

Voros 係数と位相的漸化式

By

岩木耕平*, 小池達也**, 竹井優美子***

Abstract

本稿は準備中の論文 [IKoT] のアナウンスメントであり, Eynard-Orantin によって導入された位相的漸化式と量子曲線の理論を駆使し, 完全 WKB 解析における Voros 係数を位相的漸化式の自由エネルギーを用いて記述する方法について述べる. また, Voros 係数と位相的漸化式のそれぞれについても簡単に解説する.

§ 1. 序

本稿の目標は, 完全 WKB 解析の形式的側面の研究において, 位相的漸化式と呼ばれる完全 WKB 解析とは全く異なる背景を持つ枠組みがもたらす視点について解説することである. 特に, 準備中の論文 [IKoT] の予告として, WKB 解や Voros 係数の展開係数が位相的漸化式における様々な量を用いて記述できることを紹介する.

まず言葉の説明から始めよう. A. Voros [V] により創始された**完全 WKB 解析** (exact WKB analysis) とは, 小さなパラメータ $\hbar$ (または大きなパラメータ $\eta = \hbar^{-1}$) を含む特異摂動型の微分方程式に対する研究手法であり, $\hbar$ に関する形式級数解として構成される **WKB 解** (の Borel 和として得られる解析的な解) が考察の対象である. Borel 総和法を援用することで指数函数的に小さな項までを含めた漸近解析が可能となり, 結果として WKB 解の接続公式などを exact に書き下すことが出来ることがこの手法の強みである.

WKB 解は, 微分方程式の古典極限として定まる Riemann 面 Σ 上の関数を係数に持つ形式級数である. 表題に掲げた **Voros 係数**は, WKB 解の対数微分として得られる形式級数を Σ 上の様々な路に沿って項別に積分することで定まる形式級数である. [V] においてこのような形式級数が WKB 解の大域挙動を記述する上で重要であることが明らかにされ, [DDP1] によって Voros 係数と名付けられた. 例えば 2 階の Schrödinger-型方程式の固有値問題を論じる際や, モノドロミーの計算の中で Voros 係数は自然に現れる

2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 34M60; Secondary 81T45.

Key Words: 完全 WKB 解析, Voros 係数, 位相的漸化式, 量子曲線, 自由エネルギー

*名古屋大学大学院多元数理科学研究科.

**神戸大学大学院理学研究科数学専攻.

***神戸大学大学院理学研究科数学専攻.

([DDP1, DDP2, SAKT, KT]). また, Borel 変換の動かない特異点やパラメトリック Stokes 現象の解析は Voros 係数の解析に帰着する ([AKT, KoT, AIT] etc.). 完全 WKB 解析とクラスター代数との関係 ([IN]) においても Voros 係数が本質的な役割を果たしており, 完全 WKB 解析を越えて重要な研究対象として認識されつつある.

一方, 表題に掲げたもう 1 つのキーワードである**位相的漸化式 (topological recursion)** は, 行列模型の相関関数が満たす loop 方程式 (Schwinger-Dyson 方程式) を一般化した枠組みであり, B. Eynard と N. Orantin により [EO1] で導入された¹. 数学的には, 位相的漸化式とは「コンパクト Riemann 面 C および 2 つの有理型函数 $x, y: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ の組が与えられたとき, C 上の多重微分形式の族 $\{W_{g,n}(z_1, \dots, z_n)\}_{g \geq 0, n \geq 1}$ と数列 $\{F_g\}_{g \geq 0}$ を帰納的に与える漸化式」である. 行列模型の言葉を流用して, インプットとして与えられるデータ (C, x, y) は**スペクトル曲線**, アウトプットの $W_{g,n}$ は**相関関数**, F_g は**自由エネルギー**とそれぞれ呼ばれる. 漸化式の具体形は 3 節で紹介するが, 一見何が計算されているのか分からない不思議な漸化式である. しかし, 位相的漸化式から計算される $W_{g,n}$ や F_g が様々な幾何学的不変量を用いて表されるような例が数多く存在することから 数学者・物理学者の興味を集めている. 例えば本稿の 3 節でいくつか例を紹介するが, [EO3] は位相的漸化式のレビュー論文であるので, 興味を持たれた方はそちらを参照されたい.

ここ数年で, WKB 解析と位相的漸化式を結びつける**量子曲線 (quantum curve)** の理論が急速に発展した ([GS, DM, BE2]). これは, 「スペクトル曲線がある仮定 (admissibility) を満たせば, 位相的漸化式の相関関数 $W_{g,n}$ (を積分したもの) の母関数がある微分方程式の WKB 解になっている」ことを主張しており, 特にその微分方程式の古典極限として定まる Riemann 面 (のパラメータ表示) がまさにインプットであったスペクトル曲線となっているので上のような呼び名がついた. これは WKB 解の係数が満たす漸化式が位相的漸化式と密接に関わっていることを意味している. 詳しい主張は [BE2] を参照されたい.

ここで, 「位相的漸化式における Voros 係数の対応物は何か?」という疑問が生じる. この間に答えようというのが我々の研究の出発点であった. まず研究の第一歩として, 我々は Gauss の超幾何微分方程式およびその合流として得られる Kummer, Bessel, Weber, Airy という 2 階の微分方程式 (に適切に $\hbar$ を導入したもの) を考察し, 以下の結果を得た:

- (i) 上記の微分方程式たちは量子曲線として実現できる. すなわち, 微分方程式の古典極限として定まる Riemann 面をスペクトル曲線とみなし, 位相的漸化式から得られる相関関数 $W_{g,n}$ から [BE2] と同様の公式で微分方程式の WKB 解が構成できる. 特に, 超幾何微分方程式から生じるスペクトル曲線は admissible でなく, 我々の結果は [BE2] の結果の一部の拡張である.
- (ii) 上記の方程式の Voros 係数は, 対応するスペクトル曲線の自由エネルギーの母関数を, スペクトル曲線が含むパラメータに関する差分として記述できる. その応用として, これらのスペクトル曲線の自由エネルギーの明示公式が得られる.

