

多重クロス表による社会調査データのモデル解析

統計学 大隅 昇

1. 対数線形モデル 多重クロス表の解析法の1つである、対数線形モデル (log-linear model: 以下 LLM と略す) を取りあげ、これにもとづくモデル選択の考え方と適用例を述べる。多重クロス表とは、複数の水準 (カテゴリー) を持つ項目 (アイテム) を多数個 (多重) 考えて、この項目間の関連を水準ごとの度数情報として分類した表のことである。たとえば2元のクロス表とは、2つの項目 A, B を考え、 A が水準 i , B が水準 j となる水準の組み合わせ $A_i B_j$, あるセル (i, j) における実現度数を f_{ij} とかく。そしてクロス表全体を $\{f_{ij}\}$ で表わす。このとき LLM とは f_{ij} の期待値 F_{ij} ($i=1, 2, \dots, r; j=1, 2, \dots, c$) に対し対数をとって、 $E_{ij} = \log F_{ij}$ とし E_{ij} に関する線形モデルとして度数情報を分析する方法である。このとき若干の変形により ANOVA と同様の表現が可能となる。以下モデル (仮説) として、「 A, B 間が独立である」という場合を例にとると、

$$E_{ij} = \mu + \mu_{A(i)} + \mu_{B(j)} \quad (i=1, 2, \dots, r; j=1, 2, \dots, c) \quad (1)$$

$$\therefore \mu = \sum_i \sum_j E_{ij} / rc,$$

$$\mu_{A(i)} = \sum_j E_{ij} / c - \mu, \quad \mu_{B(j)} = \sum_i E_{ij} / r - \mu$$

とかける。なお $\mu = 0$ とする制約条件として, $\sum_i \mu_{A(i)} = \sum_j \mu_{B(j)} = 0$ がある。式(1)の記法を借りて2元クロス表の情報をさらに一般的にLLMにより表わすと,

$$E_{ij} = \mu + \mu_{A(i)} + \mu_{B(j)} + \mu_{AB(ij)} \quad (2)$$

となる。このときの制約条件は, $\sum_i \mu_{A(i)} = \sum_j \mu_{B(j)} = \sum_i \sum_j \mu_{AB(ij)} = 0$ である。(1)はいわゆる「相互独立モデル」であり(2)は項目A, Bの交互作用まで考慮した「飽和モデル」である。2元クロス表の場合には仮説の与え方によりあわせて5通りのLLMがある。次の表1はこれを要約したものである。

(表1) 2元クロス表の場合.

	(a) モデルの構造	(b) 対数線形モデル	(c) パラメータ数	(d) d.f.	(e) 帰無仮説: H_0	(f) 略記法
M_1	$p_{ij} = \frac{1}{rc}, F_{ij} = \frac{n}{rc}$	$\log F_{ij} = \mu$	1	$rc-1$	$\mu_{A(i)}=0$ $\mu_{B(j)}=0$ $\mu_{AB(ij)}=0$	$\{\emptyset\}$ (等確率モデル)
M_2	$p_{ij} = \frac{p_{i.}}{c}, F_{ij} = \frac{f_{i.}}{c}$	$\log F_{ij} = \mu + \mu_{A(i)}$	$1+(r-1)$	$r(c-1)$	$\mu_{B(j)}=0$ $\mu_{AB(ij)}=0$	$\{A\}$
M_3	$p_{ij} = \frac{p_{.j}}{r}, F_{ij} = \frac{f_{.j}}{r}$	$\log F_{ij} = \mu + \mu_{B(j)}$	$1+(c-1)$	$c(r-1)$	$\mu_{A(i)}=0$ $\mu_{AB(ij)}=0$	$\{B\}$
M_4	$p_{ij} = p_{i.} p_{.j}, F_{ij} = \frac{f_{i.} f_{.j}}{n}$	$\log F_{ij} = \mu + \mu_{A(i)} + \mu_{B(j)}$	$1+(r-1) + (c-1) = r+c-1$	$rc-(r+c-1) = (r-1)(c-1)$	$\mu_{AB(ij)}=0$	$\{A, B\}$ (相互独立モデル)
M_5	$p_{ij} = \frac{p_{ij}}{n}, F_{ij} = f_{ij}$	$\log F_{ij} = \mu + \mu_{A(i)} + \mu_{B(j)} + \mu_{AB(ij)}$	$1+(r-1) + (c-1) + (r-1)(c-1) = rc$	0	———	$\{A, B, AB\}$ (飽和モデル)

このようなモデル化を行うと F_{ij} の (最尤) 推定値 $\hat{F}_{ij}$ を求める方法が必要となる。たとえば (1) の場合は,

$$\hat{F}_{ij} = (f_{i\cdot}/n) \cdot (f_{\cdot j}/n) \cdot n = f_{i\cdot} \cdot f_{\cdot j} / n \quad (f_{i\cdot}, f_{\cdot j} : \text{周辺度数})$$

