数理解析研究所講究録
第1832巻 2013年 114-126

アルゴリズム的ランダムネスへの解析学的アプローチ
Analytical approach to algorithmic randomness

宮部賢志
Kenshi Miyabe
京都大学 数理解析研究所
RIMS, Kyoto University *

要約

ランダムの概念は確率，統計，予測などの概念と深い関係があることは誰しもが認めるところであろう．アルゴリズム的ランダムネスの理論では，2進無限列がランダムであることの数学的定義を与える．前半では，この数学的定式化により，確率，統計，予測などの概念に対して，どのような主張ができるのか，これまで知られている結果を紹介する．後半では，更なる主張のために重要となる解析学的アプローチについて，解説する．

1 確率とは予測である

Probability is one way to express this confidence. (Solomonoff [30])

Solomonoffによれば，確率とは予測に他ならない．すなわち，信念の度合いを表す量である．ただし，アルゴリズム情報理論では計算の概念から導かれる確率の概念を考え，それをアルゴリズム的確率 (algorithmic probability) と呼ぶ．そのため，主観的確率および客観的確率の両面を持っている．列が与えられた時に，その列がランダムとなるような測度を予測しており，ランダムという概念から確率が導かれているとも言える．場合によっては，ある意味で最善の予測が存在し，計算によって見つけられる規則をすべて見つける．一方で，アルゴリズム的確率はKolmogorovの確率の公理は満たさず，また計算も不可能である．

このような見解はどのようにして得られ，正当化されるのか，以下で説明しよう．

*kmiyabe@kurims.kyoto-u.ac.jp

1.1 確率論の目的は何か

1900年にHilbertが国際数学者会議で提唱した問題の中には,「物理学の諸公理の数学的扱い」がある．幾何学が公理から出発するように，確率の公理化を求めたのであった．これに完全な形で答えたのが，Kolmogorov [12] である．これにより非決定的な現象のモデルとして確率が使われるようになった．しかし，確率のこのような見方は1つの見方でしかない．

> Like all the other natural sciences, the theory of probability starts from observations, orders them, classifies them, derives from them certain basic concepts and laws and, finally, by means of the usual and universally applicable logic, draws conclusions which can be tested by comparison with experimental results. In other words, in our view the theory of probability is a normal science, distinguished by a special subject and not by a special method of reasoning. (von Mises [36, Second lecture])

von Misesによれば，確率論はデータから出発し，検定可能な予測を行う方法を提供するものである．このような見方は統計学に似ているが，Fisherによれば統計学の目的は「データの縮約 (the reduction of data)」である．モデルを想定しないことの重要性は [5] などでも主張されている．

von Mises [34, 35] はこのような見方の元,「確率とは頻度である」という立場を数学的に定式化するために，collectiveという概念を導入した.「ランダムな列」を数学的に定義しようとする最初の試みでもある．von Misesの理論は，"First the Collective - then the Probability" [36] と要約されるが，言葉を変えれば，以下のようになるだろう．

> ランダムの概念から確率の概念が導かれる．

後に，この考え方が正当化されることを見る．

1.2 ランダムとは何か

von Misesによるcollectiveの概念は「ランダムな列」の数学的定式化としては不十分なものであった [33]．自然なランダムの概念と認められる最初の概念は，Martin-Löf [17] により提唱された．ランダムな点を典型的な点，統計的検定に合格する点として定義したい．しかし，すべての統計的検定に合格する点は存在しない．そこで，すべてのある意味で「計算可能な」統計的検定に合格する点として，ランダムな点を定義するのである．

これにより，確率の公理による枠組みでうまく説明ができなかったことを解決する．今，0から1までの実数の集合 $[0,1]$ から,「ランダムに」1点 x を取るとする．この時，その点が有理数である確率は0である．では，x が有理数であることは，あり得ないことなのだろうか．Kolmogorovは次のように述べている．

> 原理 B. $P(A)$ が非常に小さい場合には，試行が 1 回だけ実現したときには事象 A は起こらないと事実上確信できる．(Kolmogorov [12, 現実世界との関連づけ])