¹[EO1] の前に行列模型の自由エネルギーの計算手法が [CEO] で与えられた. その計算手法を公理化し, 行列模型から生じるとは限らないスペクトル曲線に対して相関関数や自由エネルギーなる概念を導入したのが [EO1] である. このような背景から Chekhov-Eynard-Orantin の位相的漸化式と呼ばれることもある.

正確な主張と証明は [IKoT] で与えることとし、本稿では [Yu] に基づいて Weber 方程式の場合にこれらの主張を述べる。本稿は結果のアナウンスだけでなく、例を踏まえながら WKB 解, Voros 係数や位相的漸化式についてのごく簡単なレビューも行うことにした。読者の助けになることを期待している。

以下にこの論文の構成を述べる。2 節では WKB 解や Voros 係数に関する結果を幾つか紹介し、3 節では位相的漸化式について解説する。3 節の後半では Airy 方程式を例にとって量子曲線の枠組みについても述べる。4 節では Weber 方程式に対して [IKoT] の結果を定式化する。

謝辞

本研究課題を遂行するにあたり、池田暁志氏、竹井義次氏から非常に有益な助言を頂いた。ここに感謝の意を表したい。また、本研究は JSPS 科研費 16K17613, 16H06337, 16K05177, 17H06127 の助成を受けたものである。

§ 2. 完全 WKB 解析と Voros 係数

本稿では Planck 定数に相当する小さなパラメータ $\hbar$ を含む $\mathbb{P}^1$ 上の 2 階の線型常微分方程式

$$(2.1) \quad \left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - Q(x) \right) \psi(x, \hbar) = 0$$

を考察の対象とする。ここで x は $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ のアファイン座標とし、簡単のため $Q(x)$ は x の多項式とする。この節では、記号の整備も兼ねて、WKB 解および Voros 係数の定義を復習する。完全 WKB 解析の魅力は Borel 総和された WKB 解が満たす接続公式が書き下せるなど、解析的に exact な議論が行えるところにあるが[§]、本稿では WKB 解の形式解としての性質にのみ焦点を当てるので解析的な議論には深く立ち入らないことにする。(解析的側面に関しては [KT] を参照されたい。)

§ 2.1. WKB 解

定義 2.1. ある領域上 $U \subset \mathbb{C}$ 上で正則な関数の列 $\{S_m(x)\}_{m \geq -1}$ を係数とする $\hbar$ の形式級数 $S(x, \hbar) = \sum_{m=-1}^{\infty} \hbar^m S_m(x)$ および基点 $x_0 \in U$ を用いて

$$(2.2) \quad \psi(x, \hbar) = \exp \left(\int_{x_0}^x S(x, \hbar) dx \right)$$

なる形に表される方程式 (2.1) の形式級数解を **WKB 解 (WKB solution)** と呼ぶ。ただし、(2.2) の $S(x, \hbar)$ の積分は項別積分により定める。

代入することにより、(2.2) が (2.1) を満たすことと $S(x, \hbar)$ が Riccati 方程式

$$(2.3) \quad \hbar^2 \left(S^2 + \frac{dS}{dx} \right) = Q(x)$$

を満たすことが同値であることがわかる. これより, $S(x, \hbar)$ の主要項は

$$(2.4) \quad S_{-1}(x) = \sqrt{Q(x)}$$

で与えられること, および高次の係数 $S_m(x)$ は漸化式

$$(2.5) \quad 2S_{-1}S_m + \sum_{\substack{m_1+m_2=m-1 \\ m_1, m_2 \geq 0}} S_{m_1}S_{m_2} + \frac{dS_{m-1}}{dx} = 0 \quad (m \geq 0)$$

を解くことで帰納的に求めることができる. 主要項 (2.4) および漸化式 (2.5) から, 各係数 $S_m(x)$ は代数方程式 $y^2 = Q(x)$ で定義されるコンパクト Riemann 面

$$(2.6) \quad \Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = Q(x)\} \cup P$$

上の有理型函数と考えるのが自然である. ここで P は $x = \infty$ に対応する点の集合であり, $Q(x)$ の多項式としての次数が奇数ならば 1 点, 偶数なら 2 点からなる集合である. 自然な射影により Σ は元々の方程式 (2.1) が定義されていた $\mathbb{P}^1$ の 2 重被覆となり, 2 枚のシートは 2 つの独立な WKB 解を表しているとも考えることもできる. (適当に分枝を決めるためのカット C を入れた上で $S_m(x)$ を $\mathbb{P}^1 \setminus C$ 上の函数とみなすこともある.) また Σ の定義方程式 $y^2 = Q(x)$ は Schrödinger-型方程式 (2.1) の古典極限とも呼ばれる.

また $S_m(x)$ は $Z = \{(a, 0) \in \Sigma \mid Q(a) = 0\}$ 上の点 (すなわち (2.1) の変わり点の集合の, 射影 $\Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$ による引き戻し) において特異性を持っていることも (2.5) から分かるので, (2.2) における積分の路は x -平面の路ではなく $\Sigma' = \Sigma \setminus Z$ 上の路とみなすべきである. 後に説明するように, Σ 上の積分は微分方程式 (2.1) の解の接続公式やモノドロミー群の記述において重要な役割を果たす.