で与えられるが, モデルによ, ては上のように直接 $\hat{F}_{ij}$ を求めることが不可能なケースが出てくる ([2] 参照)。このため F_{ij} の推定法がいろいろ提案されてくるが, ここでは Iterative Proportional Fitting を使う。この方式によ, て推定した $\hat{F}_{ij}$ を使, て,

$$\chi_L^2 = 2 \sum_i \sum_j f_{ij} \log f_{ij} / \hat{F}_{ij} \quad (\text{尤度比 } \chi^2 \text{ 統計量}) \quad (3)$$

あるいは,

$$\chi_G^2 = \sum_i \sum_j (f_{ij} - \hat{F}_{ij})^2 / \hat{F}_{ij} \quad (\text{ピアソンの } \chi^2) \quad (4)$$

によりモデル (仮説) への $\{f_{ij}\}$ の適合性をみる。ここで χ_L^2 , χ_G^2 はいずれも仮説の下で漸近的に χ^2 分布に従う。そのときの自由度 d.f. は,

$$\text{d.f.} = [\text{セルの総数}] - [\text{あてはめるモデルのパラメータ数}]$$

となる。

2. χ_L^2 の分解性とモデルの一般的記述. 11 表 1 のモデル

M_i に対する χ_L^2 を改めて $\chi_L^2 \{M_i | (\text{略記法})\}$ で表す。さらに各項の関連の強さ (寄与度) を C_j ($j = A, B, AB$) で表す。たとえば項 A は,

$$C_A = \chi_L^2 \{M_2 | A\} - \chi_L^2 \{M_1 | \Phi\}$$

項 B, AB についてはそれぞれ,

$$C_B = \chi_L^2 \{M_3 | B\} - \chi_L^2 \{M_1 | \phi\}$$

$$C_{AB} = \chi_L^2 \{M_5 | A, B, AB\} - \chi_L^2 \{M_1 | \phi\}$$

またモデル $M_1 = \{\phi\}$ に対しては $C_0 = \chi_L^2 \{M_1 | \phi\}$ とおく.

こゝとま明らかになり,

$$\chi_L^2 \{M_5 | A, B, AB\} = C_0 + C_A + C_B + C_{AB} (\equiv 0) \quad (5)$$

となる. $|C_j|$ は項 j の寄与の程度を示す量であり, うち最も漸近的に χ^2 分布に従う自由度はそれぞれ利用したモデルの間の自由度の差になる. ところで χ_L^2 に対して赤池の情報量規準 (AIC) を導入するとモデルの選択が容易にできることは知られている ([5], [8]). モデル M_i に対する AIC は,

$$AIC \{M_i\} = \chi_L^2 \{M_i\} - 2(d.f.) \quad (6)$$

であるから式 (5) にこれを適用してやると, C_j の情報量が考えられる. たとえば, A に対しては,

$$I(C_A) = AIC \{M_2\} - AIC \{M_1\} \quad (7)$$

となり他の項 B, AB, ϕ についても同様である. したがって (5) から,

$$AIC \{M_5\} = I(C_0) + I(C_A) + I(C_B) + I(C_{AB}) \quad (8)$$

が成り立つ. こゝ $I(C_j)$ を項 j の 項別情報量 と名づける. これを利用すると各項のモデルへの寄与の程度を知ることができ. つまり $I(C_j)$ は, モデル $M_1 = \{\phi\}$ が持つ全情報 (こゝとま

χ^2 が最大である)を各項がどのように分担したかその寄与の
大まかさと考えてよい。こゝで簡単な例をみる。表2は2元ク
ロス表の例であるが、こゝに5通りのLLMを適用すると表3
の結果を得る。表3をもとに C_j および $I(C_j)$ を求め整理すると
表4となる。こゝからこの例では項目A, Bの単独効果が大半
を占め交互作用ABの寄与は小さい、つまり独立モデルに近
い、ことがわかる。

(表2) 2元クロス表の例(「日本人の国民性」調査から)

B (年齢)	1	2	3	4	5	$f_{i\cdot}$
A (性別)						
1	1096	1051	806	613	645	4211
2	635	706	564	384	380	2669
$f_{\cdot j}$	1731	1757	1370	997	1025	6880

(表3)

モデル	d.f.	χ^2_G	χ^2_L	$P\{\chi^2 > \chi^2_L\}$	AIC
M_1	9	763.69	753.19	0	735.19
M_2	8	401.15	404.63	0	388.63
M_3	5	354.37	357.80	0	347.80
M_4	4	9.23	9.24	0.055	1.24
M_5	0	0	0	—	—

(表4)

