

He II に於けるロトン粘性係数と ロトン-ロトン相互作用

東大教養・基礎科 波田野 彰
物 理 永 井 克 彦
" 野 島 行一郎

(2月20日受理)

要 旨

ロトン-ロトン相互作用として, Landau-Khalatnikova 用いた

$$V_0 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

を用い, 散乱問題を正確に扱った結果, V_0 をパラメータとして動かしてみても, ロトン粘性係数の実験値を再現出来ないことが, 明らかになった。これはロトンの群速度が小さい為で, 散乱をボルン近似で取り扱った, Landau-Khalatnikov の結果は正しくない。改良の方法としては, 相互作用に角度依存性を考えることが重要であると思われる。

§ 1 序 論

超流動ヘリウム (通常 He II と呼ぶ) の粘性係数は, 回転円板の方法, capillary の方法等によって測定されているが, これらの実験結果は, 二流体モデルの立場に立てば, 熱力学的には, 全く矛盾なく説明することが出来る。⁽¹⁾

この際, He II の粘性は, 専ら所謂「常流体」が担うものとされ, 事実, He II の粘性係数は通常 Normal Viscosity と呼ばれている。

通常の気体の粘性係数 η は, 最も簡単な輸送理論から

$$\eta = n \ell \langle m v \rangle$$

と書かれる (n は密度, ℓ は平均自由行程, $\langle m v \rangle$ は運動量の平均値) が, n と ℓ とは反比例するのが常識であるから, η は n によらず, その為, 温度変化は, それほど大きくないと考えられる。ところが He II の粘性係数は, 第 1

図に見られる様

(1) 特異な温度
依存性を示す。

粘性係数の温度
依存性を見る為

には、微視的な
取り扱いを要す
るが、それは、

最初 Landau-
Khalatnikov (2)

(以下 L-K と
略す) によって

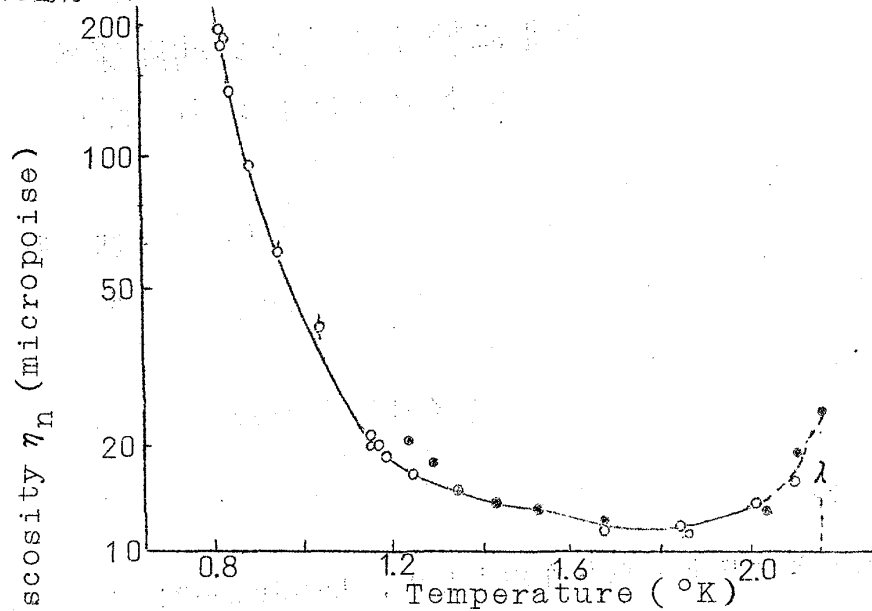
行なわれた。L

-K は、「常流

体」を素励起 (所謂フォノンとロトン) のガスで構成されるものと考え、粘性
係数もフォノンや、ロトンの寿命で決まるものと考えた。Lifetime を計算す
る為には、相互作用を知る必要があり、フォノンに関しては、Landau の量子
流体力学的取り扱いから一応、出所はわかっているけれども、ロトンに関して
は何等情報がない。L-K は、むしろこれを逆に実験の方から決めようとし、
接触型相互作用

$$V_0 \delta^3 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (1.1)$$

を仮定して、ロトン-ロトン散乱をボルン近似で取り扱った。それらの結果は、
第2図に見られる様に、ロトン部分の粘性への寄与は温度によらず一定であり、
フォノン部分の寄与は低温側で主であるが、 1.6°K 以上になると無視しうると
いうことになった。(実際には、L-K は先づフォノンの寄与を計算し、それ
を実験データから差し引いた部分が温度によらず一定であることを見届けた上
で、それがロトン部分による寄与であるとし、それに合う様に V_0 を定めた。) 勿
論、 λ 点直下の粘性係数の変動はこれでは説明出来ないが (第1図と第2図
を比較)、この温度領域ではロトン数が急激に増大する為に、最早ガス近似が



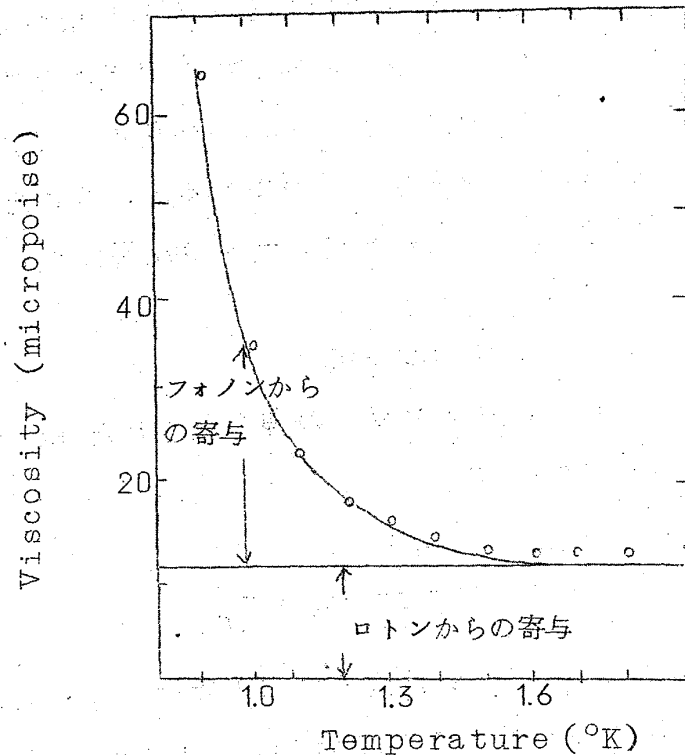
The viscosity (η_n) of helium II as
measured in a rotation viscometer