例 2.2 (Weber 方程式). 方程式 (2.1) は, $Q(x)$ が 2 次の多項式の場合, 適当な変数変換で次の **Weber 方程式** に帰着できる:

$$(2.7) \quad \left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{x^2}{4} - E \right) \right) \psi(x, \hbar) = 0.$$

ここで $E \in \mathbb{C}$ は定数である. 漸化式 (2.5) から初めの数項を求めると以下ようになる:

$$\begin{aligned} S_{-1}(x) &= \sqrt{Q(x)} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 4E}, \\ S_0(x) &= -\frac{Q'(x)}{4Q(x)} = -\frac{x}{2(x^2 - 4E)}, \\ S_1(x) &= -\frac{3x^2 - 8E}{4(x^2 - 4E)^{5/2}}, \\ S_2(x) &= -\frac{3x(x^2 + 6E)}{(x^2 - 4E)^4}, \\ S_3(x) &= -\frac{297x^4 + 2928x^2E + 1216E^2}{16(x^2 - 4E)^{11/2}}. \end{aligned}$$

ここまでで見たように, (2.1) の WKB 解の構成の中で自然に代数曲線 Σ が現れ, その上の有理型函数族 $\{S_m(x)\}_{m \geq -1}$ が漸化式 (2.5) により定まった. 量子曲線の理論は, これらが位相的漸化式におけるスペクトル曲線や相関函数と密接に関わっていることを意味している. 量子曲線については §3 で解説することとし, 次節では先に WKB 解析において重要な Voros 係数について解説する.

§ 2.2. Voros 係数

以下 $Q(x)$ は x の多項式と仮定する. この仮定の下, (2.5) を用いた簡単な計算で次が示せる.

補題 2.3. 任意の $m \geq 1$ に対し,

$$S_m(x) = O(x^{-p_m}) \quad (x \rightarrow \infty), \quad p_m = \left(\frac{1}{2} \deg Q(x) + 1\right)m + 1 > 1.$$

従って, WKB 解の高次の項を次のように “無限遠点で正規化” することができる:

$$(2.8) \quad \psi(x, h) = \exp \left(\frac{1}{h} \int_{x_0}^x S_{-1}(x) + \int_{x_0}^x S_0(x) + \sum_{m \geq 1} h^m \int_{\infty}^x S_m(x) dx \right).$$

表題の Voros 係数は, この正規化の取り方の不定性として生じるものである:

定義 2.4. $\infty, \infty' \in P \subset \Sigma$ を端点とする相対ホモロジー類 $\gamma \in H_1(\Sigma', \{\infty, \infty'\}; \mathbb{Z})$ に対して定まる形式級数

$$(2.9) \quad V_{\gamma}(h) := \int_{\gamma} (S(x, h) - h^{-1} S_{-1}(x) - S_0(x)) dx = \sum_{m \geq 1} h^m \int_{\gamma} S_m(x) dx$$

を γ に対する **Voros 係数 (Voros coefficient)** と呼ぶ.

ここでは簡単のため $Q(x)$ が多項式であると仮定したが, 一般に有理函数の場合でも特異点から特異点への (適当に正規化された) 積分として Voros 係数は定義される.

Voros 係数は, 以下の点において完全 WKB 解析の研究において重要な概念である:

- 方程式 (2.1) の解のモノドロミーの計算への応用: 発散級数である WKB 解の Borel 変換の特異性を超局所解析 ([SKK]) を援用して解析することで, Voros のアイデアは佐藤幹夫-青木貴史-河合隆裕-竹井義次による “特異摂動の代数解析” ([SAKT, KT]) の理論² としてさらに発展した. その顕著な応用として, (2.1) の形の 2 階線形微分方程式の (Stokes グラフが非退化という条件下で) 解の接続公式・モノドロミーの計算手法が与えられた. それによると, Σ 上の $S(x, h)$ の周期積分として定まる形式級数 $\oint_{\alpha} S(x, h) dx$ ($\alpha \in H_1(\Sigma'; \mathbb{Z})$) の Borel 和が特性指数だけでは記述できないモノドロ

²完全 WKB 解析の基礎理論の整備および発展に関する業績により, 竹井義次氏が 2017 年の日本数学会で解析学賞を受賞されたことは記憶に新しい.

ミーの非自明な成分を記述する. 周期積分は (積分路を分割することで) いくつかの Voros 係数 (2.9) の和として表すことが可能であり, ゆえに Voros 係数は周期積分よりも基本的な対象であると同時に複素領域上の微分方程式論において極めて重要な研究対象である.

- Borel 変換の動かない特異点, パラメトリック Stokes 現象の解析: Stokes グラフが退化した場合には WKB 解の Borel 変換が持つ “動かない特異点” の影響で WKB 解の Borel 総和可能性は損なわれることがある [V, DDP1]. この動かない特異点が引き起こすある種の Stokes 現象は “パラメトリック Stokes 現象” と呼ばれる. (名前の由来は, この Stokes 現象が例えば例 2.2 が含む E のようなパラメータが変化する際に起こることによる.) 実はこの動かない特異点やパラメトリック Stokes 現象の解析は Voros 係数の Borel 変換が持つ特異点の解析に帰着される. [AKT, T, KoT, KKKoT, AIT] では様々な状況において Voros 係数の解析および WKB 解析の変換論を通じて Borel 変換の動かない特異点における挙動が調べられている. また, パラメトリック Stokes 現象を記述する公式は完全 WKB 解析とクラスター代数との関係 [IN] においても重要であり, 特に Voros 係数 (2.9) の指数 $\exp(V_\gamma)$ として得られる形式級数の Borel 和がクラスター変数 (クラスター代数の生成元) を実現する.

例 2.5 (Weber 方程式の Voros 係数). Gauss の超幾何微分方程式およびその合流で得られる Kummer, Weber, Bessel 方程式の Voros 係数の具体的な表示は比較的最近計算された ([SS, T, KoT, AT, ATT, AIT]). 例えば Weber 方程式 (2.7) は, $E \neq 0$ の場合に次の Voros 係数を持つ:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} V(h) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(S(x, h) - h^{-1} S_{-1}(x) - S_0(x) \right) dx \\ &= \sum_{m \geq 1} \frac{(2^{1-2m} - 1) B_{2m}}{2m(2m-1)} \left(\frac{h}{E} \right)^{2m-1}. \end{aligned}$$

ただし, 積分端点の $\infty, \infty \in P$ は被覆写像 $\Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$ による $x = \infty$ の異なる 2 つの逆像である (図 2.1 参照). また B_{2m} は Bernoulli 数であり,

$$(2.11) \quad \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{m!} t^m$$

により定義される. 上で述べた動かない特異点の解析において, (2.10) のような明示的な表示は非常に強力である. 例えば (2.10) のような具体形を用いると, Borel 変換が持つ特異点の位置やそこでの外来微分 (alien derivative) が計算でき, 結果としてパラメトリック Stokes 現象が解析される. (ちなみに, 最も退化した Airy 方程式は自明な Voros 係数しか持たない.)

