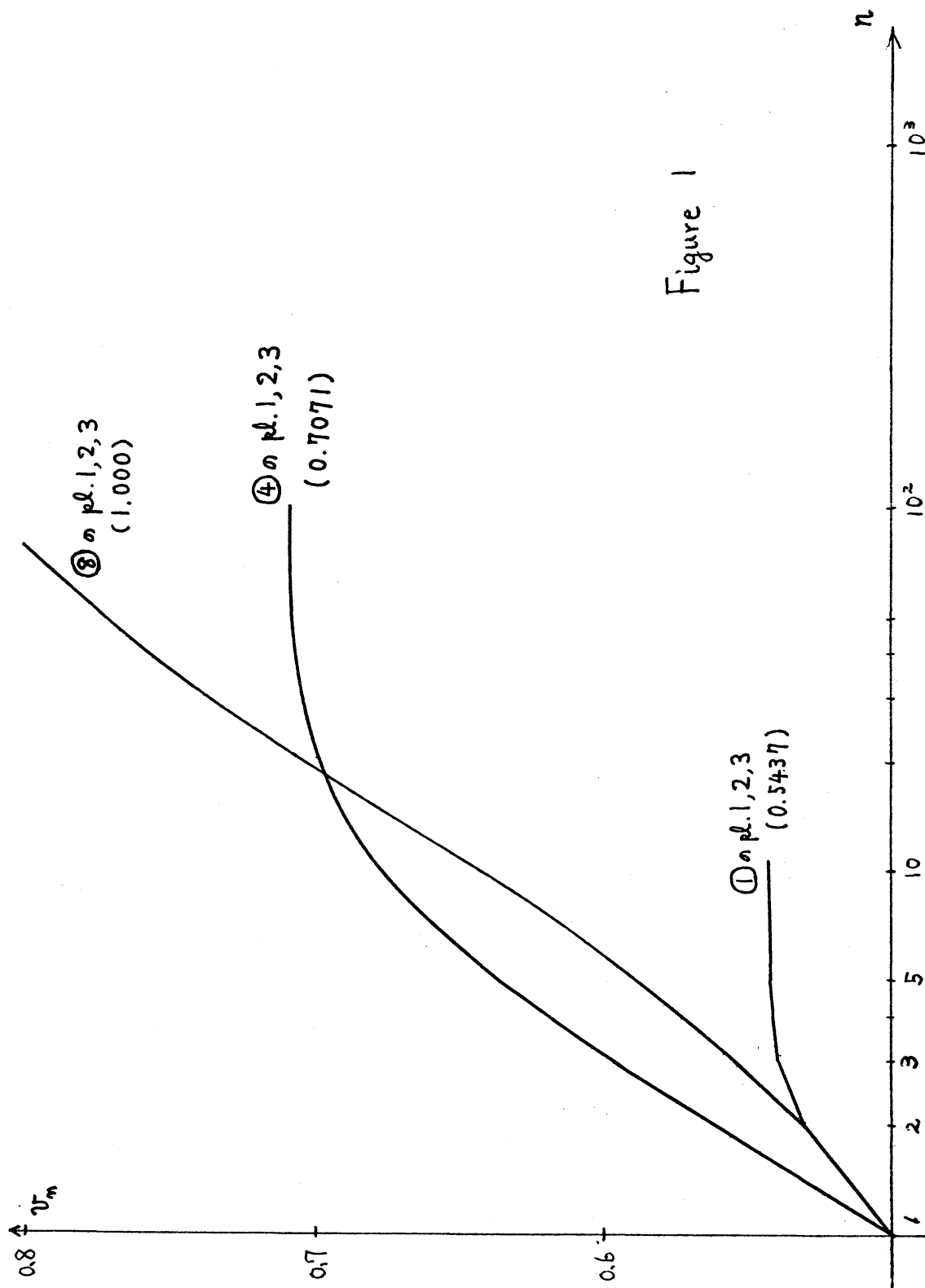


Figure 1