確かに有理数ではないと事実上確信できる．しかし，任意の点 $\alpha \in [0,1]$ に対して，$x = \alpha$ となる確率は 0 であるが，いずれかの α に対しては，$x = \alpha$ となるのである．すなわち，この事象 A には何らかの制限が加えられなければならない．

Martin-Löf ランダムの点は，(ある意味で) 計算可能に表現できる測度 0 の集合に含まれないという形で定義されている．すなわち，どのような点がランダムな現象によって起こりそうか，ということを数学的に表現しているのである．

さらに，Schnorr [25, 26] や Levin [14] らによって，Martin-Löf ランダムネスは，予測不可能性や圧縮不可能性によっても特徴付けられることが分かった．アルゴリズム的ランダムネスの理論 [6, 21] として，今日も研究が続けられている．

このような考え方からすると，確率論において「大数の法則を証明する」というのは不自然であることが分かる．大数の法則は確率の概念というより，ランダムの概念から導かれるものだからである．ゲーム論的確率論 [27] において，大数の法則が非常に簡単に証明されるのも，ゲームによりランダムの概念を定式化するのを出発点にして，確率の概念を導いているからだと思われる．

1.3 予測とは何か

Martin-Löf ランダムネスが文字列の圧縮可能性によって特徴付けられることが明らかになるよりも少し前に，Solomonoff [31, 32] は文字列の圧縮可能性が予測において重要な役割を果たすことに気がついた．

今，2 進有限列が与えられたときに，次の文字を予測することを考えよう．圧縮できる文字は可能性が高いとし，圧縮できない文字は可能性が低いとした予測 M を考える．すると，ある意味で計算可能な予測の中で最善の予測 (universal semimeasure) となる．

さらに，2^ω 上の計算可能な確率 μ からランダムに抽出された列 X を考え，X の最初の n 文字を見たときの M による次の文字 $a \in \{0,1\}$ の予測と，μ の次の文字 a の確率は，$n \to \infty$ でその差が 0 に収束する．このことは，M が事前に確率 μ を知らなくても，μ を確率 1 で学習できることを意味する．

これが Martin-Löf ランダムな列で収束するかどうかは，素朴に信じられていた，もしくは間違って証明されていたが，Hutter と Muchnik [11] により，成り立たないことが示された．しかし，2 ランダムのように十分なランダム性を仮定すれば収束する [18]．このことは，「確率 μ からランダムに抽出された」ということと，「M による予測が μ に近づく」ということが，(ある意味で) 計算可能な方法では区別できないことを意味する．とすれば，M による予測を持って，「確率」と呼ぶことをどうして否定できるだろう．

μ として計算可能かつ独立同分布に相当するものを考えると，Solomonoff の予測は von Mises の確率の拡張になっている．こうして，「ランダムの概念から確率の概念が導かれる」という主張が正当化されるのである．

1.4 更なる主張のために

Solomonoff によるアルゴリズム的確率の理論は，確率や予測についてこれまでとは全く違った見方ができることを示唆してはいるものの，様々な問題を抱えている．最も大きな問題と見なされているのは，予測 M の計算不可能性である．計算により近似はできるが，厳密な値は計算ができない．測度 μ の計算可能なものへ制限が，強すぎると感じる人もいるだろう．

これらの問題を克服するためには，計算可能解析学のアプローチが有効であることが最近になって分かってきた．また今後，確率，統計，情報理論などの結果をランダムネスの言葉で表現するためには，ランダムネスの解析的な特徴付けが有用になってくることも予想される．最近では，様々な理由によりランダムネスと解析の関係に興味が集まっており，研究が進められている．しかし，まだ研究は始まったばかりであり，今後の発展が待たれる所である．

2 ランダムネスの解析的アプローチ

後半では，ランダムネスの解析学的なアプローチについて，数学的な解説を行う．

2.1 計算可能解析学

ランダムの概念は，文字列から文字列への計算可能の概念を利用することで，数学的に厳密に定義できるようになった．一般の位相空間上での計算可能の概念を利用できるようになると，更に応用範囲が広がる．

自然数から自然数への計算可能性や，文字列から文字列への計算可能性は，以下既知とする．計算可能性理論の教科書としては，[28, 4, 29] などが挙げられる．以下では実数から実数への関数の計算可能性などについて解説する．この問題は主に計算可能解析学と呼ばれる分野で研究されてきた．詳細は [37, 38] などを参照せよ．