第 1 図

成立しない為であるとされた。

最近、いろんな方面で L-K 理論の再検討が要請されているが、ロトン-ロトン散乱をボルン近似で扱っても成功しなかった典型的な例として、ラマン散乱の実験が挙げられる。これは、レーザ光を用いて、大きさが等しく方向が正反対の運動量をもった素励起の対を励起するラマン効果の実験であるが、昨年来 Greytak 等⁽³⁾ によって行なわれてきた。理論的な解析は、岩本⁽⁴⁾, Ruvalds-Zawadowski⁽⁵⁾, 岩本-永井-野島⁽⁶⁾ によって

行なわれたが、それらの結論は以下の様にまとめられる。即ち、ロトンの様に群速度の小さい素励起の散乱問題は、ボルン近似で取り扱うことが出来ず、高次の散乱過程を考慮しなければならない。その結果、散乱光のスペクトルは、必ずしも 2-ロトン励起の状態密度そのものと比例するものではなく、また相互作用が引力の場合は、ロトン-ロトン束縛状態（正確に言えばフォノン分枝への decay が可能であるから共鳴状態）が存在しうることがわかった。この結論は、Greytak らの実験結果を定性的に完全に説明するもので、また、ラマン散乱光の偏りから、ロトン-ロトン束縛状態も D-state でなければならない事^{*)}が明らかになった。



第 2 図

*) Ruvalds - Zawadowski は相互作用として、L-K と同様に接触型を用いた為、束縛状態として得た状態は S 状態になっており、実験と対応しない。このことに関しては § 3 で詳述する。

そこで、粘性係数へのロトン部分の寄与を求める際にも、当然上述の事情を考慮する必要があるであろう。即ち、ロトン-ロトン散乱をボルン近似で取り扱った L-K 理論を再検討してみる意味があるだろうと考えられる。結論から先に云えば、L-K の仮定した接触型相互作用 (1.1) を考える限り、 V_0 に如何なる値を与えてみても、粘性係数の実験事実よりは数倍大きな値しか得られず、何らかの改良が必要であるということになった。従って、ボルン近似の結果を実験値に合わせた L-K の結果は正しくない。

§ 2 L-K 理論の枠組

L-K は、ロトンガスの線型化された Boltzmann 方程式を用いて粘性係数の表式を求めた⁽²⁾

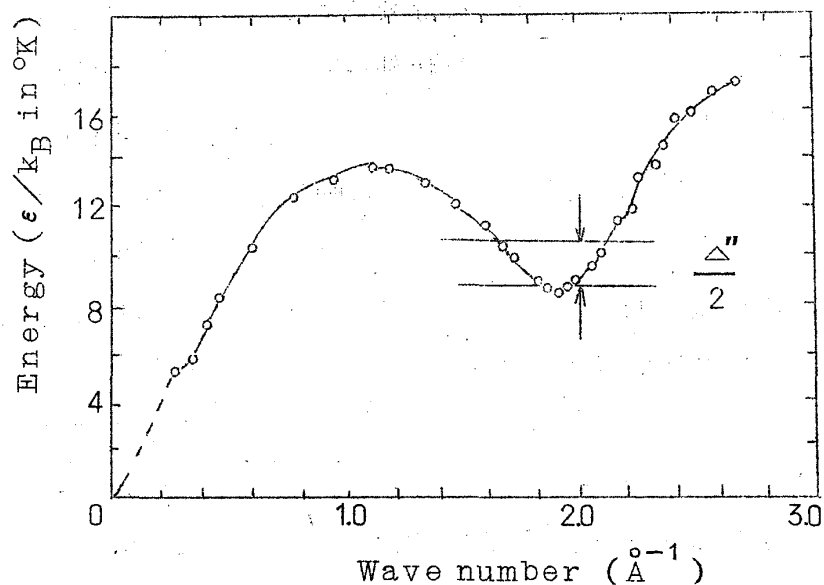
$$\eta_r = \frac{P_0^2}{15\mu} N_r \cdot \tau_r \quad (2.1)$$

ここで、 P_0 , μ は図 3 に示す様にロトンの運動量、及び有効質量であり、 τ_r は求めるべき lifetime, N_r はロトンの数密度で

$$N_r = \frac{2 P_0^2 \sqrt{\mu kT} e^{-\Delta/kT}}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3} \quad (2.2)$$

と与えられる。⁽⁷⁾

我々は、中性子散乱の実験で観測される励起状態を素励起であると考え、そこから出発することにしてしよう。所謂ロトンの分散関係はよく知られた公式



第 3 図

$$\epsilon(p) = \Delta + \frac{(P-P_0)^2}{2\mu} \quad (2.3)$$

で与えられるが, Cowley-Woods の最新のデータ⁽⁸⁾によれば

$$\Delta = 8.67 \pm 0.04 \text{ } ^\circ\text{K}$$

$$P_0 = 1.936 \pm 0.005 \text{ } \text{\AA}^{-1}$$

$$\mu = 0.15 M \text{ (Mは } H_e^4 \text{ の質量)}$$

となっている。我々は、ロトン部分としては、素励起の分散曲線が(2.3)式で十分よく近似される領域を考えることにして、その領域内での散乱問題を考えることにする。第3図から、ロトン部分の上限のエネルギー $\Delta + \Delta''/2$ を調べると、 Δ'' としては凡そ 5°K 程度ととれることがわかる。