Voros 係数の概念は 3 階以上の高階微分方程式や, 非線形である Painlevé 方程式にも導入されており ([IKo], [I]), その一般的な性質の解明は今後の課題である. 我々の目標は,

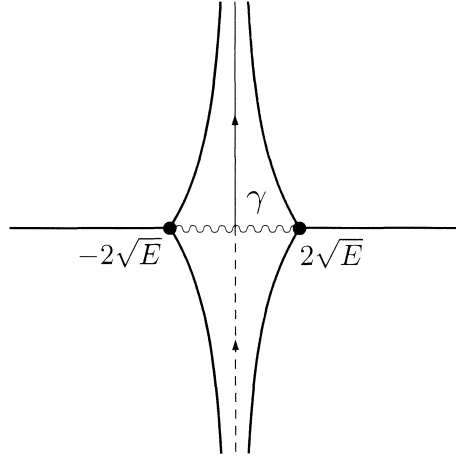


図 2.1. Weber 方程式の Voros 係数 (2.10) を定める積分路 γ . 波線は分枝を決めるためのカットで, γ の点線部分は Σ の別のシート上にある部分を表している. 2つの変わり点 $\pm 2\sqrt{E}$ から 3本ずつ生じている曲線は $E > 0$ の時の Stokes 曲線である ([KT, §2]). Stokes 曲線は WKB 解の Borel 和の性質を規定するものであり, 形式級数に関する議論においては irrelevant であるが, 上の図のように積分路 γ が Stokes 曲線に交わらない (ように連続変形可能である) 場合, Voros 係数は Borel 総和可能であることが知られている.

Painlevé 方程式や高階方程式などへの応用を視野に入れつつ, 完全 WKB 解析とは全く異なる背景を持つ位相的漸化式と呼ばれる枠組みの視点を取り入れて, Voros 係数の研究への新たなアプローチを与えることである. 位相的漸化式については次節で説明し, 我々の結果は §4 で定式化する.

§ 3. Eynard-Orantin の位相的漸化式と量子曲線

この節では, Eynard-Orantin の位相的漸化式を簡単に紹介し, WKB 解析との架け橋となる量子曲線について具体例を元に説明する. 詳しくは [EO1, BE2] および位相的漸化式のレビュー [EO3] を参照されたい.

§ 3.1. 位相的漸化式

位相的漸化式とは, 次のスペクトル曲線を初期データとする漸化式である.

定義 3.1 ([BE2, Definition 2.1]; cf. [EO1, §3]). コンパクト Riemann 面 C , および有理型関数 $x, y : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ であって, dx と dy が共通零点を持たないようなものの組 (C, x, y) を **スペクトル曲線** (spectral curve) と呼ぶ.

正確には, $H_1(C, \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底を固定する必要があるが, 本稿では次のように $C = \mathbb{P}^1$ で x, y が有理函数となる場合のみを考えるので上記の定義を採用した.

本稿では次を満たすスペクトル曲線のみを考える.

仮定 3.2.

- (i) C の種数は 0, すなわち $C = \mathbb{P}^1$.
- (ii) 写像 $x : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ の分岐点 (dx の零点または x の 2 位以上の極) は全て単純である. すなわち, dx の零点は全て 1 位であり, x の極は高々 2 位である.

文献 [EO3] では, (ii) の仮定を満たすものは正規と呼ばれている.

以下では z を $C = \mathbb{P}^1$ の標準的な座標とする. R を写像 $x : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ の分岐点全体のなす集合としたとき, 仮定 3.2 (ii) により, 各 $r \in \mathbb{R}$ の近傍における z の局所共役点 $\bar{z}$ ($x(z) = x(\bar{z})$ かつ $y(z) \neq y(\bar{z})$ を満たす点) が定まる. これらの準備の元, 仮定 3.2 を満たすスペクトル曲線に対する位相的漸化式は次のように定式化される.

定義 3.3 ([EO1, Definition 4.2]). 与えられたスペクトル曲線 (C, x, y) から, 以下の漸化式で定まる C 上の有理型多重微分 $W_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$ ($g \geq 0, n \geq 1$) を, (g, n) -型の**相関函数 (correlation function)** と呼ぶ:

$$(3.1) \quad W_{0,1}(z_1) = y(z_1)dx(z_1),$$

$$(3.2) \quad W_{0,2}(z_1, z_2) = \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2},$$

$$(3.3) \quad W_{g,n+1}(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sum_{r \in R} \operatorname{Res}_{z=r} K_r(z_0, z) \left[W_{g-1,n+1}(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_n) \right. \\ \left. + \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \sqcup J = \{1, \dots, n\}}} W_{g_1,1+|I|}(z, z_I) W_{g_2,1+|J|}(\bar{z}, z_J) \right].$$

ここで,

$$(3.4) \quad K_r(z_0, z) = \frac{1}{2} \frac{\int_{w=\bar{z}}^{w=z} W_{0,2}(w, z_0)}{(y(z) - y(\bar{z}))dx(z)}$$

であり, また (3.3) の最後の和は $\{1, \dots, n\}$ の空集合も許す任意の分割に関する和であり, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \subset \{1, \dots, n\}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_m$) とすると

$$W_{g,m+1}(z, z_I) = W_{g,m+1}(z, z_{i_1}, \dots, z_{i_m})$$

である. また, 同じ和における $'$ は $(g_1, I) = (0, \emptyset)$ および $(g_2, J) = (0, \emptyset)$ なる場合を除外することを意味する.