項目 j	C_j	d.f.	$I(C_j)$
{中}	753.19	9	735.19
A	-348.56	1	-346.56
B	-395.39	4	-387.39
AB	-9.24	4	-1.24

$\left. \begin{array}{l} -346.56 \\ -387.39 \\ -1.24 \end{array} \right\} (-735.19)$

χ^2 でパラメータ α, β, γ を導入してモデルを $M_{\alpha\beta\gamma}$ とかくと,

$$AIC\{M_{\alpha\beta\gamma}\} = I(C_0) + \alpha I(C_A) + \beta I(C_B) + \alpha\beta\gamma I(C_{AB}) \quad (9)$$

あるいは,

$$\chi^2\{M_{\alpha\beta\gamma}\} = C_0 + \alpha \cdot C_A + \beta C_B + \alpha\beta\gamma C_{AB} \quad (9)'$$

により表1のモデルを一括表現できる。たとえば $\alpha=\beta=\gamma=1$ のとき $M_{111}=M_5$, $\alpha=1, \beta=\gamma=0$ のとき $M_{100}=M_2$ となる。これは項別情報量 $I(C_j)$ を知れば式(9)からすべてのモデルの AIC が誘導できることを示している。 $I(C_j)$ (または C_j) を求めるためには項目数 (クロス表の次元数) を d として 2^d 通りのモデルを考えればよい。 $d=2$ では $2^2=4$ 通り、つまり M_1, M_2, M_3, M_4 を知れば M_5 は (9), (9)' から求められる。一般に d 元のクロス表では 2^d 通りの LLM について χ^2, AIC を求めておけば残りのすべてのモデルの $C_j, I(C_j)$ がえられる。以上の関係を利用すると次のモデル選択の方式がえられる。

3. モデル選択の方法 χ^2 のもつ分解性を利用してモデル選択を行う方式は既に多くの研究者により提案されている。しかしここでは、前述の項別情報量の性質を利用して客観的に最適モデルの候補を選ぶ1つの方式を提案する。その手順は次の通りである。

手順1° d 元クロス表に対し 2^d 個の LLM を計算する。そして項別情報量 $I(C_j)$ のリストを作る。ここから必要となる、

項 j の集合を K とする。さらに 1 項目 (主効果) 項の集合を K_0 , 2 項目以上 α 組み合わせ項 (交互作用項) の集合を K_I とする。したがって $K = K_I \cup K_0 \cup \{j_0\}$ (j_0 は等確率モデルに対する項、つまり $j_0 = 0$ としてよい)。

手順 2° $I(C_0)$, および K_0 内から $I(C_j) < 0$ ($j \neq 0$) となる項を選んで、これら α 項から構成される LLM を初期モデル $M^{(0)}$ とする。

手順 3° $I(C_j) < 0$ となる交互作用項を K_I 内から求めそれを含む LLM を構成するために必要な項目をすべて求める (たとえば $I(C_{AB}) < 0$ のとき A, B 中 α 3 つの項が必要)。それら α 項目が $M^{(0)}$ 内にすでに含まれていれば $M^{(0)}$ にその交互作用項を加え $M^{(0)}$ を $M^{(1)}$ に更新する。以下これを反復 ($M^{(i)} \rightarrow M^{(i+1)}$)。

そして α と α 項の組み合わせを $K^{(i)}$ とかく。

手順 4° $M^{(i)}$ に採用されてはいない $I(C_j)$ のうち負のもの α を K_I の中から 1 つ選ぶそれが k であるとする。 $K^{(i)} \cup \{k\}$ から構成されるモデルが LLM となるために必要な最少限 α 項を K_I 内から選ぶ。そして k にこれを追加して与えるモデルを $M_+^{(i)}$ とする。

手順 5°
$$\begin{cases} AIC(M_+^{(i)}) \geq AIC(M^{(i)}) \text{ のとき, } M^{(i)} \rightarrow M^{(i+1)}, \\ AIC(M_+^{(i)}) < AIC(M^{(i)}) \text{ のとき, } M_+^{(i)} \rightarrow M^{(i+1)}, \end{cases}$$

とする。 $M^{(i+1)}$ を構成する項目 $K^{(i+1)}$ に変化がみられなくな

ったとき収束と判定しそのモデルを解として採用する。

なお、手順4°で k を1つではなく複数個の項からなる項の部分集合 $K_S \subset K_I$ とすると最小AICを持つモデルが得られる。この場合計算すべきLLMの総数は 2^M ($M=2^d-1$) 通りとなるが実際に各種のデータで実験するとこの上限まで到達するケースはまれで、かなり早い段階で解に収束する。そこで、手順1°~5°に従ってモデル選択を行う方式を逐次選択方式、手順4°を上述のように変更した方式を組み合わせ的選択方式と仮称する。次にこの2つの方式によるモデル選択の例をみる。数値は Goodman が引用した Ries and Smith の例を使う。これは表5のような $(3 \times 2 \times 2 \times 2)$ 次の4元クロス表である。内容は洗剤のブラインド・テストの結果で、各項目は表に示す通りである。