この領域内(ロトン部分)でのロトン-ロトン相互作用としては、L-Kと同様に(1.1)式をとることにしよう。その時、運動量 $\vec{Q}/2 \pm \vec{p}$ のロトン対と、 $\vec{Q}'/2 \pm \vec{p}'$ のロトン対の間の相互作用の行列要素は

$$\langle \frac{\vec{Q}}{2} \pm \vec{p} | V | \frac{\vec{Q}'}{2} \pm \vec{p}' \rangle = \Omega \delta_{\vec{Q}, \vec{Q}'} 2 V_0 \quad (2.4)$$

と書ける。 Ω は全系の体積であり $\delta_{\vec{Q}, \vec{Q}'}$ はKroneckerのデルタである。序論で述べた様に、ロトン-ロトン相互作用としては、運動量依存性、特に角度依存性が重要であり、例えば

$$\begin{aligned} & \langle \frac{\vec{Q}}{2} \pm \vec{p} | V | \frac{\vec{Q}'}{2} \pm \vec{p}' \rangle \\ &= \Omega \delta_{\vec{Q}, \vec{Q}'} [g_1(Q) + g_2(Q) P_2(\hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{p}'})] \end{aligned} \quad (2.5)$$

の様なものを考える必要がある。しかし、ロトン-ロトン散乱の場合、重心運動と相対運動の分離が出来ず、(2.5)の相互作用ではT-行列の積分方程式を正確に解くことが出来ない。従って、我々は、ロトンの群速度が小さいといふことの効果をみる為に、相互作用としては、(2.4)式をとり、正確なT行列の表式を用いて、以下の計算を進め、L-K理論を検証してみることとする。

参照の為、ボルン近似で求めた $L-K$ の粘性係数の表式を以下に挙げておく、

$$\frac{1}{\tau_r} = \frac{4 P_0 \mu |V_0|^2}{\hbar^4} N_r \quad (2.6)$$

$$\eta_r = \frac{\hbar^4 P_0}{60 \mu^2 |V_0|^2} \quad (2.7)$$

Khalatnikov は、実験からえられた η_r は 1.2×10^{-5} poise であるとし、 V_0 を評価して

$$|V_0| = 1.6 \times 10^{-38} \text{ erg} \cdot \text{cm}$$

を得ている。

§ 3 T 行列と 2-ロトン励起の状態密度及びロトン-ロトン束縛状態

相互作用として (2.4) 式を仮定した時、 $\vec{Q}/2 \pm \vec{p}$ のロトン対が $\vec{Q}'/2 \pm \vec{p}'$ のロトン対に散乱される T 行列の行列要素を

$$T(\vec{Q}/2 \pm \vec{p} ; \vec{Q}'/2 \pm \vec{p}')$$

とおくと、

$$T(\frac{\vec{Q}}{2} \pm \vec{p} ; \frac{\vec{Q}'}{2} \pm \vec{p}') = \delta(\vec{Q} - \vec{Q}') T(E, Q) \quad (3.1)$$

$$T(E, Q)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{g} - \frac{\Omega^2}{2(2\pi\hbar)^6} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \frac{\delta(\vec{Q} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2)}{E - \epsilon(p_1) - \epsilon(p_2) + i\eta}} \quad (3.2)$$

と書ける。ここで $E = \epsilon(|\frac{\vec{Q}}{2} + \vec{p}|) + \epsilon(|\frac{\vec{Q}}{2} - \vec{p}|)$ であり、

$g = (2\pi\hbar)^3 \cdot 2 V_0 / \Omega^2$ である。また、 η は正の無限小量である。

$$\rho(E, Q) = \frac{\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \delta(\vec{Q} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta(E - \epsilon(p_1) - \epsilon(p_2)) \quad (3.3)$$

で2粒子励起の状態密度を定義すると, (3.2) 式は

$$T(E, Q) = \frac{1}{\frac{1}{g} - R(E, Q) + iI(E, Q)} \quad (3.4)$$

と書け

$$I(E, Q) = \frac{\pi}{2} \rho(E, Q) \quad (3.5)$$

$$R(E, Q) = \frac{1}{2} \text{p.v.} \int \frac{\rho(E', Q)}{E - E'} dE' \quad (3.6)$$

と書かれる。従ってT行列を知るには, $\rho(E, Q)$ を調べればよいことになる。

$\rho(E, Q)$ を計算する為には, 次の様な変数変換を行なうと便利である。即ち

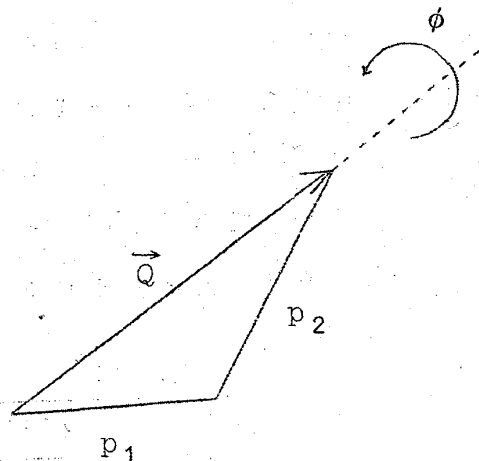
$$\begin{aligned} \rho(E, Q) &\equiv \frac{\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \delta(\vec{Q} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta(E - \epsilon(p_1) - \epsilon(p_2)) \\ &= \frac{\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} \int d\vec{p}_1 \delta(E - \epsilon(p_1) - \epsilon(|\vec{Q} - \vec{p}_1|)) \quad (3.7) \end{aligned}$$

