

Almost homeomorphic 3-manifolds

北大 教養 小林一章

ここでは C.H. Edwards, JR. [1] によって与えられた次の定理の別証明を与えます。

定理. M_1, M_2 をコンパクト 3次元多様体とする。もし $\text{Int } M_1$ と $\text{Int } M_2$ が位相同形ならば M_1 と M_2 は位相同形である。

上の定理の証明に次の補題を使います。

補題1. F を連結閉曲面とし $(W; F, F)$ をコンパクト 3次元 h -cobordism とすると $\exists \varphi \Rightarrow \varphi|_W$ が位相写像となるようなホモトピー同値写像 $\varphi: W \rightarrow F \times I$ がある。

定義. 3次元多様体 M の中の任意のコンパクト可縮な 3次元部分多様体が 3次元 ball D^3 に位相同形るとき M を (C.P.)-多様体という。

補題2. $(W; F, F)$ をコンパクト 3次元 h -cobordism とし W は (C.P.)-多様体, F は連結閉曲面とするならば W は $F \times I$ と位相同形である。

補題3. F を連結な閉曲面とすると $F \times I$ は (C, P) -多様体である。

補題1の証明) 今 $\partial W = \partial_- W \cup \partial_+ W = F \cup F$ とかく. W は R -cobordism だから deformation retraction $f: W \rightsquigarrow \partial_- W$ がある. collar theorem より $U(\partial_- W) \cong F \times I$ (ここで $U(\partial_- W) \equiv U(\partial_- W, W)$ は $\partial_- W$ の W における正則近傍), そこで deformation retraction $\tilde{f}: W \rightsquigarrow U(\partial_- W)$ と $\tilde{f}(\partial_+ W) \subset \partial_+ U(\partial_- W)$ なるものがあるとしてよい. (ここで $\partial U = \partial_- U \cup \partial_+ U = \partial_- W \cup \partial_+ W$ とかく) $U(\partial_- W) \cong F \times I$ だから $g: U(\partial_- W) \rightarrow F \times I$ を位相写像とすると $\tilde{g} \equiv g \circ \tilde{f}: W \rightarrow F \times I$ はホモトピー同値写像で $\tilde{g}|_{\partial_- W}$ は位相写像, $(\tilde{g}|_{\partial_+ W})_*: \pi_1(\partial_+ W) \rightarrow \pi_1(F \times I)$ は同形写像になっている. 従って $(\tilde{g}|_{\partial_+ W})$ は位相写像

$\psi: \partial_+ W \rightarrow F$ にホモトピック 即ち $\Phi_0 = (\tilde{g}|_{\partial_+ W}), \Phi_1 = \psi$ となるホモトピー $\Phi: \partial_+ W \times I \rightarrow F \times I$ が存在する。

$$\varphi = \begin{cases} \Phi & \text{on } U(\partial_+ W) \cong F \times I \\ \tilde{g} & \text{on } W - \overset{\circ}{U}(\partial_+ W) \end{cases}$$

と定義する事によって, φ は求めるホモトピー同値写像になっている。

補題 2 の証明) F についての次の様列を作ります。

$$F = F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_{p+1}$$

α_i : properly embedded 2-sided simple arc or simple closed curve in F_i ($1 \leq i \leq p$)

$$F_{i+1} = F_i - \bar{U}(\alpha_i, F_i)$$

F_{p+1} : disjoint union of 2-balls

(特に後の index 2 の embedded surgery のため $p \geq 2$ としておく)。補題 1 によって W から $F \times I$ へのホモトピー同値写像 $f: W \rightarrow F \times I$ で $\partial f \equiv f|_{\partial W}$ が位相写像になっているものがある。 $\alpha_i \times I$ は $F \times I$ に自然に埋め込まれているとし, f が各 $\alpha_i \times I$ に transversal になるようにしておくと, ∂f が位相写像だから $f^{-1}(\alpha_i \times I)$ は W に proper に埋め込まれた連結な 2 次元曲面。

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & F \times I \\ i \downarrow & \curvearrowright & \downarrow j \\ f^{-1}(\alpha_i \times I) & \xrightarrow{f} & \alpha_i \times I \end{array}$$

ここで i, j は包含写像

$f|_{f^{-1}(\alpha_i \times I)} = f'$ とおくと ∂f が位相写像だから

$f'_* : \pi_1(f^{-1}(\alpha_i \times I)) \rightarrow \pi_1(\alpha_i \times I)$ は epimorphism.