(表5) Goodman の例

Water softness	Brand preference	Previous user of M		Previous nonuser of M	
		High temperature	Low temperature	High temperature	Low temperature
Soft	X	19	57	29	63
	M	29	49	27	53
Medium	X	23	47	33	66
	M	47	55	23	50
Hard	X	24	37	42	68
	M	43	52	30	42

A: Water Softness

B: Previous users

C: Temperature

D: Brand Preference

α) 総当り法による場合 初めに総当り法により4元の場合のモデルの総数167通りについてすべて計算を行う。表6は結果の要約である。 χ^2 にもとづくAICの大きさで上から10個のモデルを挙げてある。これを記号 M_i ($i=1, 2, \dots, 10$) で略記し

て観察すると、次 $\alpha = \beta$ がわかる。

- i) 1項目(1因子項)として意味があるものは B, C, D である。
- ii) 次に2因子項(1次交互作用項)として BC, BD が寄与が高い。結局以上 α 項を含む $M_1 = \{B, C, D, BC, BD\}$ がデータを説明する中心的なモデルである。
- iii) さらに続いて現われる $M_2, M_3, \dots$ のいずれも M_1 を核としてそれぞれに他の因子項が出入りするがいずれも AIC の改良にそれほど大きく寄与しない。つまり M_1 にくらべてそれほど情報を高める項は少ないとみてよい。
- iv) Goodman流の逐次選択方式によると $M_4 = \{A, B, C, D, BC, BD, AD\}$ が選ばれる。しかし表5の度数表から明らかのように項目 A の水準ごとく度数の差はほとんどない。つまり A の寄与は少ない、にもかかわらず A が取り込まれるのは、Goodmanの方式が独立モデル $\{A, B, C, D\}$ を基盤に探索を行うことに帰因する。したがって単独効果の強い D の影響を受けて交互作用としての効果の少ない AD までモデル内に取り込むことになる。
- v) BrownのScreening-effect方式によると M_6 が選ばれる。彼の方式によると有意水準5%で M_1, M_4, M_6, M_{10} の4つのモデルが最終候補として残り、項の少ないモデルが「節約の原理」からみて望ましいから M_6 が良い、としてゐる。

結局、 AIC を利用すると総当たり法のとんでもなく客観的に、ほぼ

妥当とみられるモデルを選出することが出来る。

6) 逐次選択方式による場合. 次に Σ で提案の逐次選択方式による結果をみる。まず $2^4=16$ 通りの LMM について計算を行い表7を得る。 Σ をもちに $I(C_g)$ の表を作り表8を得る。さらに計算をすすめ解を得るまでの途中経過を一覧にしたものが表9である。ステップの欄で○印をつけた番号の部分が逐次選択方式の途中経過であり1~12まですべてを行う場合が組み合わせ的方式による場合に相当する。また各ステップで取り込んだ項の組み合わせが与るの欄に示してある。判定欄の○印は吟味の結果合格と判断されて採用されたモデルで他は棄却される。残った2つをくくってステップ5の結果を採用し(というよりは前に現れた候補より Σ がよいので残った) Σ を解とする。 Σ の解は明らかに総当り法で求めた最適モデル M_1 に相当する。 Σ で注意を要する Σ は実用上は1つのモデルを選択する Σ が主目的ではない、ということである。むしろ意味のある説明力の高い項から構成される基本的なモデルをまず知り、そのモデルの近傍にあるいくつかの類似のモデルを調べる Σ が要求される。 Σ の例ではまず $M_1 = \{B, C, D, BC, BD\}$ を知り次に Σ を核として個別情報量の表とにらみあわせながら他のモデルを探索すればよい。総当り法の表6をみても M_1 を中心にして Σ に高次の

交互作用項が出入りしてゐる＝とわかる。なおこの例では
逐次選択方式も組み合わせ的方式も同じ解に到達したが平順
に指摘のように一般にはそうなるとは限らない。さらに計算
(表6) Goodman の例 (総当り法によるとき)