と一度積分を行ない, 次に $\vec{p}_1$ のかわりに, 積分変数として, 図4の様に, $\vec{Q}$ のまわりの角 ϕ , p_1 , $p_2 = |\vec{Q} - \vec{p}_1|$ の3つをとれば

$$\begin{aligned} \int d\vec{p}_1 \dots &= (2\pi) \int \frac{p_1 p_2}{Q} dp_1 dp_2 \dots \\ |p_1 - p_2| &\leq Q \leq |p_1 + p_2| \quad (3.8) \end{aligned}$$

と書けるから,

$$\begin{aligned} \rho(E, Q) &= \frac{\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} \cdot \frac{2\pi}{Q} \\ &\times \int_{|p_1 - p_2| \leq Q \leq |p_1 + p_2|} p_1 p_2 dp_1 dp_2 \delta(E - \epsilon(p_1) - \epsilon(p_2)) \quad (3.9) \end{aligned}$$



第4図

波田野彰・永井克彦・野島行一郎

(3.9) を用いて計算すると、ロトン部分としてエネルギー巾 $\Delta''/2$ の部分を切り出したことから、 $\rho(E, Q)$ は次の様に求まる。(今後エネルギー E は 2Δ を原点にして測ることにする)

1) $Q > \sqrt{4\mu\Delta''}$ の場合

$$\rho(E, Q) = \begin{cases} \frac{1}{Q} \frac{p_0^2 \mu \Omega^2}{(2\pi)^4 \hbar^6} & \text{for } 0 \leq E \leq \Delta'' \\ 0 & \text{for } E < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

2) $\sqrt{4\mu\Delta''} \geq Q \geq 0$ の場合

$$\rho(E, Q) = \begin{cases} \frac{1}{Q} \frac{p_0^2 \mu \Omega^2}{(2\pi)^4 \hbar^6} \cdot \frac{4}{2\pi} \sin^{-1} \frac{Q}{\sqrt{4\mu E}} \\ + \frac{\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} 4\pi\mu \sqrt{\mu E - \frac{Q^2}{4}} & \text{for } \frac{Q^2}{4\mu} \leq E \leq \Delta'' \\ \frac{1}{Q} \frac{p_0^2 \mu \Omega^2}{(2\pi)^4 \hbar^6} & \text{for } 0 \leq E \leq \frac{Q^2}{4\mu} \\ 0 & \text{for } E < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

これらの結果を (3.4), (3.5), (3.6) に代入すると T 行列は求まる。これを用いて lifetime を計算する前に、 T 行列の特徴を眺めてみることにしよう。まず、状態密度の式を見ればわかる様に、状態密度には $E=0$ に於いて常に、有限乃至無限のとびを伴っている。従って (3.6) 式を見れば、わかる様に、 $R(E, Q)$ は常に $E=0$ で singular であり、発散している。その為に $T(E, Q)$ は $E=0$ に於いて常に 0 になっている。このことは重要で、ロトン-ロトン散乱の全断面積 (ロトン $\vec{p}$ とロトン $\vec{p}_1$ の散乱の場合)

$$\sigma \propto \frac{|T(E, Q)|^2}{\left| \frac{\partial \epsilon(\vec{p}_1)}{\partial \vec{p}_1} - \frac{\partial \epsilon(\vec{p})}{\partial \vec{p}} \right|}$$

が $p = p_1 = p_0$ で発散することを防いでいる訳である。

次に, T 行列を用いて, 束縛状態を議論することが出来る。周知の様に $T(E, Q)$ を E の複素平面に解析接続して pole の存在を調べれば良いが, 今の場合には引力ならば必ず $E < 0$ の実軸上に pole を持つことが簡単な考察から知れる。即ち $E < 0$ では $I(E, Q) = 0$ であるから,

$$\frac{1}{g} - R(E, Q) = 0 \quad (3.12)$$

の根を求めればよいことになる。ラマン散乱の実験との対応から $Q = 0$ の場合を具体的に調べてみよう。この時状態密度は (3.11) 式を用いて

$$\rho(E, Q=0) = \frac{p_0^2 \mu \Omega^2}{(2\pi)^4 \hbar^6} \cdot \frac{1}{\pi \sqrt{\mu E}} + \frac{\Omega^2}{(2\pi \hbar)^6} 4\pi \mu \sqrt{\mu E} \quad (3.13)$$

と与えられるが, 第2項は第1項に比べて $(\sqrt{\mu E}/p_0)^2$ のオーダーで小さい^{*)} 為に無視してよい。

*) p_0 はエネルギーとして $p_0^2/2\mu$ を評価すると, 150°K 程度になり, 今考えている束縛状態のエネルギーは高々 1°K のオーダーであるから $\sqrt{\mu E}/p_0$ は $1/10$ 近くに近い。

故に

$$\rho(E, Q=0) = \frac{p_0^2 \mu \Omega^2}{(2\pi)^4 \hbar^6} \cdot \frac{1}{\pi \sqrt{\mu E}} \quad (3.13')$$

(3.13') を用いて (3.12) 式を計算すると, 求めるべき束縛状態のエネルギーを $-E_B$ とおけば

$$-\frac{1}{V_0} = \frac{p_0^2}{(2\pi)^4 \hbar^3} \sqrt{\frac{\mu}{E_B}} \quad (3.14)$$

が得られる。この E_B に Greytak 達が実験から評価した値 $E_B \simeq 0.37^\circ\text{K}$ ⁽³⁾ を代入すると

$$-V_0 \simeq 1.2 \times 10^{-38} \text{ erg cm}^3 \quad (3.15)$$

が得られる。これは Greytak 達の Ruvalds - Zawadowski 流の評価⁽³⁾に比べると一桁大きい。そして、またこの V_0 の値の時に、後に計算する粘性係数も、また、最善の結果を示す。