以下では，$[0,1]$, $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ などの空間を考える．$^+$ はその空間の非負の部分への制限を意味する．例えば，$\mathbb{R}^+ = \{x \geq 0 \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ である．これらの空間の自然な可算開基を固定して考える．$\mathbb{R}$ であれば $\{(p,q) \ : \ p,q \in \mathbb{Q}\}$ であり，$\overline{\mathbb{R}}^+$ であればこれに $\{(p,\infty] \ : \ p \in \mathbb{Q}\}$ を加えたものになる．更に自然数からそれらへの自然な全射 ν を考える．すなわち，$\{\nu(u) \ : \ u \in \omega\}$ が可算開基である．

準備として，集合，実数，関数などの計算可能性を定義しよう．

定義 1 (c.e. 開集合)
空間 X 上の開集合 U が c.e. であるとは，

$$U = \bigcup_{u \in S} \nu(u)$$

となるような c.e. 集合 S が存在することを言う．

c.e. (computably enumerable) とは，計算可能に数え上げられるという意味だから，U がc.e. であるとは，直感的には U の内側からの近似が計算可能にできることを意味する．また，c.e. 開集合の補集合は co-c.e. 閉集合と呼ばれる．

定義 2 (実数の計算可能性)
実数 x が 下側半計算可能*(lower semicomputable)* であるとは，

$$\{y \in \mathbb{R} \ : \ y < x\}$$

が c.e. 開集合であることを言う．実数 x が 計算可能*(computable)* であるとは，x と $-x$ が共に下側半計算可能であることを言う．

実数 x が下側半計算可能であるとは，下側から有理数により近似できることを意味する．下側半計算可能実数は left-c.e. もしくは c.e. とも呼ばれる．c.e. 開集合 U に対して，$\mu(U)$ は下側半計算可能である．ここで μ は Lebesgue 測度である．
実数が計算可能であるとは，上からも下からも近似可能であることを意味しており，実数 x が計算可能であることと，ある計算可能な有理数列 $\{q_n\}$ が存在して，$|x - q_n| \leq 2^{-n}$ となることは同値である．例えば，有理数，$\sqrt{2}$ などの代数的数，π, e などは計算可能な実数である．実数が計算可能であれば，下側半計算可能であるが，逆は成り立たない．

定義 3 (関数の計算可能性)
関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が，下側半計算可能 であるとは，

$$\{\langle x, p\rangle \ : \ x \in [0,1],\ p \in \mathbb{Q}^+,\ f(x) > p\}$$

が c.e. 開集合であることを言う．関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が，計算可能 であるとは，f と $-f$ が共に下側半計算可能であることを言う．

f が下側半計算可能であれば，任意の有理数 x に対して，$f(x)$ は下側半計算可能である．また，$|x - q_n| \leq 2^{-n}$ を満たす有理数列 $\{q_n\}$ が与えられたら，$f(x)$ はその列を使って下側から近似できる．f が計算可能であれば連続であるが，下側半計算可能であっても連続とは限らない．

2.2 ランダムネスの特徴付け

アルゴリズム的ランダムネスの理論では様々なランダムの概念を考察する．ここでは元々の定義ではなく，ランダムの概念の解析的な特徴付けを紹介する．以下ではこれを定義と思って話を進める．μ を Lebesgue 測度とする．

定義 4 (Martin-Löf ランダムネス [17, 15, 10])
下側半計算可能関数 $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}^+$ が積分可能，すなわち $\int f d\mu < \infty$ であるとき，f は積分テスト*(integral test)* であると言う．実数 $x \in [0,1]$ が *Martin-Löf ランダム* であるとは，すべての積分テスト f に対し，$f(x) < \infty$ であることを言う．

定義 5 (Schnorr ランダムネス [25, 20])
実数 $x \in [0,1]$ が *Schnorr ランダム* であるとは，積分値が計算可能であるようなすべての積分テスト f に対し，$f(x) < \infty$ であることを言う．

定義 6 (Kurtz ランダムネス [13, 19])
実数 $x \in [0,1]$ が *Kurtz ランダム* であるとは，積分値が計算可能であるようなすべての計算可能関数 $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}^+$ に対し，$f(x) < \infty$ であることを言う．