注意 1. ここでは $C = \mathbb{P}^1$ の場合を扱っているが, 一般に C の種数が高い場合は $W_{0,2}(z_1, z_2)$ を Bergman 核 ([EO1, §3.1.5]) と呼ばれる有理型双微分に選ぶ. ((3.2) は $\mathbb{P}^1$ 上の Bergman

核に他ならない.) さらに, 仮定 3.2(ii) の条件を外して高次の分岐を許したスペクトル曲線に関しては [BHLMR, BE1] により位相的漸化式の一般化が導入されている.

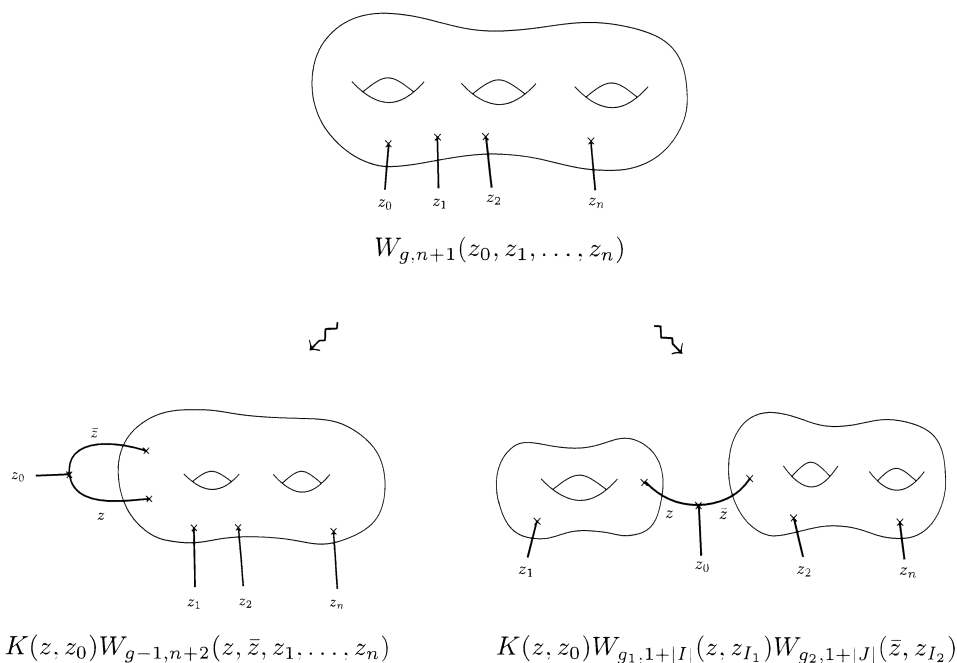


図 3.1. 位相的漸化式と点付き Riemann 面の退化.

位相的漸化式は, 点付き Riemann 面の退化 (図 3.1) を模式的に表していると解釈でき, 特に $2g - 2 + n$ に関する漸化式になっている. 相関関数 $W_{g,n}$ は以下の性質を持つことが知られている ([EO1]):

- $W_{g,n}$ は各変数 z_i について $\mathcal{C}$ 上の有理型微分であり, $2g - 2 + n \geq 1$ ならば $\mathcal{C} \setminus R$ 上で正則. (特に, $x(z)$ の極が分岐点でなければ, そこで $W_{g,n}$ は正則になる.)
- $W_{g,n}$ は変数 $z_1, \dots, z_n$ に関して対称 (変数の任意の置換の下で不変).
- 局所共役変換 $z_i \mapsto \bar{z}_i$ の下で $W_{g,n}$ は反不変:

$$(3.5) \quad W_{g,n}(z_1, \dots, \bar{z}_j, \dots, z_n) = -W_{g,n}(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n) \quad (j = 1, \dots, n).$$

- $x(z)$ および $y(z)$ がある複素パラメータ t に正則に依存している場合, 仮定 3.2 が成り立つような t -平面の領域上で $W_{g,n}$ は t に関しても正則. さらに, そのパラメータ t がある条件を満たせば, $W_{g,n}$ の t に関する微分を記述する公式を書き下すことができる. 詳しくは [EO1, §5] を参照. (後の (3.12) は微分公式の 1 つの例である.)

定義 3.4 (Definition 4.3 of [EO1]). スペクトル曲線 $(\mathcal{C}, x, y)$ に対して, 次で定まる $F_g \in \mathbb{C}$ を (**種数 g の自由エネルギー (free energy)**) と呼ぶ:

$$(3.6) \quad F_g = \frac{1}{2-2g} \sum_{r \in R} \operatorname{Res}_{z=r} \Phi(z) W_{g,1}(z) \quad (g \geq 2).$$

ここで, $z_o \in \mathcal{C} \setminus R$ を任意の一般の点として,

$$(3.7) \quad \Phi(z) = \int_{z_o}^z y(z) dx(z)$$

である. $g = 0, 1$ に対する自由エネルギー F_0, F_1 は, 上とは異なる式で定義される ([EO1] の §4.2.2 および §4.2.3 を参照されたい).

F_g はスペクトル曲線に対するあるクラスのシンプレクティック変換 ($dx \wedge dy$ を保つ変換) の下で不変なので, シンプレクティック不変量とも呼ばれる ([EO1, Section 7]).