ここで、我々は2つばかりのことに注意を払っておく必要がある。ひとつは、ラマン散乱でとらえられている束縛状態は D-状態であるという事実である。即ち我々の用いている (2.4) 式の相互作用では $Q=0$ の場合も S-状態のみしか議論することが出来ない為に、本来、(2.5) 式の様な相互作用を用いる必要がある。事実、 $Q=0$ の場合に限って、(2.5) 式の型の相互作用でも T 行列の積分方程式を解くことは可能で、それは岩本によって行なわれた。従って (3.14) の値は (2.5) 式の $g_2(Q=0)$ の値として解釈すべきであろう。しかし、我々としては、(3.14) の値も、ロトン-ロトン相互作用の大きさの一応の目安を与えるものと考えておくことにしよう。

次に注意すべきことは、(3.13) 式に、引力の働らく領域を表わす Δ'' というパラメーターの入っていないことである。これは $E \gtrsim 0$ の場所で状態密度が $1/\sqrt{E}$ で発散していることに由来していて、少しでも引力が働らけば、束縛状態が生じることを意味しているのである。 Q が有限の場合は、 $Q \geq \sqrt{4\mu\Delta''}$ になれば、(3.10) の状態密度が使えて、その時 (3.12) 式に対応する式は

$$-\alpha Q = \ln \left| \frac{E}{E - \Delta''} \right| \quad (3.16)$$

となり、 E_B は

$$E_B \cong \Delta'' e^{-\alpha Q} \quad (3.17)$$

$$\alpha = \frac{\pi \hbar^3}{2 p_0^2 \mu V_0} \quad (3.18)$$

で与えられ、 Δ'' が陽にあらわれる。しかし、 $Q \neq 0$ に於ける中性子散乱の実験では、現在の精度の範囲では、(3.16) に対応する様な peak は認められておらず、従ってこれ以上の議論はここではしないことにしよう。

§ 4 ロトンの lifetime

我々が今まで取り扱って来た T 行列は，ロトン 2 つのみの間で考えた T 行列であり，熱的に励起されているロトンのことは考えなかった。しかし，ロトンの分布函数には常に $\exp[-\Delta/kT]$ の因子が含まれており，これは 1 に比べて無視しうる量であるということに注意すれば，T 行列としては，今まで取り扱ってきたものを用いてもよいということを示すことが出来る。

そこで，ロトンの lifetime の式(ここでは，最も底にあるロトンを考える)は，T 行列を用いて，次の様に書ける。

$$\frac{1}{\tau_r} = \frac{\Omega^3}{2(2\pi\hbar)^9} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}' d\vec{p}_1' \times n_1 \frac{2\pi}{\hbar} |(\vec{p}, \vec{p}_1; \vec{p}', \vec{p}_1')|^2 \delta(E_1 - \epsilon(p_1) - \epsilon(p_1')) \quad (4.1)$$

但し， $\vec{p}$ は，今着目しているエネルギーが Δ のロトンの運動量，で n_1 ， E_1 は夫々

$$n_1 = \exp[-\Delta/kT - (p_1 - p_0)^2/2\mu kT]$$

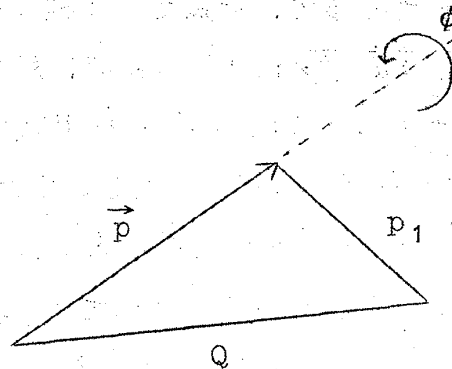
$$E_1 = (p_1 - p_0)^2/2\mu$$

で与えられ， n_1 はロトンの分布函数である。前にも注意した様にエネルギーは 2Δ を原点に測ってある。(4.1) に於いて，正しくは散乱する相手のロトン $\vec{p}_1$ の範囲に制限を与える必要があるが， n_1 がガウス函数を含んでいる為に，実際には (4.1) で十分であろう。

(4.1) は適当な変型の後，

$$\frac{1}{\tau_r} = \frac{\Omega^2}{2(2\pi\hbar)^6} \cdot \frac{2\pi}{\hbar} \int d\vec{p}_1 n_1 \times |T(E_1, Q)|^2 \rho(E_1, Q) \quad (4.2)$$

と書ける。再び第 5 図の様に積分変数を変換して， $\vec{p}$ を軸に，そのまわりの角 ϕ ， p_1 及び Q を新たにとると，



第 5 図

$$\int d\vec{p}_1 \cdots = \int \frac{p_1}{p_0} dp_1 Q dQ d\phi \cdots \quad (4.3)$$

となる為に、我々の求めるべき式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_r} = & \frac{\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} \cdot \frac{(2\pi)^2}{\hbar} \int_0^{\infty} \frac{p_1}{p_0} dp_1 \int \frac{|p_0 + p_1|}{|p_0 - p_1|} Q dQ \\ & \times n_1 |T(E_1, Q)|^2 \rho(E_1, Q) \end{aligned} \quad (4.4)$$

となる。(4.4) 式を計算するには、(3.4), (3.10), (3.11) の一連の式を代入すればよいが、状態密度の正確な表式を代入したのでは、とても計算することが出来ず、従って我々としては、状態密度をすべての Q について (3.10) 式で近似することにしよう。そうすると $T(E, Q)$ の表式は

$$T(E, Q) = \left[\frac{1}{g} - \frac{1}{2} \left(\frac{A}{Q\pi} \ell n \left| \frac{E}{E - \Delta''} \right| - i \frac{A}{Q} \right) \right]^{-1} \quad (4.5)$$