定義からすぐ分かるように以下の含意が成り立ち，それぞれ逆は成り立たない．

Martin-Löf ランダム $\Rightarrow$ Schnorr ランダム $\Rightarrow$ Kurtz ランダム

以上の議論は任意の計算可能距離空間 (computable metric space) とその上の計算可能な測度に拡張できる．

2.3 計算可能測度論

次にランダムネスの言葉を使って，測度論の実効化を見ていく．Littlewood の三原則 [16] が良い道標になる．

(a) すべての可測集合はほとんど区間の有限和である．

(b) すべての関数はほとんど連続である．

(c) すべての収束する関数列はほとんど一様収束する．

2.3.1 計算可能可測集合

最初に計算可能可測集合を定義しよう．(a) を「可測集合とは区間の有限和で近似できる集合」と読み替える．この方針は [24, 7, 9] などにも見られる．
$\mathcal{B}$ を $[0,1]$ の Borel 集合族とし，関数 $d : \mathcal{B}^2 \to [0,1]$ を

$$d(A,B) = \mu(A \Delta B)$$

で定義する．d は擬距離となる．また $\mathcal{U}$ を有理数を端点に持つ開区間の有限和の集合とする．集合 A に対して，$\mathcal{U}$ の計算可能な集合列 $\{B_n\}$ があって，すべての n で $d(A,B_n) \leq 2^{-n}$ であれば，A は区間の有限和で近似できていると言って良いだろう．

注意 1
関係 $A \sim B$ を $d(A,B) = 0$ で定義し，$[\mathcal{B}]$ を $\mathcal{B}$ の $\sim$ による商とする．この時，$([\mathcal{B}], d, \mathcal{U})$ は計算可能距離空間 *(computable metric space)* となり，その計算可能な点が，区間の有限和で近似できる集合である．

「ほとんど至る所」成り立つ性質は，多くの場合「十分にランダムな点で」成り立つ．では，上記の場合，$\{B_n\}$ はどんなランダムの点では A に収束するだろうか．以下のような観察が得られる．

命題 7
$x \in [0,1]$ に関して，以下は同値．

(i) x は *Schnorr* ランダム．

(ii) $\mathcal{U}$ の計算可能な集合列 $\{B_n\}$ で，すべての n で $d(B_{n+1}, B_n) \leq 2^{-n}$ を満たすならば，$\lim_n B_n(x)$ は存在する．

そこで，以下の定義が自然に考えられる．

定義 8
集合 A が 計算可能可測集合*(computably measurable set)* であるとは，$\mathcal{U}$ の計算可能な集合列 $\{B_n\}$ があって，すべての n で

$$\mu(B_{n+1} \Delta B_n) \leq 2^{-n}$$

であり，すべての *Schnorr* ランダムの点 x で

$$A(x) = \lim_n B_n(x)$$

を満たすものを言う．

名前の通り，以下が成り立つ．

命題 9
計算可能可測集合は計算可能な測度を持つ．

更に，次のような一致性も見られる．

命題 10
A_1, A_2 を計算可能可測集合で，$d(A_1, A_2) = 0$ であるとする．この時，A_1 と A_2 は *Schnorr* ランダムの点で一致している．

(a) の 1 つの定式化として，可測集合は内測度と外測度が一致するという事実がある．そこで，正規空間であることを使って，内側と外側から近似する方法も考えられる．この方針は [7, 9] などでも取られている．

天下り的だが，$\{U_n\}$ と $\{V_n\}$ を，一様 c.e. 開集合の減少列で，

$$[0,1] \subseteq U_n \cup V_n$$

かつ，すべての n で $\mu(U_n \cap V_n) \leq 2^{-n}$，$\mu(U_n \cap V_n)$ が一様に計算可能なものとする．この時，$[0,1]$ は次の互いに素な 3 つの集合 X_1, X_2, X_3 に分けられる．

(i) $X_1 = \bigcap_n (U_n \cap V_n)$,

(ii) $X_2 = \bigcup_n ([0,1] \backslash U_n)$,

(iii) $X_3 = \bigcap_n U_n \cap \bigcup_n ([0,1] \backslash V_n)$.

