

Asymptotic convergence for phase field models with obstacles

千葉大自然科学 白水 淳 (Jun Shirohzu)
 長岡高専一般教育科 佐藤 直紀 (Naoki Sato)

0. Introduction

次の偏微分方程式のシステム $(P_{\nu\kappa})$ を考える:

$$(\rho(u) + \lambda(w))_t - \Delta u = f(t, x) \quad \text{in } Q := (0, T) \times \Omega, \quad (0.1)$$

$$\nu w_t - \kappa \Delta w + \beta(w) + g(w) \ni \lambda'(w)u \quad \text{in } Q, \quad (0.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + n_0 u = h(t, x) \quad \text{on } \Sigma := (0, T) \times \Gamma, \quad (0.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Sigma, \quad (0.4)$$

$$u(0, \cdot) = u_0, \quad w(0, \cdot) = w_0 \quad \text{in } \Omega. \quad (0.5)$$

ここで、 Ω は $\mathbf{R}^N$ ($1 \leq N \leq 3$) の有界な領域で、その境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は smooth とする。次を仮定する。 $0 < T < +\infty$; ν と κ は非負なパラメーター; n_0 は正の定数; ρ と β は maximal monotone graphs in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$; g と λ は滑らかな関数; f, h, u_0, w_0 は与えられた関数とする。

このシステムは、obstacle を持つ phase-field model と呼ばれ、固体-液体の相転移現象を記述するモデルである。 $\theta := \rho(u)$ は温度、 w は non-conserved order parameter を表す。すなわち w は相を表す変数で、obstacles “ $w \in D(\beta)$ ” を持つ。また、 κ と ν はそれぞれ内部エネルギーと w の時間緩衝を表す。このシステム $(P_{\nu\kappa})$ は Caginalp [2] および Penrose-Fife [12] によるものである。

ここで興味深いのは、 $\nu \geq 0, \kappa \geq 0, \nu + \kappa > 0, \beta$ の定義域 $D(\beta)$ が $\mathbf{R}$ で有界、かつ g が $\overline{D(\beta)}$ で non-monotone の場合である。例えば、 $\beta = \partial I_{[-1,1]}$ または $\partial I_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ かつ $g(w) = w^3 - w$ 。この形の phase-field model は Blowey-Elliott [1], Kenmochi-Nieźgódka [8,9], Kenmochi [6], Horn-Sprekels-Zheng [5], Laurençot [10,11], Colli-Sprekels [4] 等により、研究されている。この論文では、 λ が $\overline{D(\beta)}$ で convex かつ $\lambda''(w)u \leq 0$ for all $w \in \overline{D(\beta)}$ and $u \in D(\rho)$ を仮定して、つぎを示す:

- (i) $\nu > 0$ に対して, 問題 $(P_{\nu 0})$ は一意解を持ち, その解は問題 $(P_{\nu \kappa})$ の解を $\kappa \searrow 0$ としたときの極限となる,
- (ii) $\rho : \mathbf{R}$ で bi-Lipschitz 連続, かつ $\lambda(w) = w$ のとき, $\kappa > 0$ に対して, 問題 $(P_{0\kappa})$ は一意解を持ち, その解は問題 $(P_{\nu \kappa})$ の解を $\nu \searrow 0$ としたときの極限となる.

Notation. (実) Banach または Hilbert 空間 X にたいして $|\cdot|_X$ を X のノルム, X^* を X の dual 空間とする.

H を $L^2(\Omega)$, V を $H^1(\Omega)$ とし, ノルムを次で定義する:

$$|z|_V := \{|\nabla z|_{L^2(\Omega)}^2 + n_0|z|_{L^2(\Gamma)}^2\}^{1/2}.$$

また, $(\cdot, \cdot)$ と $(\cdot, \cdot)_\Gamma$ をそれぞれ H と $L^2(\Gamma)$ の内積とし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を V^* と V の duality pairing とする.

$$a(v, z) := \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla z dx \quad \text{for all } v, z \in V$$

とし, F_0 を V から V^* へのオペレーターで, 次のように定義する:

$$\langle F_0 v, z \rangle = a(v, z) \quad \text{for all } v, z \in V;$$

特に, もし $F_0 v \in H$ ならば, $v \in H^2(\Omega)$ かつ

$$F_0 v = -\Delta v \text{ in } \Omega \quad \text{with} \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma.$$

一方, F を V から V^* への duality mapping で, 次のように定義する:

$$\langle Fv, z \rangle = a(v, z) + n_0(v, z)_\Gamma \quad \text{for all } v, z \in V;$$

形式的に

$$Fv = -\Delta v \text{ in } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial n} + n_0 v = 0 \text{ on } \Gamma.$$

と表される.