MODEL	DEGREES OF FREEDOM	LIKELIHOOD RATIO CHISQUARE (PROBABILITY)	AIC BASED ON LIKELIHOOD RATIO STATISTIC
M1 B, C, D, BC, BD	18	18.487071 0.4240	-17.512929
M2 B, C, D, BC, BD, CD, BCD	16	15.007456 0.5241	-16.992544
M3 B, C, D, BC, BD, CD	17	17.795417 0.4019	-16.204583
M4 A, B, C, D, AD, BC, BD	14	11.886487 0.6154	-16.113513
M5 A, B, C, D, AD, BC, BD, CD, BCD	12	8.406872 0.7526	-15.593128
M6 B, C, D, BD	19	22.848672 0.2441	-15.151328
M7 A, B, C, D, AD, BC, BD, CD	13	11.194833 0.5945	-14.805167
M8 B, C, D, BC, CD	18	21.595569 0.2504	-14.404431
M9 A, B, C, D, BD, CD	16	17.985591 0.3247	-14.014409
M10 A, B, C, D, AD, BC	15	16.248088 0.3658	-13.751912

(表7) Goodman の例 (16通りのLLMの計算結果)

MODEL SEQ NUM	モデル	DEGREES OF FREEDOM	LIKELIHOOD RATIO CHISQUARE (PROBABILITY)	AIC BASED ON LIKELIHOOD RATIO STATISTIC
1	中 (等確率モデル)	23	118.626936 0.0000	72.626936
2	A	21	118.125456 0.0000	76.125456
3	B	22	118.563443 0.0000	74.563443
4	C	22	116.705690 0.0000	72.705690
5	D	22	45.414876 0.0024	1.414876
6	A, B, AB	18	117.666664 0.0000	81.666664
7	A, C, AC	18	115.129108 0.0000	79.129108
8	A, D, AD	18	38.814292 0.0030	2.814292
9	B, C, BC	20	96.060731 0.0000	56.060731
10	B, D, BD	20	40.989782 0.0037	0.989782
11	C, D, CD	20	42.240527 0.0026	2.240527
12	A, B, C, AB, AC, BC, ABC	12	88.868779 0.0000	64.868779
13	A, B, D, AB, AD, BD, ABD	12	33.923803 0.0007	9.923803
14	A, C, D, AC, AD, CD, ACD	12	32.889115 0.0010	8.889115
15	B, C, D, BC, BD, CD, BCD	16	15.007456 0.5241	-16.992544
16	A, B, C, D, ... (総和モデル)	0	---	---

効率の差を比較すると、この例では、逐次みるいは組み合わせ的方式はCPU時間で総当り法の約1/10に節約できた。5元の場合にはLLMの総数は数千通りとなるが、我々の方式では $2^5 = 32$ 通りのLLMから項別情報量を求め逐次選択を行えばよいのでかなり節約となる。このGoodmanの例の他に、

(表8) 項別情報量の表

ADDITIONAL TERM : J	DEGREES OF FREEDOM	EFFECT OF AIC: $I(C_j)$	
0	ϕ	23	72.6269
1	A	2	3.4985
2	B	1	1.9365
3	C	1	0.0788
4	D	1	-71.2121
12	AB	2	3.6047
13	AC	2	2.9249
14	AD	2	-2.0991
23	BC	1	-18.5815
24	BD	1	-2.3616
34	CD	1	0.7469
123	ABC	2	-1.2201
124	ABD	2	3.9299
134	ACD	2	2.3243
234	BCD	1	-0.2265
1234	ABCD	2	4.0294

何種かのケースについて同

様の実験を行、たが、いずれも適当な答が得られた。

とくに、実際の調査データに対して適用すると、考えられている程、複雑でない、つまりそれほど高次の交互作用

用項までを必要としない比較的単純なモデルで説明できると

いう傾向がみられる。

(表9)

ステップ	モデル	取り入れた項	判定	df	χ^2_L	AIC
①	D	D		22	45.414876	1.414876
②	A, D, AD	AD		18	38.814292	2.814292
③	B, C, D, BC	BC	○	19	22.848672	-15.151328
4	A, B, C, D, AD, BC	AD		15	16.248088	-13.751912
⑤	B, C, D, BC, BD	BD	○	18	18.487071	-17.512929
6	A, B, C, D, AD, BC, BD	AD		14	11.886487	-16.113513
⑦	A, B, C, D, AB, AC, BC, BD, ABC	ABC		10	11.295118	-8.704882
⑧	B, C, D, BC, BD, CD, BCD	BCD		16	15.007456	-16.992544
9	A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, ABC	AD, ABC		8	5.196014	-10.803986
10	A, B, C, D, AD, BC, BD, CD, BCD	AD, BCD		12	8.406872	-15.593128
11	A, B, C, D, AB, AC, BC, BD, CD, ABC, BCD	ABC, BCD		8	7.815503	-8.184497
12	A, B, C, D, AB, AC, AD, BC, BD, CD, ABC, BCD	AD, ABC, BCD		6	1.716399	-10.283601
(解)	B, C, D, BC, BD			18	18.487071	-17.512929

4. 坂元モデルとの関連 AICを利用したモデル評価の方式として坂元らのアプローチがある[4]。そりに取り上げられた例を用いて坂元モデルとLLMの関連を調べた。データは次の項目、水準からなる(2×2×4×4)の4元クロス表である。