ここで，すべての n で

$$[0,1] \backslash V_n \subseteq X_3 \subseteq U_n$$

となっていることに注意しよう．すなわち，X_3 は $\{U_n\}$ と $\{V_n\}$ で外側と内側から近似されている．

命題 11
上記で定義された X_3 は計算可能可測集合である．逆にすべての計算可能可測集合に対して，上記のように定義された X_3 が存在して，*Schnorr* ランダムの点で一致する．

すなわち，Schnorr ランダムの点に限ることで，近似の方法と同じ概念が導かれていることが分かる．

2.3.2 計算可能可測関数

次に，計算可能可測関数を定義しよう．まずは，測度論と同様に逆像を使って定義しよう．

定義 12
関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が 計算可能可測関数*(computably measurable function)* であるとは，$f^{-1}((p,q))$ が一様に計算可能可測集合であることを言う．

もう 1 つは (b) の一表現とも言われる Lusin の定理の実効化として表現される．

定理 13 (Lusin の定理; [3, Theorem 2.2.10])
関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が可測であることの必要十分条件は，すべての $\epsilon > 0$ に対して，ある連続関数 f_ϵ とコンパクト集合 K_ϵ が存在して，$\mu([0,1] \backslash K_\epsilon) < \epsilon$ かつ K_ϵ で $f = f_\epsilon$.

定義 14 (宮部 [20]; Hoyrup-Rojas [9] 参照)
関数 $f :\subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$ が *Schnorr* 各層計算可能*(Schnorr layerwise computable)* であるとは，一様に計算可能な関数列 $\{f_n\}$ と一様に補 *c.e.* 閉集合 *(co-c.e. closed set)* の列 $\{K_n\}$ が存在して，$\mu([0,1] \backslash K_n) \leq 2^{-n}$，$\mu(K_n)$ は一様に計算可能，かつ，K_n で $f = f_n$.

命題 15
任意の計算可能可測関数は *Schnorr* 各層計算可能であり，任意の *Schnorr* 各層計算可能関数はある計算可能可測関数に *Schnorr* ランダムの点で一致する．

すなわちこの 2 つの概念は実質的に同じである．

2.3.3 計算可能な積分

最後に計算可能な積分について見ておこう.

定義 16 (有理階段関数)
関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ が，有限個の開基 $B_1,\cdots,B_n$ と有理数 $q_1,\cdots,q_n$ があって，

$$f=\sum_{k=1}^{n}q_k\mathbf{1}_{B_k}$$

と書けるとき，f は有理階段関数*(rational step function)*であると言う.

定義 17 (L^1 計算可能性; [23, 22, 20])
関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ が実効的 L^1 計算可能*(effectively L^1-computable)*であるとは，計算可能な有理階段関数の列 $\{s_n\}$ が存在して，

$$||s_{n+1}-s_n||_1\leq 2^{-n}\text{ かつ }f(x)=\lim_n s_n(x)$$

と書けることを言う.

命題 18 (宮部 [20] 参照)
実効的 L^1 計算可能関数は，計算可能可測関数と *Schnorr* ランダムの点で一致する．計算可能な積分値を持つ計算可能可測関数は，実効的 L^1 計算可能関数に *Schnorr* ランダムの点で一致する.

すなわち，計算可能可測関数で計算可能な積分値を持つことと，実効的 L^1 計算可能であることは，実質的に同じことである．更に次の観察も重要であろう.

命題 19
f,g を計算可能可測関数で，$||f-g||_1=0$ であるとする．この時，f,g は *Schnorr* ランダムの点で一致する.

すなわち，計算可能可測関数に限れば，ほとんど至る所一致するとは，Schnorr ランダムの点で一致することである.

このように測度論で「ほとんど至る所一致する」という概念は，適当な計算可能性の条件を入れることで「Schnorr ランダムの点で一致する」ことと見なすことが出来る．この文脈では Schnorr ランダムネスが最も自然に現れるが，他のランダムネスでも同様のことができるのかは今後の研究課題である．また，(c) に相当する「ほとんど至る所収束」の概念の実効化についても現在研究中である.