(但し簡単の為、 $A = \pi \cdot \Omega^2 p_0^2 \mu / (2\pi)^4 \hbar^6$ とおいた) と書かれ、

$$|T(E, Q)|^2 = 4Q^2 \left[\left(\frac{2Q}{g} - \frac{A}{\pi} \ell n \left| \frac{E}{E - \Delta''} \right| \right)^2 + A^2 \right]^{-1} \quad (4.6)$$

となる。§3 の状態密度のところで述べた様に状態密度が細かい構造をもつのは、 $Q \leq \sqrt{4\mu\Delta''}$ のところで、 Q としては非常に小さい領域である。従って、(4.6) 式は Q^2 がかかっているから (4.6) を用いても $Q \simeq 0$ 付近で余計な寄与を計算する心配はない。また $Q \leq \sqrt{4\mu\Delta''}$ での正確な寄与の上限をおさえることは可能で、附録で示す様にそれは (4.6) 式を用いて得られる $1/\tau_r$ に対し $(\sqrt{4\mu\Delta''}/p_0)^3$ の程度、即ち2桁以上小さい寄与しか与えない。従って、我々は (3.10), (4.6) を用いて τ_r を計算してもよいであろう。そこで、(4.4) に (4.6) を代入し、また、 n_1 が Gauss 函数を含む為に p_1 の寄与は p_0 付近が主であることを考え、 p_1 を含む factor のうち $p_1 \simeq p_0$ でゆるやかに変化するものは、すべて $p_1 = p_0$ の値でおきかえると、

$$\frac{1}{\tau_r} = \frac{\Omega^2}{2(2\pi\hbar)^6} \frac{(2\pi)^2}{\hbar} \cdot \frac{A}{\pi}$$

$$\times \int_0^{\infty} dp_1 \int_0^{2p_0} dQ \frac{Q^2}{\left[\frac{2Q}{g} - \frac{A}{\pi} \ln \left| \frac{(p_1 - p_0)^2}{2\mu\Delta''} \right| \right]^2 + A^2} \quad (4.7)$$

次に p_1 積分の原点を $p_1 = p_0$ に移し, $(p_1 - p_0)/\sqrt{2\mu kT} = x$, $Q/p_0 = y$ と積分変数を dimensionless になおすと,

$$\frac{1}{\tau_r} = \frac{2(2\pi\hbar)^2}{p_0 \mu \sqrt{\pi}} N_r f(T) \quad (4.8)$$

$$f(T) = \int_0^{\infty} dx \int_0^2 dy \frac{y^2 e^{-x^2}}{\left[Gy - \ln x^2 - \ln \frac{kT}{\Delta''} \right]^2 + \pi^2} \quad (4.9)$$

但し, $G = 2\pi\hbar^3/V_0 p_0 \mu$ と与えられる。(4.8) にみられるように, τ_r はロトン密度 N_r を通してのみならず, $f(T)$ という因子を通して温度に依存しているのである。

§ 5 粘性係数の計算とその結果

§ 4 で得られた lifetime を L-K の表式 (2.1) に代入してみると

$$\begin{aligned} \eta_r &= \frac{p_0^3 \sqrt{\pi}}{30(2\pi\hbar)^2} \cdot \frac{1}{f(T)} \\ &= 1.08 \times 10^{-5} \times \frac{1}{f(T)} \quad (\text{poise}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

となり, L-K のボルン近似の結果と異なり η_r は温度依存性を持つ。例えば, (4.9) 式をみれば, 低温の極限では $f(T)$ は $(\ln T)^2$ に反比例しているから, (5.1) 式に於いては $T \rightarrow 0$ で発散する η_r を与えている。この様に, η_r の温度依存性は T 行列のエネルギー依存性を反映しているのである。

ところが, (4.9) 式に於いては

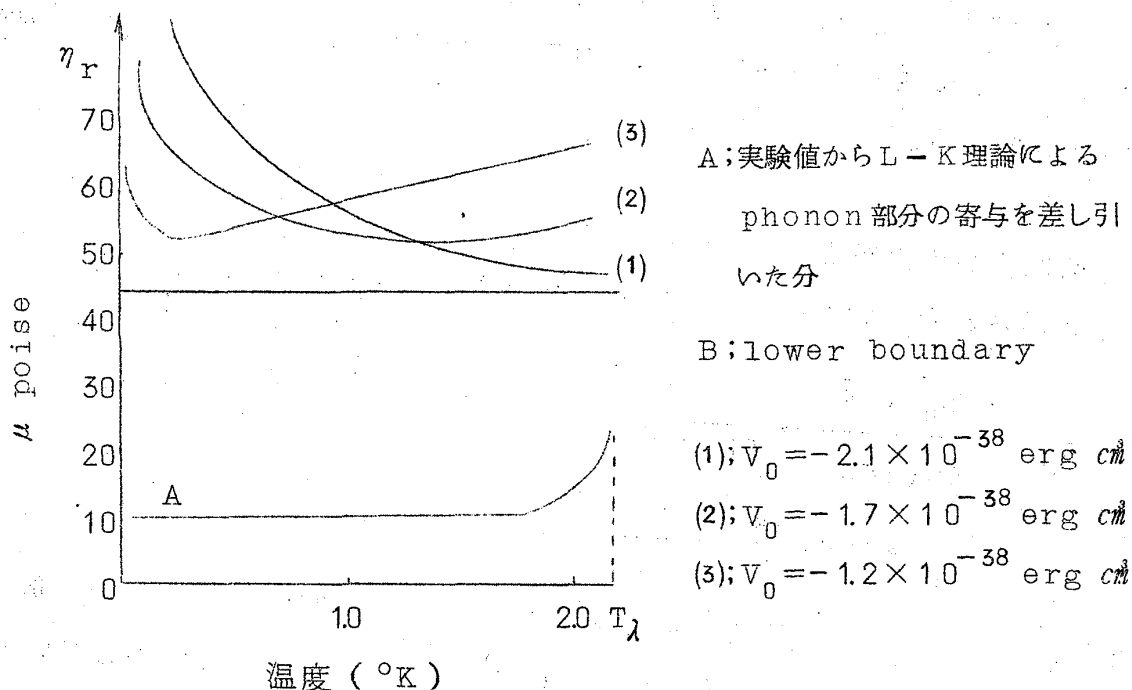
$$f(T) = \int_0^{\infty} dx \int_0^2 dy \frac{y^2 e^{-x^2}}{\left(Gy - \ln x^2 - \ln \frac{kT}{\Delta''} \right)^2 + \pi^2}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^\infty dx \int_0^2 dy y^2 e^{-x^2} / \pi^2 \\ &\approx \frac{1}{4.2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