位相的漸化式は一見すると不思議な漸化式だが, 様々な例においてアウトプットである $W_{g,n}$ や F_g が幾何学あるいは可積分系の観点から興味深い量となっており, それ故にこの漸化式は研究者の興味を集めている. 以下に 2 つの例を挙げよう:

例 3.5. Airy 曲線

$$(3.8) \quad \begin{cases} x(z) = z^2 \\ y(z) = z \end{cases}$$

($R = \{0, \infty\}$, $\bar{z} = -z$) をスペクトル曲線に選ぶと, $2g - 2 + n \geq 1$ に対して

$$(3.9) \quad W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2^{3g-3+n}} \sum_{\substack{d_1 + \dots + d_n \\ = 3g-3+n}} \langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_{g,n} \prod_{i=1}^n \frac{(2d_i - 1)!!}{z_i^{2d_i+1}} dz_i$$

となる ([E]). ここで, $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_{g,n} \in \mathbb{Q}$ は (1 点 {pt} をターゲットとする) Gromov-Witten 不変量と呼ばれる量で, 種数 g の点付き Riemann 面のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{g,n}$ 上の交叉理論を用いて定義される ([W, Kon]): $\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_{g,n} = \int_{\mathcal{M}_{g,n}} c_1(\mathcal{L}_1)^{d_1} \dots c_1(\mathcal{L}_n)^{d_n}$. Airy 曲線の種数が高い自由エネルギーは自明である: $F_g = 0$ ($g \geq 2$).

例 3.6. Weber 曲線

$$\begin{cases} x(z) = E^{1/2}(z + z^{-1}) \\ y(z) = \frac{E^{1/2}}{2}(z - z^{-1}) \end{cases}$$

($E \in \mathbb{C}^*$ は定数, $R = \{1, -1\}$, $\bar{z} = z^{-1}$) をスペクトル曲線に選ぶと, $g \geq 2$ に対して

$$(3.10) \quad F_g = \chi(\mathcal{M}_g) E^{2-2g}$$

となる ([HZ, P]). ここで,

$$(3.11) \quad \chi(\mathcal{M}_g) = \frac{B_{2g}}{2g(2g-2)}$$

は種数 g の Riemann 面のモジュライ空間の Euler 標数である. ちなみに, B_{2g} は Bernoulli 数 (2.11) である. この例は E をパラメータとして含んでおり, 自由エネルギーは $E \neq 0$ なる領域上で正則で, [EO1, §5] の微分公式は

$$(3.12) \quad \frac{\partial F_g}{\partial E} = \int_0^\infty W_{g,1}(z) \quad (g \geq 1)$$

となる.

この他にも様々な幾何学的不変量 ([EO1, EO2]) や, KdV 方程式や Painlevé 方程式の τ -関数の展開係数 ([Kon, IMS]) が位相的漸化式から計算可能であることが知られている.

§ 3.2. 量子曲線

“位相的漸化式から定まる不変量のある種の母関数がある微分方程式を満たす” ということがしばしば起こる. 例えば, Airy 曲線に関しては次の事実が知られている:

定理 3.7 ([Z]). Airy 曲線 (3.8) から定まる相関関数を $W_{g,n}$ とし,

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \psi(x, \hbar) = \exp & \left[\frac{1}{\hbar} \int^z W_{0,1}(z) + \frac{1}{2} \int^z \int^z \left(W_{0,2}(z_1, z_2) - \frac{dx(z_1)dx(z_2)}{(x(z_1) - x(z_2))^2} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{g \geq 0, n \geq 1 \\ 2g-2+n \geq 1}} \frac{\hbar^{2g-2+n}}{n!} \int_\infty^z \cdots \int_\infty^z W_{g,n}(z_1, \dots, z_n) \right] \Big|_{z=z(x)} \end{aligned}$$

(ただし $z(x) = \sqrt{x}$ は, 分岐点を除いて定まる $x: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ の逆関数であり, 分枝は任意で良い) と置くと, これは Airy 方程式

$$(3.14) \quad \left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - x \right) \psi = 0$$

の WKB 解である.

この事実は, WKB 解の展開係数が満たす漸化式 (2.5) を位相的漸化式 (3.3) と比較することで証明される. Airy 方程式の WKB 解の展開係数は有理数として順に決まっていくものであるが, 上記の結果は ((3.9) に現れているように) その有理数がモジュライ空間上での交叉理論という一見無関係にも見える幾何学的背景を持っていることを示唆しており, 非常に興味深い.

さらに特筆すべきことは、 $\psi(x, \hbar)$ が満たす微分方程式 (3.14) の古典極限として生じる代数曲線 $y^2 - x = 0$ をパラメータ表示したものがまさに Airy 曲線 (3.8) である。このように位相的漸化式は、スペクトル曲線の量子化を与える一つの手法であることが [?] で示され、特に (3.14) のように $W_{g,n}$ の積分の母関数 (3.13) が満たす Schrödinger-型の微分方程式は (スペクトル曲線の量子化ということで) **量子曲線 (quantum curve)** と呼ばれる³。

[BE2, DM] では量子化に関する枠組みがある程度整備されているが、

- 完全 WKB 解析において重要な Voros 係数の、位相的漸化式における対応物は何か (特に、自由エネルギーを用いて記述できるか) ?
- スペクトル曲線が [BE2, Definition 2.7] で課されている “admissibility” という仮定を満たさない場合や、種数が高い場合に量子曲線の理論は拡張されるか ?

などの課題は考察の余地がある。我々の主結果は、超幾何微分方程式とその合流で得られる 2 階の微分方程式に対して、これらの課題に関する解答を与えたことである。次節では Weber 方程式を例にとって我々の結果を解説する。

§ 4. 主結果 (Weber 方程式の場合)

この節では、[IKoT] の主結果を (パラメータの入りが例 2.2 とは若干異なる) Weber 方程式の場合に限定して紹介する。すなわち、 $E \neq 0$, ν を複素パラメータとしたときに、

$$(4.1) \quad \left(\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{x^2}{4} - E - \hbar \left(\nu - \frac{1}{2} \right) \right) \right) \psi = 0$$

の WKB 解や Voros 係数と、Weber 曲線 (例 3.6)

$$(4.2) \quad \begin{cases} x(z) = E^{1/2}(z + z^{-1}) \\ y(z) = \frac{E^{1/2}}{2}(z - z^{-1}) \end{cases}$$