2.4 ランダムとなる測度を計算する

アルゴリズム的確率では，列 X の最初の n 桁を見たときに，次の桁，すなわち $n+1$ 桁目を予測する．その予測の収束先を μ とすると，X は μ から見てランダムになっている

のであった．この意味で，予測するとは，列が与えられたときに，その列がランダムとなる測度μを求めることに他ならない．桁数を気にすることなく，この問題を考えた場合には，次のような結果が知られている．

> ランダムな列の集合が互いに素となる測度の族と，そのうちの1つの測度μに対してランダムな列Xが与えられたとしよう．もし，Xがどれくらいランダムでないかが予め分かっていれば，Xからμが計算できる．

数学的に表現しよう．考える空間は2^ωで，使うランダムの概念はMartin-Löfランダムである．ただし，一般の測度μに対するMartin-Löfを考える．一様積分テスト$u : 2^\omega \times \mathcal{M}(2^\omega) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ [8] に対し，$u(x,\mu)$は"randomness deficiency"と呼ばれ，xがμに対しどれくらいランダムでないかを表す量である．xがμに対しMartin-Löfランダムでないことと，$u(x,\mu) = \infty$となることは同値である．この"randomness deficiency"をアドバイスとして計算する関数を考えよう．

定義 20 (Hoyrup and Rojas [10])
関数$f :\subseteq 2^\omega \to Y$が各層計算可能*(layerwise computable)*であるとは，関数$F :\subseteq 2^\omega \times \omega \to Y$があって，すべての$x \in 2^\omega$と$c \in \omega$に対し，$u(x,\mu) < c$ならば$F(x,c) = f(x)$となることを言う．

Schnorr各層計算可能性はこの各層計算可能性のSchnorrランダムネス版である．

定義 21 (Bienvenu and Monin [2])
測度の族$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}(2^\omega)$が学習可能*(learnable)*であるとは，ある計算可能関数$F : 2^\omega \times \omega \to \mathcal{M}(2^\omega)$が存在して，

$$\forall \mu \in \mathcal{C}\ \forall x \in 2^\omega\ \forall c \in \omega\ u(x,\mu) \leq c \Rightarrow F(x,c) = \mu.$$

定理の主張のために技術的な定義を2つ行う．

定義 22 (Bienvenu et al. [1])
コンパクト集合$K \subseteq \mathcal{M}(2^\omega)$が実効的コンパクト*(effectively compact)*であるとは，

$$K \subseteq B$$

となる開基の有限和Bが計算可能に数え上げられることを言う．

定義 23 (Bienvenu et al. [1])
測度Pに対し，$\mathrm{MLR}(P)$でPに対しMartin-Löfランダムな列の集合を表す．測度の族$\mathcal{C}$が実効的に直行するとは，すべての異なる測度$P, Q \in \mathcal{C}$に対し，$\mathrm{MLR}(P) \cap \mathrm{MLR}(Q) = \emptyset$となることを言う．

定理 24 (Bienvenu and Monin [2])
$\mathcal{C}$を実効的に直交する測度の実効的コンパクトな族とする．この時，$\mathcal{C}$は学習可能である．

2.5 まとめ

ランダムの概念を定義するには，計算の概念が必要であった．そのため，考える空間は，多くの場合，Cantor空間に限定されていた．これまで，ランダムネスの理論と，確率論，統計学，機械学習の理論，情報理論などとの関わりが，深く研究されてこなかった一因がここにあると思われる．しかし，計算可能解析学の発展によってこの状況は変わりつつある．今後の更なる発展に期待したい．

参 考 文 献

[1] L. Bienvenu, P. Gács, M. Hoyrup, C. Rojas, and A. Shen. Algorithmic tests and randomness with respect to a class of measures. In *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, volume 274, pages 34–89. Springer, 2011.

[2] L. Bienvenu and B. Monin. Von Neumann's Biased Coin Revisited. In *LICS*, pages 145–154, 2012.

[3] V. Bogachev. *Measure theory.* Springer, 2007.

[4] S. B. Cooper. *Computability theory.* CRC Press, 2004.

[5] A. P. Dawid and V. Vovk. Prequential probability: principles and properties. *Bernoulli*, 5:125–162, 1999.