となるから、これは η_r についてみれば

$$\begin{aligned} \eta_r &= 1.08 \times 10^{-5} \times [1/f(T)] \\ &\geq 4.5 \times 10^{-5} \text{ poise} \end{aligned} \quad (5.4)$$

となり、 η_r の lower bound が求まる。実験値は凡そ 1.5×10^{-5} poise であるから η_r の計算値は実験値の3倍以上にしか出て来ない。



第 6 図 η_r の計算結果

V_0 にいくつかのパラメーターを与えて $f(T)$ を数値積分で求めた結果が第 6 図である。これからみても、最も実験値に近いのは、

$$V_0 = -1.0 \times 10^{-38} \text{ erg cm}^3$$

のオーダーの時であるが、それでも (5.4) の不等式によって、実験値と比較するに至らない。図 6 には、最も実験値に近い結果のみ示してあるが、引力で

もっと強くしていくと, η_r は単調に減少しつつ, 全体的にずっと上の方へあがってしまう。また, 引力でもっと弱くしていくと, 今度は単調に増大しつつ (本当は 0°K 付近に最小値をもち $T \rightarrow 0$ で $(\ln T)^2$ で発散しているが) 全体的に上の方へあがってしまう。例えば

$$V_0 = -1.0 \times 10^{-39} \text{ erg cm}$$

ととると, η_r は $500 \mu \text{ poise}$ 程度で増加している。

§ 6 結 論

我々は, L-K 理論の枠内でロトン-ロトン散乱を正しく取り扱ってみた。その結果, 接触型の相互作用では, 実験値にあらうような定量的な結果はえられないことがわかった。ボルン近似であれば, (2.7) 式でみられる様に, V_0 を動かすことによって, η_r を実験値にあわせることが出来た。しかし, 散乱を正確に扱った結果 (5.4) のような lower bound が出て来ることになり, 実験値より必ず大きくなってしまう。従って L-K のボルン近似の取り扱いが誤まっているということになる。

今後, 改良すべきこととしては, 相互作用に (2.5) の様に角度依存性をもたせていくことであるが, § 2 にも述べた様に, 問題は相当難しくなり, 大部分を数値計算に頼らざるをえないのではないかと考えられる。

L-K 理論は, 実験で観測される素励起を持つ様な現象論的な Hamiltonian から出発している為に, いろいろと不都合が生じて来る。例えば, その時使われるパラメーターなども, だんだんと実験の精度があると共に異なって来ており, phonon 部分の分散関係なども, Landau が用いたところとはちがって来ている。これらの変化を踏まえた上で L-K 理論を全面的に再検討する必要があるであろう。

最後にこの問題を suggest して下さった岩本文明先生に御礼申し上げます。

References

- 1) J.Wilks; The Properties of Liquid and Solid Helium
(Oxford 1967) p.36
- 2) L.D.Landau and I.M.Khalatnikov; Collected Papers of
L.D.Landau (Pergamon Press) p.494
- 3) T.J.Greytak and J.Yan; Phys. Rev. Letters 22 (69) 987
T.J.Greytak et al.; Phys. Rev. Letters 25 (70) 1547
- 4) F.Iwamoto; Prog. Theor. Phys. 44 (70) 1135
- 5) J.Ruvalds and A.Zawadowski; Phys. Rev. Letters.
25 (70) 333
- 6) F.Iwamoto, K.Nagai and K.Nojima; to be published in
the Proceedings of LT12
- 7) L.D.Landau and E.M.Lifshitz; Statistical Physics
(2nd edition, Pergamon Press) p.191
- 8) R.A.Cowley and A.D.B.Woods; to be published in the
Proceedings of LT12

附 録

$\sqrt{4\mu\Delta''} \geq Q$ の部分の $1/\tau_r$ への寄与を求めよう。その部分を B とおくと、
B は (4.4) 式と同様

$$B = \frac{\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{(2\pi)^2}{\hbar} \int_0^{\sqrt{4\mu\Delta''}} Q dQ$$

$$\times \int_{p_0-Q}^{p_0+Q} dp_1 n_1 \frac{\rho(E_1, Q)}{\left[\frac{1}{g} - R(E_1, Q)\right]^2 + \pi^2 \rho^2(E_1, Q)} \quad (1)$$

但し, $E_1 = (p_1 - p_0)^2 / 2\mu$, となる。そこで, $p_1 - p_0$ を新たに p_1 とおくと,

$$B = \frac{2\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{(2\pi)^2}{\hbar} \int_0^{\sqrt{4\mu\Delta''}} Q dQ \int_0^Q dp_1 n_1 \frac{\rho(E_1, Q)}{\left[\frac{1}{g} - R(E_1, Q)\right]^2 + \pi^2 \rho^2(E_1, Q)} \quad (2)$$

$$B \leq B' = \frac{2\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{(2\pi)^2}{\hbar} \int_0^{\sqrt{4\mu\Delta''}} Q dQ \int_0^Q dp_1 \frac{n_1}{\pi^2 \rho(E_1, Q)} \quad (3)$$

今度は $E_1 = p_1^2 / 2\mu$.