$C_w([0, T]; X)$ を $[0, T]$ から X への弱連続関数の空間とする. “ $v_n \rightarrow v$ in $C_w([0, T]; X)$ (as $n \rightarrow +\infty$)” を任意の $z^* \in X^*$ に対して, $\langle z^*, v_n(t) - v(t) \rangle_X$ が 0 に $[0, T]$ 上で一様に収束するものとする. ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ は X^* と X との duality pairing を表す.

簡単のため “ $'$ ” で時間微分 $\frac{d}{dt}$ を表す.

1. Weak formulation for $(P_{\nu \kappa})$

問題 $(P_{\nu \kappa})$ を次の仮定 (A1)-(A5) のもとで考える:

- (A1) ρ : a maximal monotone graph in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, ρ の定義域 $D(\rho)$ 値域 $R(\rho)$ は $\mathbf{R}$ で開, $D(\rho)$ から $R(\rho)$ への関数とみて locally bi-Lipschitz 連続な関数.
- (A2) β : a maximal monotone graph in $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $-\infty < \sigma_* < \sigma^* < +\infty$ なる定数 σ_*, σ^* にたいして $\overline{D(\beta)} = [\sigma_*, \sigma^*]$.
- (A3) λ とその導関数 λ' は $[\sigma_*, \sigma^*]$ 上 Lipschitz 連続な関数で λ : convex on $[\sigma_*, \sigma^*]$ such that $\lambda''(w)u \leq 0$ for a.e. $w \in [\sigma_*, \sigma^*]$ and all $u \in D(\rho)$.
- (A4) g は $[\sigma_*, \sigma^*]$ 上 Lipschitz 連続な関数.
- (A5) n_0 : 正の定数.

(A3) の仮定 “ $\lambda''(w)u \leq 0$ for a.e. $w \in [\sigma_*, \sigma^*]$ and all $u \in D(\rho)$ ” は λ が $[\sigma_*, \sigma^*]$ で線形でないなら, $D(\rho) \subset (-\infty, 0]$ を表している.

次に, 与えられた関数 $f \in L^2(0, T; H)$, $h \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$, $u_0, w_0 \in V$ にたいして, 問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解の定義を与える.

Definition 1.1. 2つの関数 $u := u_{\nu\kappa} : [0, T] \rightarrow V$ と $w := w_{\nu\kappa} : [0, T] \rightarrow V$ の組が次の条件 $(w1)_{\nu\kappa}$ – $(w3)_{\nu\kappa}$ を満たすとき, 問題 $(P_{\nu\kappa})$ with $\nu > 0$ and $\kappa > 0$ の解という:

$$(w1)_{\nu\kappa} \quad u \in L^2(0, T; V), \quad \rho(u) \in L^\infty(0, T; H) \cap W^{1,2}(0, T; V^*), \\ w \in L^\infty(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; H) \text{ and } u(0) = u_0, w(0) = w_0.$$

$$(w2)_{\nu\kappa} \quad \text{任意の } z \in V \text{ と a.e. } t \in [0, T] \text{ にたいして,}$$

$$\langle \rho(u)'(t) + \lambda(w)'(t), z \rangle + a(u(t), z) + (n_0 u(t) - h(t), z)_\Gamma = (f(t), z). \quad (1.1)$$

$$(w3)_{\nu\kappa} \quad \xi \in L^2(0, T; H) \text{ が存在して, } \xi \in \beta(w) \text{ a.e. on } Q \text{ かつ}$$

$$\nu(w'(t), z) + \kappa a(w(t), z) + (\xi(t) + g(w(t)) - \lambda'(w(t))u(t), z) = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{for all } z \in V \text{ and a.e. } t \in [0, T].$$

$h \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ にたいして, 関数 $h_0 \in L^2(0, T; V)$ が存在して,

$$a(h_0(t), z) + (n_0 h_0(t) - h(t), z)_\Gamma = 0 \quad \text{for all } z \in V \text{ and a.e. } t \in [0, T];$$

$h \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma))$ の時 $h_0 \in W^{1,2}(0, T; V)$ に注意する. この関数 h_0 を使うと, (1.1) と (1.2) は次のように表される:

$$\rho(u)'(t) + \lambda(w)'(t) + F(u(t) - h_0(t)) = f(t) \quad (1.3)$$

$$\nu w'(t) + \kappa F_0 w(t) + \xi(t) + g(w(t)) = \lambda'(w(t))u(t) \quad (1.4)$$

for a.e. $t \in [0, T]$.