[6] R. Downey and D. R. Hirschfeldt. *Algorithmic Randomness and Complexity.* Springer, Berlin, 2010.

[7] A. Edalat. A computable approach to measure and integration theory. *Information and Computation*, 207(5):642–659, 2009.

[8] P. Gács. Uniform test of algorithmic randomness over a general space. *Theoretical Computer Science*, 341:91–137, 2005.

[9] M. Hoyrup and C. Rojas. An Application of Martin-Löf Randomness to Effective Probability Theory. In *CiE*, pages 260–269, 2009.

[10] M. Hoyrup and C. Rojas. Computability of probability measures and Martin-Löf randomness over metric spaces. *Information and Computation*, 207(7):830–847, 2009.

[11] M. Hutter and A. Muchnik. On semimeasures predicting Martin-Löf random sequences. *Theoretical Computer Science*, 382:247–261, 2007.

[12] A. Kolmogorov. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Springer, 1933.

[13] S. A. Kurtz. *Randomness and Genericity in the Degrees of Unsolvability.* PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1981.

[14] L. A. Levin. On the notion of a random sequence. *Soviet Mathematics Doklady*, 14:1413–1416, 1973.

[15] M. Li and P. Vitányi. *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications.* Graduate Texts in Computer Science. Springer-Verlag, New York, third edition edition, 2009.

[16] J. E. Littlewood. *Lectures on the Theory of Functions.* Oxford University Press, 1944.

[17] P. Martin-Löf. The Definition of Random Sequences. *Information and Control*, 9(6):602–619, 1966.

[18] K. Miyabe. An optimal superfarthingale and its convergence over a computable topological space. To appear in Lecture Notes in Artificial Intelligence.

[19] K. Miyabe. Characterization of Kurtz randomness by a differentiation theorem. To appear in Theory of Computing Systems.

[20] K. Miyabe. L^1-computability, layerwise computability and Solovay reducibility. Submitted.

[21] A. Nies. *Computability and Randomness.* Oxford University Press, USA, 2009.

[22] N. Pathak, C. Rojas, and S. G. Simpson. Schnorr randomness and the Lebesgue Differentiation Theorem. To appear in Proceedings of the American Mathematical Society.

[23] M. B. Pour-El and J. I. Richards. *Computability in analysis and physics.* Springer, 1989.

[24] N. Sanin. *Constructive Real Numbers and Constructive Function Spaces*, volume 21 of *Translations of Mathematical Monographs.* Ametican Mathematical Society, Providence, 1968.

[25] C. Schnorr. A unified approach to the definition of a random sequence. *Mathematical Systems Theory*, 5:246–258, 1971.

[26] C. P. Schnorr. *Zufälligkeit und Wahrscheinlichkeit*, volume 218 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[27] G. Shafer and V. Vovk. *Probability and Finance: It's Only a Game!* Wiley, 2001.

[28] M. Sipser. *Introduction to the Theory of Computation.* Course Technology Ptr, second edition edition, 2012.

[29] R. I. Soare. *Recursively enumerable sets and degrees.* Perspectives in Mathematical Logic. Springer, Berlin, 1987.

[30] R. Solomonoff. Algorithmic probability: Theory and applications. *Information Theory and Statistical Learning*, pages 1–23, 2009.

[31] R. J. Solomonoff. A formal theory of inductive inference I, II. *Information and Control*, 7:1–22,224–254, 1964.

[32] R. J. Solomonoff. Complexity-based induction systems: Comparisons and convergence theorems. *IEEE Transaction on Information Theory*, IT-24:422–432, 1978.

[33] J. Ville. Étude critique de la notion de collectif. *Gauthier-Villars*, 1939.

[34] R. von Mises. Grundlagen der Wahrscheinlichkeistrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, 5:52–99, 1919.

[35] R. von Mises. *Mathematical theory of probability and statistics.* Academic Press Inc, 1964.

[36] R. von Mises. *Probability, statistics, and truth.* Dover Pubns, 1981.

[37] K. Weihrauch. *Computable Analysis: an introduction.* Springer, Berlin, 2000.

[38] K. Weihrauch and T. Grubba. Elementary Computable Topology. *Journal of Universal Computer Science*, 15(6):1381–1422, 2009.