

BCK 代数と BCI 代数の語の問題

静岡大学 理学部 古森 雄一 (Yuichi Komori)

自由 BCK 代数と自由 BCI 代数の語の問題は、これらの代数が定義された当時から問題とされていたが (cf. [Ise66]), 自由 BCK 代数の場合は 1981 年に筆者により ([Kom84]), 自由 BCI 代数の場合は東工大の鹿島亮氏により最近肯定的に解かれた ([KK]).

1 BCK タイプの代数系の公理

まず、基礎となる体系である BI^* 代数の公理系を提示します.

$$(B) \quad (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y) \rightarrow x \rightarrow z = 1,$$

$$(M) \quad 1 \rightarrow x = x,$$

$$(E) \quad x \rightarrow y = 1 \text{ かつ } y \rightarrow x = 1 \text{ ならば } x = y.$$

ここで、足りない括弧は右から補うものとします. 例えば、公理 (B) の左辺は正確は、 $(y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$ と書くべきものです. また井関先生によるもともとの定義はこれの dual な言語が使われています. 演算記号と常数記号 “ $\rightarrow, 1$ ” の代わりに “ $*, 0$ ” が使われています. 公理 (B) は次のように書かれています: $((z * x) * (y * x)) * (z * y) = 0$.

公理 (B) において、 $y = 1, x = 1, z = x$ と置いて公理 (M) を使えば次の (I) が導かれます.

$$(I) \quad x \rightarrow x = 1.$$

更に次の二つの公理を考えます.

$$(C) \quad (x \rightarrow y \rightarrow z) \rightarrow y \rightarrow x \rightarrow z = 1,$$

$$(K) \quad x \rightarrow y \rightarrow x = 1.$$

4つの代数系の公理をまとめると次のようになります.

BI* 代数の公理 : B, M, E

BCI 代数の公理 : BI* + C

BCK 代数の公理 : BCI + K

BIK* 代数の公理 : BI* + K

BIK* 代数は論文 [Kom84] では BCC 代数とよんでいます. また, その論文では, 自由 BCK 代数と自由 BIK* 代数の語の問題を Gentzen 流の定式化により肯定的に解いています.

2 BCK 代数の Gentzen 流の定式化と肯定的解決

まず体系 LBI* を定義する.

公理

$$\alpha \Rightarrow \alpha \quad \text{と} \quad \Rightarrow 1.$$

推論規則

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Delta, \alpha, \Sigma \Rightarrow \beta}{\Delta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \beta} (CUT)$$

$$\frac{\Gamma, \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow \beta} (\Rightarrow \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Delta, \beta, \Sigma \Rightarrow \gamma}{\Delta, \alpha \rightarrow \beta, \Gamma, \Sigma \Rightarrow \gamma} (\rightarrow \Rightarrow)$$

体系 LBIK* は LBI* に次の推論規則 ($T \Rightarrow$) を加えたものです.

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \beta}{\Gamma, \alpha, \Delta \Rightarrow \beta} (T \Rightarrow)$$

体系 LBCK は LBIK* に次の推論規則 ($I \Rightarrow$) を加えたものです.

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta, \Delta \Rightarrow \gamma}{\Gamma, \beta, \alpha, \Delta \Rightarrow \gamma} (I \Rightarrow)$$

定理 1 $\alpha = \beta$ が BCK(BIK*) 代数の公理から出る $\iff \alpha \Rightarrow \beta$ と $\beta \Rightarrow \alpha$ が LBCK(LBIK*) で証明できる.

定理 2 LBCK と LBIK* では CUT 除去定理がなりたつ.

定理 3 LBCK と LBIK* は 決定可能な体系である.

定理 4 自由 BCK と 自由 BIK* 代数の語の問題は肯定的に解かれる.

3 BCI 代数の Gentzen 流の定式化と肯定的解決

以下は東工大の鹿島亮氏の方法の紹介である.

定義 5 変数 x , 項 α に対して *balanced number* $B(x, \alpha)$ を次のように定義する.

$$1 \quad B(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \equiv y \\ 0 & \text{if } x \not\equiv y \end{cases}$$

$$2 \quad B(x, 1) = 0$$

$$3 \quad B(x, \alpha \rightarrow \beta) = B(x, \beta) - B(x, \alpha)$$

$$B(x, x \rightarrow x \rightarrow y) = -2$$

例 6 $B(y, x \rightarrow x \rightarrow y) = 1$

$$B(z, x \rightarrow x \rightarrow y) = 0$$

項の列 Γ が $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ のとき $B(x, \Gamma) = B(x, \alpha_1) + B(x, \alpha_2) + \dots + B(x, \alpha_n)$ と定義する. 全ての変数 x に対して $B(x, \Gamma) = 0$ のとき 列 Γ は *balanced* であるという.

体系 $LBCI$ は LBP^* に 推論規則 $(I \Rightarrow)$ と次の推論規則 (BT) を加えたものである.

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Delta, \Gamma \Rightarrow \alpha} (BT)$$

ここで Δ は *balanced* な列である.

定理 7 $\alpha = \beta$ が BCI 代数の公理から出る $\iff \alpha \Rightarrow \beta$ と $\beta \Rightarrow \alpha$ が $LBCI$ で証明できる.

定理 8 $LBCI$ では CUT 除去定理がなりたつ.

定理 9 $LBCI$ は 決定可能な体系である.

定理 10 自由 BCI 代数の語の問題は肯定的に解かれる.

参考文献

[Ise66] Kiyoshi Iséki. An algebra related with a propositional calculus. *Proceedings of the Japan*

Academy, 42:26–29, 1966.

[KK] Ryo Kashima and Yuichi Komori. The word problem for free BCI -algebras is decidable.

[Kom84] Yuichi Komori. *The class of BCC-algebras is not a variety. Mathematica Japonica, 29:391–394, 1984.*