$\alpha \in \ker f'_*$ は $i_*(\alpha) = 0$ だから α_i が F で 2-sided curve だという事を使うと W の中に埋め込まれた 2-ball D^2 で $D^2 \cap f^{-1}(\alpha_i \times I) = \partial D^2$ となるものがある。しかも $\alpha_i \times I$ が $F \times I$ で 2-sided,

従って $f^{-1}(\alpha_i \times I)$ が W で 2-sided である事と上の可換図式より $D^2 \cap \bigcup_{j \neq i} f^{-1}(\alpha_j \times I) = \emptyset$ と仮定してよい。この D^2 を使ったような index 2 の embedded surgery を行ない α を消去する。先ず写像 g を $W - \mathring{U}(D^2, W)$ 上で次のように定義する。

$$g|_{W - \mathring{U}(D^2, W)} = f|_{W - \mathring{U}(D^2, W)} \quad \text{ここで } D^2 \text{ の正則近傍}$$

$U(D^2, W)$ を十分小さくとっておくと $U(D^2, W) \cap f^{-1}(\alpha_i \times I)$ は

$U(D^2, W)$ に proper に埋め込まれた annulus A である。

$U(D^2, W)$ の中に proper に埋め込まれた 2 つの disjoint 2-ball

D_1, D_2 で $\partial A = \partial D_1 \cup \partial D_2$, $A \cap D_i = \partial D_i$ ($i=1, 2$) となるこ

いのものを選ぶ。 $\alpha \in \text{ker } f_*$ より g を $g(D_i) \subset \alpha_i \times I$ にな

るように $D_1 \cup D_2$ 上に拡大出来る。次に $\pi_2((F - \bigcup_i \alpha_i) \times I) =$

0 より $U(D^2, W)$ の中の残りの 3 つの balls に対し g を拡大

する事が出来、結局写像 $g: W \rightarrow F \times I$ が得られ

$$g|_{W - \mathring{U}(D^2, W)} = f|_{W - \mathring{U}(D^2, W)}$$

$$g^{-1}(\alpha_i \times I) = (f^{-1}(\alpha_i \times I) - \mathring{A}) \cup (D_1 \cup D_2) \quad \text{となっている。}$$

$$\text{しかも } f(U(D^2, W)) \cup g(U(D^2, W)) \subset (F - \bigcup_{j \neq i} \alpha_j) \times I$$

そして最初の仮定 $p \geq 2$ より $\bigcup_{j \neq i} \alpha_j \neq \emptyset$ 従って $\pi_3(F - \bigcup_{j \neq i} \alpha_j) =$

0、それ故 $g \simeq f$ 。このようにして W の境界では重み α となる

ホモトピーの範囲内の変形で $\alpha \in \text{ker } f_*$ を消去した。この操

作をくり返して $\text{ker } f_*$ を消去し、次の①, ②を満足するホモ

トピー同値写像 $\tilde{g}: W \rightarrow F \times I$ を得る。

① $\exists \tilde{g} = \exists f$ (位相写像) ② $\tilde{g}|_{\tilde{g}^{-1}(\alpha_i \times I)}$ は位相写像.
 更にこのような事を全ての $\alpha_i \times I$ に対して行ない. 次のようなホモトピー同値写像 h を得る.

$$h: W \rightarrow F \times I \quad \text{ } \textcircled{A} \quad h \simeq f \text{ keeping } \exists \text{ fixed}$$

③ $h|_{h^{-1}(\alpha_i \times I)}: h^{-1}(\alpha_i \times I) \rightarrow \alpha_i \times I$ は全ての i に対して位相写像になっている。

すると $(F - \bigcup_i \mathring{U}(\alpha_i, F)) \times I = F_{p+1} \times I$ は 3-balls の disjoint union だから $W - \bigcup_i \mathring{U}(h^{-1}(\alpha_i \times I), W)$ は 3次元コンパクト可縮な多様体であり, W は仮定によって (C.P.)-多様体だから全ての 3次元 ball になる。そこで $\tilde{h} = h|_{\bigcup_i \mathring{U}(h^{-1}(\alpha_i \times I), W)}$ において $\tilde{h}$ を cone extension technique で位相写像 $\tilde{h}: W \rightarrow F \times I$ に拡大すればよい。

補題 3 の証明). F についての次のような列を取ります。

$$F = F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_{p+1}$$

α_i : properly embedded simple arc or simple closed curve in F_i ($1 \leq i \leq p$).