をスペクトル曲線として得られる相関関数や自由エネルギーの間に成り立つ関係式を紹介する。スペクトル曲線 (4.2) は、方程式 (4.1) の古典極限として得られる代数曲線 $y^2 = (x^2/4) - E$ のパラメータ表示に他ならないことに注意されたい。なお、ここで紹介する内容は [Yu] でも論じられている。([IKoT] では超幾何微分方程式とその合流で得られる方程式を扱う。)

まず初めに、量子曲線に関する結果を述べる。 $W_{g,n}$ を Weber 曲線 (4.2) から定まる相関関数とする。論文 [BE2] に倣って、 $\nu \in \mathbb{C}$ を固定し、 $\mathcal{C} \setminus R$ 上の因子 $D(z; \nu)$ を

$$D(z; \nu) = [z] - \nu[0] - (1 - \nu)[\infty] = \nu([z] - [0]) + (1 - \nu)([z] - [\infty])$$

³一般には量子曲線に $\hbar$ -補正が必要である。すなわち、(3.13) の形の母関数が満たす Schrödinger-型の微分方程式のポテンシャルが $Q = Q_0(x) + \hbar Q_1(x) + \hbar^2 Q_2(x) + \dots$ のように $\hbar$ の級数になる [BE2, BCD]。スペクトル曲線が [BE2] の admissibility という仮定を満たせばこの補正項は高々有限個の項からなることが知られている。

とし、さらに

$$(4.3) \quad F_{g,n}(z_1, \dots, z_n; \nu) = \int_{D(z_1; \nu)} \cdots \int_{D(z_n; \nu)} W_{g,n}(z_1, \dots, z_n)$$

と置く。ここで、微分形式 $\omega(z)$ に対して、

$$\int_{D(z; \nu)} \omega(z) = \nu \int_0^z \omega(z) + (1 - \nu) \int_\infty^z \omega(z)$$

と定める。このとき次が成り立つ:

定理 4.1 (cf. [BE2, §5]). 上記の設定の下、

$$(4.4) \quad \psi(x, \hbar) = \exp \left[\frac{1}{\hbar} \int^z W_{0,1}(z) + \frac{1}{2} \int_{D(z; \nu)} \int_{D(z; \nu)} \left(W_{0,2}(z_1, z_2) - \frac{dx(z_1)dx(z_2)}{(x(z_1) - x(z_2))^2} \right) + \sum_{\substack{g \geq 0, n \geq 1 \\ 2g-2+n \geq 1}} \frac{\hbar^{2g-2+n}}{n!} F_{g,n}(z, \dots, z; \nu) \right] \Big|_{z=z(x)}$$

(ただし、 $z(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4E}}{2\sqrt{E}}$ は分岐点を除いて定まる $x: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ の逆関数であり、分枝は任意で良い) は Weber 方程式 (4.1) の WKB 解である。

考察の対象を Weber 曲線に限れば、上記の結果は [BE2] の結果に含まれる (Weber 曲線は [BE2] の admissibility を満たす) が、[IKoT] では必ずしも admissible とは限らない y について 2 次のスペクトル曲線に対して類似の定理を得た。特に、超幾何微分方程式が定めるスペクトル曲線は admissible でないが、我々の定理は適用可能である。スペクトル曲線に対する仮定や定理の主張は [IKoT] を参照されたい。

この定理の応用として、Voros 係数を位相的漸化式の自由エネルギーの母関数を用いて記述する次の公式が導かれる。

定理 4.2. 積分路を例 2.5 の (2.10) と同じ路に取った (4.1) の Voros 係数を

$$(4.5) \quad V(E, \nu, \hbar) = \int_\infty^\infty (S(x, \hbar) - \hbar^{-1} S_{-1}(x) - S_0(x)) dx$$

とする。また、Weber 曲線 (4.2) に対する位相的漸化式により定まる自由エネルギー F_g の母関数を

$$(4.6) \quad F(E, \hbar) = \sum_{g \geq 0} \hbar^{2g-2} F_g$$

とする。この時、 $\hbar$ の形式級数としての以下の関係式が成立する:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} V(E, \nu, \hbar) &= F(E + \nu \hbar, \hbar) - F(E + (\nu - 1)\hbar, \hbar) \\ &\quad - \hbar^{-1} \frac{\partial F_0}{\partial E}(E) - \frac{2\nu - 1}{2} \frac{\partial^2 F_0}{\partial E^2}(E). \end{aligned}$$

Weber 方程式の場合は, Voros 係数および自由エネルギーの具体形が (2.10) および (3.10) のように知られており, 直接両辺の形式級数を比較して (4.7) を確認することもできる. ここで強調すべきは, [IKoT] の方法では両者の具体形を知ることなく, 量子曲線の公式 (4.4) と, 自由エネルギーのパラメータに関する微分公式から (4.7) を導くことができることである. また, Voros 係数の性質および (4.7) を用いて, $F(E, \hbar)$ が満たす次の差分方程式を導く事もできる.

$$(4.8) \quad F(E + \hbar, \hbar) - 2F(E, \hbar) + F(E - \hbar, \hbar) = \log E.$$

我々の結果の応用として, この差分方程式を解く事で既知の公式 (3.10) の別証明を与えることもできる. 超幾何方程式やその合流から得られる方程式に対しても同様に, 古典極限が定めるスペクトル曲線に対する自由エネルギーの, (3.10) と類似の明示的な公式が与えられる. 詳細については [IKoT] を参照されたい.