A: (質問)「苦勞は男に多いか女に多いか?」, A_1 =男, A_2 =女に

B: (性別) · B_1 =男, B_2 =女

C: (年令) C_1 =20才代, C_2 =30才代, C_3 =40才代, C_4 =50才以上

D: (地域) D_1 =大都市, D_2 =20万以下, D_3 =20万以下, D_4 =町村

これは読教研で定期的に実施されている「日本人の国民性」のデータの一部分である。[4]に掲載のデータにもとづいて、まず総当り法で16通りのLLMを求めAICの値の小さいほうから10個のモデルを選ぶと表10となる。

(表10)

	モ デ ル	AIC
M_1	A, B, C, D, AB, CD	-56.642
M_2	A, B, C, D, AB, CD, AD	-56.486
M_3	A, B, C, D, AB, CD, AC	-55.733
M_4	A, B, C, D, BD, AB, CD, AD	-55.423
M_5	A, B, C, D, AB, CD, BD	-55.064
M_6	A, B, C, D, AB, CD, AC, AD	-54.805
M_7	A, B, C, D, AB, CD, AC, BD	-54.277
M_8	A, B, C, D, AB, CD, AC, BD, AD	-53.732
M_9	A, B, C, D, AB, CD, BC	-50.900
M_{10}	A, B, C, D, AB, CD, BC, AD	-50.722

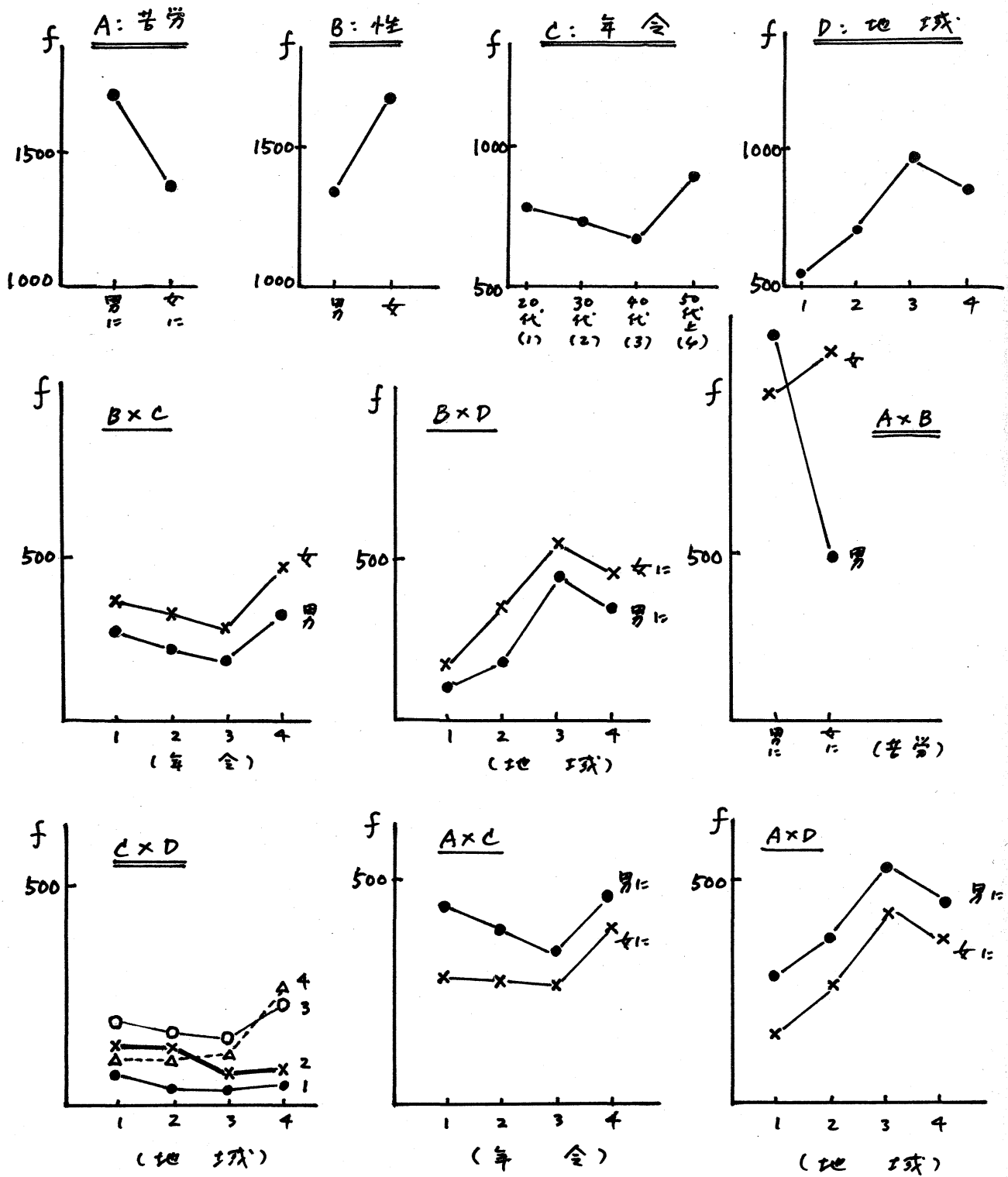
これをみると、AICの大きいではいず、このモデルも大差ない。しかも M_1 を除く残りのモデルに、 M_1 がすべて含まれている。同じデータを我々の逐次選択法により計算すると反復回数