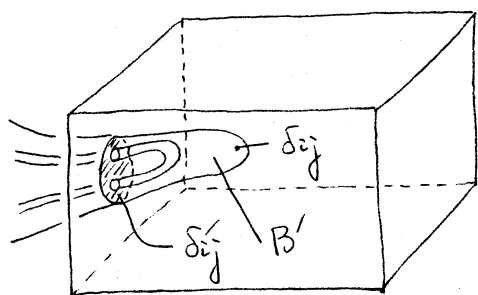
$$F_{i+1} = F_i - \mathring{U}(\alpha_i, F_i)$$

F_{p+1} : 2-balls の disjoint union

V を $F \times I$ の中のコンパクト可縮なる次元部分多様体とする。

従って ∂V は 2次元球面 S^2 と位相同形, 各 $\alpha_i \times I$ と ∂V が trans-
versal に交わるようにしておく

$\{\alpha_i \times I\} \cap \partial V = \{\beta_{i1}, \dots, \beta_{ip_i}\}$ は simple closed curves の
集合である。今 β_{ij} が ∂V の中での inner-most curve である
とする ($\bigcup_{i,j} \beta_{ij}$ の中には必ず ∂V の中での inner-most curves
があるが任意の i に対して $\beta_{i1}, \dots, \beta_{ip_i}$ の中に ∂V の中での
innermost curve があるとは限らない)。



すると次のような 2-balls

$\delta_{ij} \subset \partial V$, $\delta'_{ij} \subset \alpha_i \times I$ があ

る。即ち $\partial \delta_{ij} = \beta_{ij} = \partial \delta'_{ij}$,

$$\delta_{ij} \cap \bigcup_{p,q} \beta_{p,q} = \beta_{ij}.$$

そこで $(F - \bigcup (\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_p)) \times I = F_{p+1} \times I$ (3-balls の dis-
joint union) の中の 1 つの 3-ball B が δ_{ij} を含む。

Schoenflies の定理によって δ_{ij} は B を 2 つの 3-balls に
分ける。 δ'_{ij} を含む方を B' とする。 B' を使う事により $F \times I$ の境
界 $(F \times \{0\} \cup F \times \{1\})$ を動かさない $F \times I$ のイソトピーにより交
わり β_{ij} を消去する。このとき δ'_{ij} と交わっていた $\{\beta_{ik}\}$ も
同時に消去される。この操作を有限回行なう事により $(F \times \{0\})$
 $\cup (F \times \{1\})$ を動かさない $F \times I$ の isotopy の範囲内の変形で
 $\partial V \cap \bigcup_i (\alpha_i \times I) = \emptyset$ と出来る。従って V は $F_{p+1} \times I$ の中の 1 つ

の 3-ball に含まれるから Schoenflies の定理より $V \cong D^3$ が証明され、従って $F \times I$ は (C.P.)-多様体である。

定理の証明). $h: \text{Int } M_1 \rightarrow \text{Int } M_2$ を位相写像とする。

$c_i: \partial M_i \times I \rightarrow M_i$ ($i=1, 2$) を M_i の boundary collars とする。即ち c_i は embedding で $c_i(x, 0) = x$ ($x \in \partial M_i$) となっている。すると $h(M_1 - c_1(\partial M_1 \times [0, 1))) \subset M_2$ であり、しかも

$h c_1(F_{1j} \times \{1\}) \subset c_2(F_{2j} \times (0, 1))$ となっているとすると

$(W_j: h c_1(F_{1j} \times \{1\}), F_{2j})$ は h -cobordism (ここで F_{2j} ($i=1, 2$) は ∂M_i の連結成分) W_j の次元は 3 だから F_{1j} と F_{2j} は位相同形。これから先ず ∂M_1 と ∂M_2 が位相同形である事が証明される。そこで上の h -cobordism を簡単に $(W: F, F)$ とかくと $W \subset F \times I$ となっており、 F は連結閉曲面。すると補題 3 から $F \times I$ は (C.P.)-多様体、そこで W も (C.P.)-多様体になる。何故なら V を W の中のコンパクト可縮な次元部分多様体とすると $F \times I$ が (C.P.)-多様体だから V は D^3 と位相同形、従って W は (C.P.)-多様体、すると補題 2 より W は $F \times I$ に位相同形、従って h を位相写像 $H: M_1 \rightarrow M_2$ に拡張出来る。従って $M_1 \cong M_2$ が証明された。

Reference

C. H. Edward Jr : Concentricity in 3-manifolds, Trans.
Amer. Math. Soc. vol. 113 (1964), 406 ~ 423.