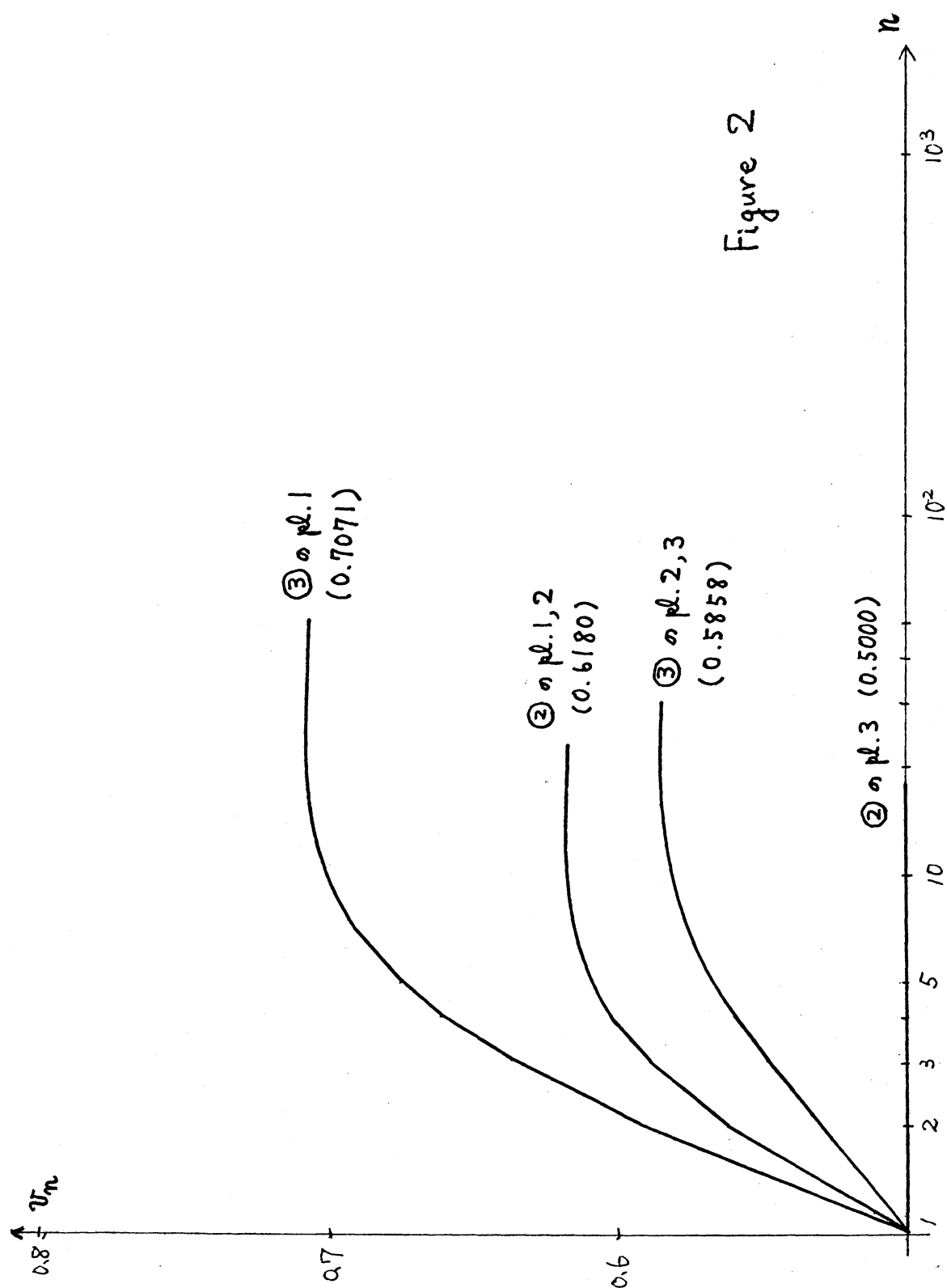


Figure 2