が1回で M_1 に到達する。結局は α クロス表を特徴付ける基本的なモデルは、 $(性) + (年令) + (地域) + (賃肉) + (性 \times 賃肉) + (地域 \times 年令)$ あるいは $Pr\{性, 賃肉\} \cdot Pr\{年令, 地域\}$ と表わせる独立モデルの一種であることが予想される。「性別」と「賃肉」、「年令」と「地域」の間にそれぞれ交互作用があること、この α であるから、これを観察するために図を書いてみる[図1]。図中で縦軸は各水準 α の度数である。最上段の4図は1因子効果(項目ごと α 単独効果)であるが、これをみると α 項目も水準間の差が認められる。したがって α 4項目ともモデルに含まれておかしくない。次に、中下段の2因子項(1次交互作用項)のクロス情報を観察すると確かに $A \times B, C \times D$ で強い交互作用がみられる。それに続いて $A \times C, A \times D$ あたりは必ずかに交絡現象があるかほとんど問題になるほどの差ではない。つまりモデルに積極的に取り入れる必要はないと思われる。こうしてみると、選んだモデル $M_1 = \{A, B, C, D, AB, CD\}$ はクロス表を説明するのに十分な情報を与えているとみてよい。

いま α を実用に見地から解釈してみると次の知見がえられる。

i) $A \times B$ (「賃肉」 $\times$ 「性別」) の情報から、賃肉に対する回答傾向が男、女によっても全く異なることがわかる。

ii) $C \times D$ (「年令」 $\times$ 「地域」) の情報から、



(图1) 国民性因子分布

a) 20代では地域差による意見の違いは少ない。

b) 都市アロウ (地域1-3) においては20代→40代の頃に、苦勞が多…と感じて…るが50代以上では逆に減少する、

c) しかし、地域4(町村)では、年令と苦勞の関係には順序性があり、年令が高まると苦勞も多…と感じて…る。

つまり50代以上では地域差と傾向の両方に交絡化現象があることを示している。この例では $A \times B$ よりも $C \times D$ のやや複雑な構造の意見傾向を抽出できたことに特徴がある。しかも、数多くの項の組み合わせの中からその水準間の終みをよく反映するような項を客観的に選べたことに意味がある(3因子項以上の組み合わせ項が $M_1 \sim M_{10}$ 中に現われて…ない…ことに注目する必要がある)。

さて次に、項元の得た結果とLLMの関連を概述する。項元の結果の1部を示すと表11の(Ⅱ)欄となる。こゝでの記法は項元のものを用了。[4]では表11の7つのモデルを検討し、このうち M_4^* を選んでいる。こゝでこの方式をLLMで表わすと(Ⅱ)欄になる。この欄で (BC) , (CD) , (BCD) などの記号は文字の示す項をプールして新しいカテゴリを作つそれを1項目として扱うことを意味している。たとえば C が4水準、 D が2水準のとき、つまり、 $C = (C_1, C_2, C_3, C_4)$, $D = (D_1, D_2)$ のとき、 (CD) とは $(C_i D_j)$ ($i=1, \dots, 4; j=1, 2$) の $2 \times 4 = 8$ 水準の新しい1項目

を考えることに相当する。つまり項元モデルは多次元クロス
の情報をセルの数と同数にあてはめて3元クロス以下のクロス
表に縮約した上でLLMを考えることと同等である。さらに
調べると、(II)欄のモデルは実は(I)欄のようなLLMと同等で
ある。実際、(I)~(IV)の各モデルの χ^2 , AICは完全に一致する。
そして項元の提案したモデルは次のように要約できる。

- (1) 多次元(4元以上)のクロス情報を3元以下のクロス表に
縮約して分析する方式である,
- (2) 縮約により得られた3項目をX, Y, Zと書くと項元モデル
では, 16通りのLLMのうち $\{X, Y, Z, XY, YZ\}$ の形に表記で
きるモデルに相当してゐる(表11の(II)欄の表現を参照)。
- (3) 2元に縮約されたとき, それをX, Yとかくと5通りのLLM
のうち $\{X, Y\}$ すなわち独立モデルに相当する。