$\rho(E, Q)$ は $E \geq Q^2 / 4\mu$ で表式がかわるから, p_1 を $Q/\sqrt{2}$ でスケールした $x = \sqrt{2} p_1 / Q$ を新たに積分変数に用いると便利である。

$$B' = \frac{\sqrt{2}\Omega^2 e^{-\Delta/kT}}{(2\pi\hbar)^6 \pi^2} \frac{(2\pi)^2}{\hbar} \int_0^{\sqrt{4\mu\Delta''}} Q^2 dQ \int_0^{\sqrt{2}} dx e^{-\frac{Q^2 x^2}{4\mu kT}} \frac{1}{\rho(E_1, Q)} \quad (4)$$

そこで次のように B'_1 と B'_2 を定義する

$$B'_1 = \frac{\sqrt{2}\Omega^2 e^{-\Delta/kT}}{(2\pi\hbar)^6 \pi^2} \frac{(2\pi)^2}{\hbar} \int_0^{\sqrt{4\mu\Delta''}} Q^2 dQ \int_0^1 dx e^{-\frac{Q^2 x^2}{4\mu kT}} \frac{1}{\rho(E_1, Q)} \quad (5)$$

$$B'_2 = \frac{\sqrt{2}\Omega^2 e^{-\Delta/kT}}{(2\pi\hbar)^6 \pi^2} \frac{(2\pi)^2}{\hbar} \int_0^{\sqrt{4\mu\Delta''}} Q^2 dQ \int_1^{\sqrt{2}} dx e^{-\frac{Q^2 x^2}{4\mu kT}} \frac{1}{\rho(E_1, Q)} \quad (6)$$

B'_1 の積分領域では $E_1 < Q^2 / 4\mu$ であるから (3.11) 式により

$$\rho(E_1, Q) = A/Q\pi \quad (7)$$

(但し, $A/\pi = p_0^2 \mu \Omega^2 / (2\pi)^4 \hbar^6$), 故に

$$\begin{aligned} B'_1 &\leq \frac{\sqrt{2}\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} \cdot \frac{e^{-\Delta/kT}}{\pi^2} \frac{(2\pi)^2}{\hbar} \frac{\pi}{A} \int_0^{\sqrt{4\mu\Delta''}} Q^3 dQ \int_0^\infty e^{-\frac{Q^2 x^2}{4\mu kT}} dx \\ &= \frac{\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{e^{-\Delta/kT}}{\sqrt{2}\pi^2} \frac{(2\pi)^2}{\hbar} \frac{(\pi)^{3/2}}{4} \sqrt{4\mu kT} \cdot \frac{1}{3} (\sqrt{4\mu\Delta''})^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}\hbar^2}{3p_0^4 \mu} \sqrt{(4\mu\Delta'')^3} \cdot N_r \end{aligned} \quad (8)$$

次に B'_2 の積分領域では (3.11) より

$$\rho(E, Q) = \frac{1}{Q} \frac{A}{\pi} \cdot \frac{4}{2\pi} \sin^{-1} \frac{Q}{\sqrt{4\mu E}} + \frac{\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} 4\pi\mu \sqrt{\mu E - \frac{Q^2}{4}}$$

となるので

$$\frac{1}{\rho(E, Q)} \leq \frac{Q\pi}{A} \cdot \frac{2\pi}{4} \left[1 / \sin^{-1} \frac{Q}{\sqrt{4\mu E}} \right] \quad (9)$$

ところで、 $\sin^{-1} x$ は解析的に扱いにくいのでよく似た函数として $0 \leq x \leq 1$ において

$$\sin^{-1} x \simeq \frac{\pi}{2} [1 - \sqrt{1-x}] \quad (10)$$

としよう。右辺は殆んど $\sin^{-1} x$ を再現しており、今の場合の計算に用いることが出来る。すると、(9) を考慮して

$$\begin{aligned} B_2' &\leq \frac{\sqrt{2}\Omega^2 e^{-\Delta/kT}}{(2\pi\hbar)^6 \pi^2} \cdot \frac{(2\pi)^2}{\hbar} \int_0^{\sqrt{4\mu\Delta''}} Q^2 dQ \int_1^{\sqrt{2}} dx \left(\frac{\pi Q}{A} \right) \frac{e^{-\frac{Q^2}{4\mu kT} x^2}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \\ &= \frac{\sqrt{2} e^{-\Delta/kT}}{\pi^2 p_0^2 \mu \hbar} \int_0^{\sqrt{4\mu\Delta''}} Q^3 dQ \int_1^{\sqrt{2}} dx e^{-\frac{Q^2 x^2}{4\mu kT}} \sqrt{x} (\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) \\ &\leq \frac{2\sqrt{2} e^{-\Delta/kT}}{\pi^2 p_0^2 \mu \hbar} \int_0^{\sqrt{4\mu\Delta''}} Q^3 dQ \int_0^{\infty} x e^{-\frac{Q^2 x^2}{4\mu kT}} dx \\ &= \frac{\sqrt{2} e^{-\Delta/kT}}{\pi^2 p_0^2 \mu \hbar} \cdot \frac{1}{2} (4\mu\Delta'') \cdot 4\mu kT \\ &= \frac{\sqrt{2} (2\pi)^{3/2} \hbar^2}{\pi^2 p_0^4 \mu} (4\mu\Delta'') \sqrt{\mu kT} \cdot N_r \quad (11) \end{aligned}$$

(8), (11) の結果を (4.8) 式

$$\frac{1}{\tau_r} = \frac{2(2\pi\hbar)^2}{p_0 \mu \sqrt{\pi}} N_r f(T)$$

と比較すると，§ 5 で計算した $f(T)$ のオーダーを思い浮かべると，(8)，
(11) 共に，(4.8) 式に比し

$$\frac{(\sqrt{4\mu\Delta''})^3}{p_0^3}, \quad \frac{(\sqrt{4\mu\Delta''})^2 \cdot \sqrt{\mu kT}}{p_0^3}$$

のオーダーの寄与しか与えていないことがわかる。