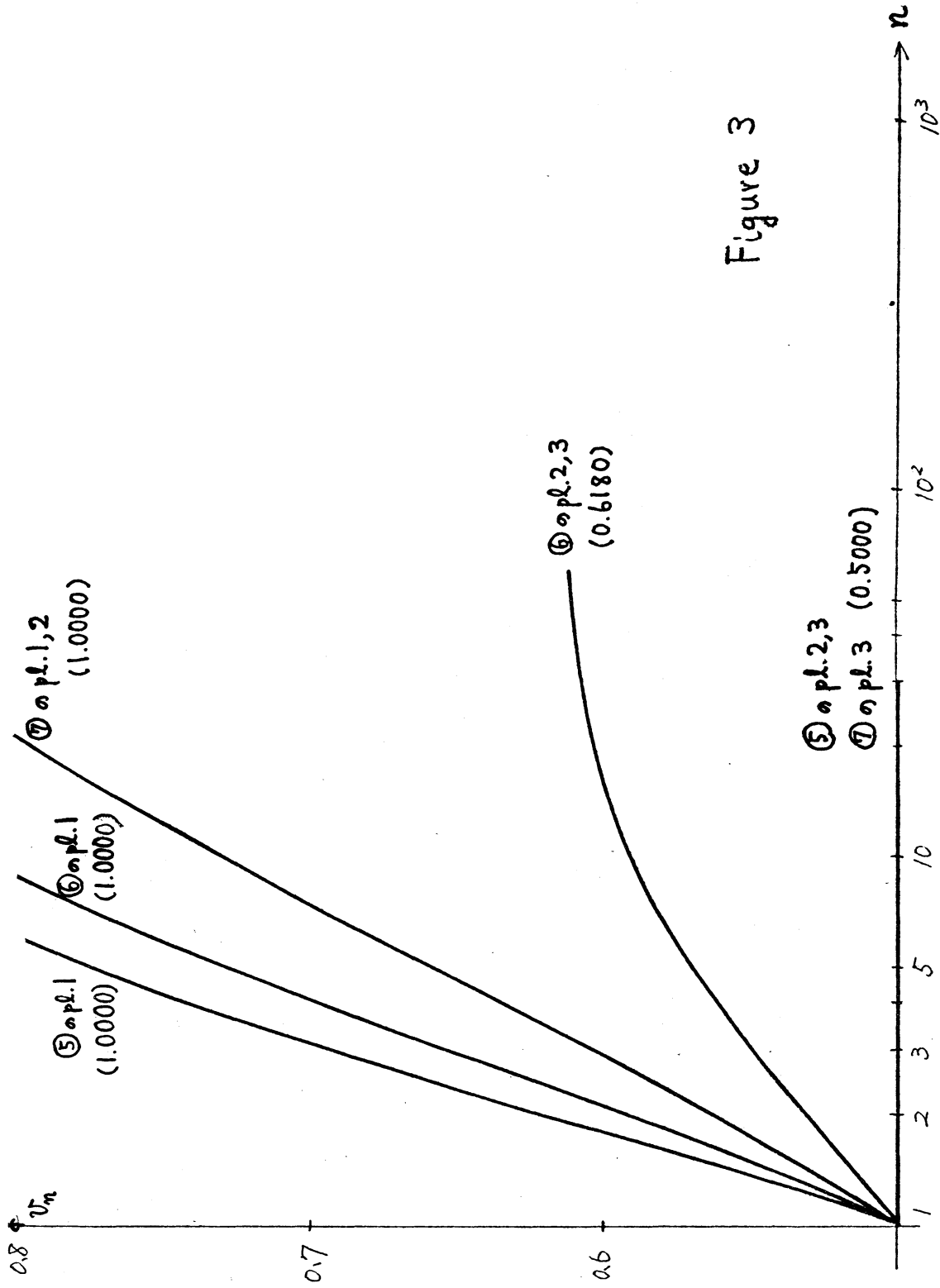


Figure 3