参考文献

- [AIT] Aoki, T., Iwaki, K. and Takahashi, T., Exact WKB analysis of Schrödinger equations with a Stokes curve of loop type, to appear in Funkcialaj-Ekvacioj.
- [AKT] Aoki, T., Kawai, T. and Takei, Y., The Bender-Wu analysis and the Voros theory, II, *Adv. Stud. Pure Math.* **54** (2009), Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009, pp. 19–94.
- [ATT] Aoki, T., Takahashi, T. and Tanda, M., Exact WKB analysis of confluent hypergeometric differential equations with a large parameter, *RIMS Kokyûroku Bessatsu*, **B52** (2014), 165–174.
- [AT] Aoki, T. and Tanda, M., Parametric Stokes phenomena of the Gauss hypergeometric differential equation with a large parameter, *J. Math. Soc. Japan*, **68** (2016), 1099–1132.
- [BCD] Bouchard, V., Chidambaram, N. and Dauphinee, T., Quantizing Weierstrass, preprint; arXiv:1610.00225.
- [BE1] Bouchard, V. and Eynard, B., Think globally, compute locally, *J. High Energy Phys.*, (2013).
- [BE2] Bouchard, V. and Eynard, B., Reconstructing WKB from topological recursion, *Journal de l'Ecole polytechnique – Mathématiques*, **4** (2017), pp. 845–908.
- [BHLMR] Bouchard, V., Hutchinson, J., Loliencar, P., Meiers, M. and Rupert, M., A generalized topological recursion for arbitrary ramification, *Ann. Henri Poincaré*, **15** (2014), 143–169.
- [CEO] Chekhov, L., Eynard, B. and Orantin, N., Free energy topological expansion for the 2-matrix model, *JHEP12* (2006), 053.
- [DDP1] Delabaere, E., Dillinger, H. and Pham, F., Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques, *Annales de l'Institut Fourier*, **43** (1993), 163–199.
- [DDP2] Delabaere, E., Dillinger, H. and Pham, F., Exact semiclassical expansions for one-dimensional quantum oscillators, *Journal of Mathematical Physics*, **38** (1997), 6126.
- [DM] Dumitrescu, O. and Mulase, M., Lectures on the topological recursion for Higgs bundles and quantum curves, preprint; arXiv:1509.09007.
- [E] Eynard, B., Intersection numbers of spectral curves, preprint; arXiv:1104.0176.
- [EO1] Eynard, B. and Orantin, N., Invariants of algebraic curves and topological expansion,

- Communications in Number Theory and Physics*, **1** (2007), pp. 347–452; arXiv:math-ph/0702045.
- [EO2] Eynard, B. and Orantin, N., Weil-Petersson volume of moduli spaces, Mirzakhani’s recursion and matrix models, preprint; arXiv:0705.3600.
- [EO3] Eynard, B. and Orantin, N., Topological recursion in enumerative geometry and random matrices, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009), 293001 (117pp).
- [GS] Gukov, S. and Sulkowski, P., A-polynomial, B-model, and quantization, *JHEP*, **2012** (2012), 70.
- [HZ] Harer, J. and Zagier, D., The Euler characteristic of the moduli space of curves, *Invent. Math.*, **85** (1986), 457–485.
- [I] Iwaki, K. Parametric Stokes phenomenon for the second Painlevé equation with a large parameter, *Funkcialaj Ekvacioj*, **57** (2014), 173–243.
- [IKo] Iwaki, K. and Koike, T., On the computation of Voros coefficients via middle convolutions, *Kôkyûroku Bessatsu*, **B52** (2014), 55–70.
- [IKoT] Iwaki, K., Koike, T. and Takei, Y., Voros coefficients and Eynard-Orantin’s Topological Recursion, in preparation.
- [IMS] Iwaki, K., Marchal, O. and Saenz, A., Painlevé equations, topological type property and reconstruction by the topological recursion, *Journal of Geometry and Physics*, **124** (2018), 16–54; ArXiv:1601.02517.
- [IN] Iwaki, K. and Nakanishi, T., Exact WKB analysis and cluster algebras, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014), 474009.
- [KKKoT] Kamimoto, S., Kawai, T., Koike, T. and Takei, Y., On a Schrödinger equation with a merging pair of a simple pole and a simple turning point – Alien calculus of WKB solutions through microlocal analysis, in: Costin, O., Fauvet, F., Menous, F. and Sauzin D. (eds), *Asymptotics in Dynamics, Geometry and PDEs; Generalized Borel Summation vol. II*. CRM Series, vol **12.2**. Edizioni della Normale.
- [KT] 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 1998.
(English version: Kawai, T. and Takei, Y., *Algebraic Analysis of Singular Perturbation Theory*, American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs, vol. 227. 2005.)
- [KoT] Koike, T. and Takei, Y., On the Voros coefficient for the Whittaker equation with a large parameter – Some progress around Sato’s conjecture in exact WKB analysis, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **47** (2011), pp. 375–395.
- [Kon] Kontsevich, M., Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function, *Comm. Math. Phys.*, **147** (1992), 1–23.
- [P] Penner, R.C., Perturbative series and the moduli space of Riemann surfaces, *J. Diff. Geom.*, **27** (1988), 35–53.
- [SAKT] 佐藤幹夫, 青木貴史, 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析, 数理研講究録 **750**. 1991, PP. 43–51 (金子晃記).
- [SKK] Sato, M., Kawai, T. and Kashiwara, M., Microfunctions and pseudo-differential equations, *Lect. Notes in Math.*, **287**, Springer, 1973, pp.265–529.
- [SS] Shen, H. and Silverstone, H. J., Observations on the JWKB treatment of the quadratic barrier, in *Algebraic analysis of differential equations from microlocal analysis to exponential asymptotics*, Springer, 2008, pp. 237–250.
- [T] Takei, Y., Sato’s conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, *RIMS Kôkyûrôku Bessatsu*, **B10** (2008), pp. 205–224.

- [V] Voros, A., The return of the quartic oscillator – The complex WKB method, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **39** (1983), pp. 211–338.
- [W] Witten, E., Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space, *Surveys in Diff. Geom.*, **1** (1991), 243–310.
- [Yu] 竹井優美子, 完全 WKB 解析と位相的漸化式について, 修士論文 (神戸大学), 2017.
- [Z] Zhou, J., Intersection numbers on Deligne-Mumford moduli spaces and quantum Airy curve, preprint; arXiv:1206.5896.