(表11) LLMと項元モデルの対比

	(I) 対教線形モデル	(II) (I)と同等のモデル	(III) (I), (II)と同等の 項元モデル
M_1^*	A, B, C, D, AB, AC, BC, BD, CD, ABC, BCD	A, (BC), D, A·(BC), (BC)·D	$p(u_1, u_2, u_3) \cdot p(u_2, u_3, u_4) / p(u_2, u_3)$
M_2^*	A, B, C, D, AB, AD, BC, BD, ABD, BCD	A, (BD), C, A·(BD), (BD)·C	$p(u_1, u_2, u_4) \cdot p(u_2, u_3, u_4) / p(u_2, u_4)$
M_3^*	A, B, C, D, AC, AD, BC, BD, CD, ACD, BCD	A, (CD), B, A·(CD), (CD)·B	$p(u_1, u_3, u_4) \cdot p(u_2, u_3, u_4) / p(u_3, u_4)$
M_4^*	A, B, C, D, AB, BC, BD, CP, BCD	A, B, (CD), AB, B·(CD)	$p(u_1, u_2) \cdot p(u_2, u_3, u_4) / p(u_2)$
M_5^*	A, B, C, D, AC, BC, BD, CD, BCD	A, C, (BD), AC, C·(BD)	$p(u_1, u_2) \cdot p(u_2, u_3, u_4) / p(u_3)$
M_6^*	A, B, C, D, AD, BC, BD, CD, BCD	A, D, (BC), AD, D·(BC)	$p(u_1, u_4) \cdot p(u_2, u_3, u_4) / p(u_4)$
M_7^*	A, B, C, D, BC, BD, CD, BCD	A, (BCD)	$p(u_1) \cdot p(u_2, u_3, u_4)$

(注) (III) 欄の添字は, $u_1 = A$, $u_2 = B$, $u_3 = C$, $u_4 = D$ と対応する。

以上からみて項元モデルによるとより高次の項を含むモデルとなる。表11にみるように2次の交互作用項まで取り入れる。また吟味対象となるモデルは、いわゆる独立あるいは条件付き独立モデルである。また項目の選択の順序あるいは指定に依存する α で、ある項目を特定化した上で(項元 α のpredictor)モデルの評価を行う。例のデータではA(値内)に対して、残りのB, C, Dの項目がどう働きかけるか、と考える α で、表の(Ⅲ)欄の形のモデルをすべて吟味するわけではない(表記法は線形にのって対称でない)。つまりAからみて高次の項目を探索する α でC $\times$ Dのような情報を取り入れることがない。

まとめ X_L^2 の分解性をAICのそれにおき換え、また項別情報量を考えることで、LLMにおけるモデル選択を容易にする1つの方式を提案した。従来の方式が有意水準設定に依存する検定方式であるため結果があまりにばらばらであるが、この方式ではかなり客観的に問題を扱うことが出来る。実用的見地からは1つのモデルを選ぶことよりも、クロス表の持つ項目間・代表的な関連性のしくみを観察することによる解析目的がある α で、ここで提案した方式で十分実用に耐えると思われる。実際にいくつかの適用例でほぼ納得のゆく答えをえてゐる。また総当り法の結果と、逐次あるいは組み合せ的方式のそれとが一致することは最大の利点である。

今後の問題として、水準 α の与え方、セル内 α 度数 α の大きさ、標本数 n などがどのように影響するか調べることも、 χ^2 の近似 α の程度が結果におよぼす影響を確かめる必要がある。

《参考文献》

- [1] Brown, M.B. (1976): Screening Effects in Multidimensional Contingency Tables, Appl. Statist. Vol. 25, No. 1, 37-46.
- [2] Fienberg, S.E. (1977): The Analysis of Cross-Classified Categorical Data, MIT Press.
- [3] Goodman, L.A. (1971): The Analysis of Multidimensional Contingency Tables, Technometrics, Vol. 13, No. 1, 33-61.
- [4] Sakamoto, Y., Akaike, H. (1978): Analysis of Cross-Classified Data by AIC, Ann. Inst. Statist. Math., vol. 30, No. 1, part B.
- [5] 大隅 昇 (1977): 対数線形モデルによる多次元分割表の評価
日本大学理工学部学術講演会論文集, 891-894
- [6] 柳澤 幸雄, 大隅 昇 (1978): 同上 (No. 2),
日本大学理工学部学術講演会論文集, 664-666
- [7] 水野 鋭司, 大隅 昇 (1976): 多重クロス集計 α -評価方法について
日本行動計量学会第5回総会
- [8] 吉澤 正 (1976): 入学選抜試験における選抜科目の解析,
山梨大学工学部研究報告, vol. 27, 107-115.