Definition 1.2. 2つの関数 $u := u_{\nu 0} : [0, T] \rightarrow V$ と $w := w_{\nu 0} : [0, T] \rightarrow H$ の組が次の条件 $(w1)_{\nu 0}$ -($w3$) $_{\nu 0}$ を満たすとき, 問題 $(P_{\nu 0})$ with $\nu > 0$ の解という:

$$(w1)_{\nu 0} \quad u \in L^2(0, T; V), \quad \rho(u) \in L^\infty(0, T; H) \cap W^{1,2}(0, T; V^*), \\ w \in W^{1,2}(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V) \text{ and } u(0) = u_0, w(0) = w_0.$$

$$(w2)_{\nu 0} \quad \text{任意の } z \in V \text{ と a.e. } t \in [0, T] \text{ にたいして, (1.1) が成り立つ.}$$

$$(w3)_{\nu 0} \quad \xi \in L^2(0, T; H) \text{ が存在して } \xi \in \beta(w) \text{ a.e. on } Q \text{ and}$$

$$\nu w'(t) + \xi(t) + g(w(t)) = \lambda'(w(t))u(t) \quad \text{in } H \quad (1.5)$$

for a.e. $t \in [0, T]$.

定義の $(w3)_{\nu \kappa}$ と $(w3)_{\nu 0}$ より問題 $(P_{\nu \kappa})$ の解 $\{u, w\}$ の関数 w は Q 上に制限 $\sigma_* \leq w \leq \sigma^*$ を持つ. これは問題 $(P_{\nu \kappa})$ の weak formulation は $[\sigma_*, \sigma^*]$ の外では λ と g の挙動に関係しないことを意味している. そこで, 一般性を失うことなく次を仮定することができる:

$$g \text{ の support は compact, } \lambda \text{ は } [\sigma_*, \sigma^*] \text{ の外で線形.} \quad (1.6)$$

この論文を通して, (1.6) を仮定する.

問題 $(P_{\nu \kappa})$ with $\nu > 0$ and $\kappa > 0$ にたいして, 次の一意解の存在定理が得られている.

Theorem 1.1. (A1)-(A5) に加えて次の条件 (H1)-(H4) を仮定する:

$$(H1) \quad f \in W^{1,2}(0, T; H).$$

$$(H2) \quad h \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Gamma)) \cap L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma)) \text{ such that}$$

$$n_0 \sup D(\rho) \geq h(t, x) \geq n_0 \inf D(\rho) \quad \text{for a.e. } (t, x) \in \Sigma$$

正の定数 A_1 と A'_1 が存在して

$$\rho(r)(n_0 r - h(t, x)) \geq -A_1 |r| - A'_1 \quad \text{for all } r \in D(\rho) \text{ and a.e. } (t, x) \in \Sigma.$$

$$(H3) \quad u_0 \in V \text{ with } \rho(u_0) \in H.$$

$$(H4) \quad w_0 \in H^2(\Omega) \text{ with } \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0 \text{ a.e. on } \Gamma \text{ かつ } \xi_0 \in H \text{ が存在して } \xi_0 \in \beta(w_0) \text{ a.e. on } \Omega.$$

すると $(P_{\nu\kappa})$ with $\nu > 0$ and $\kappa > 0$ は一意解 $\{u_{\nu\kappa}, w_{\nu\kappa}\}$ を持ち、次を満たす.

$$\begin{cases} u_{\nu\kappa} \in L^\infty(0, T; V), \\ w_{\nu\kappa} \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega)), \\ w'_{\nu\kappa} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \\ \xi_{\nu\kappa} \in L^\infty(0, T; H), \end{cases} \quad (1.7)$$

ここで $\xi_{\nu\kappa}$ は Definition 1.1 の条件 (w3) $_{\nu\kappa}$ の ξ である. さらに次の一様評価 (i) と (ii) が成り立つ:

(i) パラメーター ν と κ によらない正の定数 δ_0 と M_0 が存在して,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \{\widehat{\rho^{-1}}(\rho(u_{\nu\kappa}(t))) - r_0(\rho(u_{\nu\kappa}(t)) + \lambda(w_{\nu\kappa}(t)))\} dx \\ & + \frac{\kappa}{2} |\nabla w_{\nu\kappa}(t)|_H^2 + \int_{\Omega} \{\widehat{\beta}(w_{\nu\kappa}(t)) + \widehat{g}(w_{\nu\kappa}(t))\} dx \\ & + \delta_0 \left\{ \int_0^t |u_{\nu\kappa}(s)|_V^2 ds + \nu \int_0^t |w'_{\nu\kappa}(s)|_H^2 ds + \nu |\rho(u_{\nu\kappa}(t))|_H^2 \right\} \\ & \leq \int_{\Omega} \{\widehat{\rho^{-1}}(\rho(u_0)) - r_0(\rho(u_0) + \lambda(w_0))\} dx + \frac{\kappa}{2} |\nabla w_0|_H^2 \\ & + \int_{\Omega} \{\widehat{\beta}(w_0) + \widehat{g}(w_0)\} dx + M_0 \{|\rho(u_0)|_H^2 + |f|_{L^2(0,T;H)}^2 + |h|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}^2 + 1\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

for all $t \in [0, T]$, ここで $r_0 \in D(\rho)$, $\widehat{\rho^{-1}}$ は ρ^{-1} の原始関数で $\widehat{\rho^{-1}}(\rho(r_0)) = 0$ をみたし, $\widehat{\beta} : \mathbf{R}$ 上 non-negative proper l.s.c. convex な関数で $\partial\widehat{\beta} = \beta$, $\widehat{g}$ は g の非負な原始関数とする.

(ii) 任意の $\nu > 0$ に対して, $\kappa > 0$ によらない定数 $M_1(\nu)$ が存在して,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} |u_{\nu\kappa}(t)|_V^2 + \frac{\nu}{2} |w'_{\nu\kappa}(t)|_H^2 + \kappa \int_0^t |\nabla w'_{\nu\kappa}(s)|_H^2 ds \\ & \leq M_1(\nu) \{ |u_0|_V^2 + |\rho(u_0)|_H^2 + |w_0|_{H^2(\Omega)}^2 + |\xi_0|_H^2 \\ & + |f|_{W^{1,2}(0,T;H)}^2 + |h|_{W^{1,2}(0,T;L^2(\Gamma))}^2 + 1 \} \end{aligned} \quad (1.9)$$

for all $t \in [0, T]$.

Theorem 1.1 の証明は, [13] を参照.

Lemma 1.1. Theorem 1.1 と同じ仮定のもとで, $\{u_i, w_i\}$ を問題 $(P_{\nu_i\kappa_i})$ with $\nu_i > 0$ and $\kappa_i \geq 0$ for $i = 1, 2$ の解とすると, $e_i := \rho(u_i) + \lambda(w_i)$ for $i = 1, 2$ とおくと, 次の不等式が

成り立つ:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |e_1(t) - e_2(t)|_{V^*}^2 + (\nu_1 w_1'(t) - \nu_2 w_2'(t), w_1(t) - w_2(t)) \\ & + \int_{\Omega} \nabla(\kappa_1 w_1(t) - \kappa_2 w_2(t)) \cdot \nabla(w_1(t) - w_2(t)) dx \\ & + (g(w_1(t)) - g(w_2(t)), w_1(t) - w_2(t)) \leq 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

for a.e. $t \in [0, T]$.

Proof. (1.3) と (1.4) より

$$e_1'(t) - e_2'(t) + F(u_1(t) - u_2(t)) = 0 \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} & \nu_1 w_1'(t) - \nu_2 w_2'(t) + F_0(\kappa_1 w_1(t) - \kappa_2 w_2(t)) \\ & + (\xi_1(t) - \lambda'(w_1(t))u_1(t) - \xi_2(t) + \lambda'(w_2(t))u_2(t)) + (g(w_1(t)) - g(w_2(t))) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

for a.e. $t \in [0, T]$, ここで ξ_i は条件 (w3) $_{\nu\kappa}$ または (w3) $_{\nu 0}$ の中の関数 ξ である. (1.12) に $F^{-1}(e_1(t) - e_2(t))$ を, (1.13) に $w_1(t) - w_2(t)$ をかけ, それらを加えると次が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |e_1(t) - e_2(t)|_{V^*}^2 + (\nu_1 w_1'(t) - \nu_2 w_2'(t), w_1(t) - w_2(t)) \\ & + \int_{\Omega} \nabla(\kappa_1 w_1(t) - \kappa_2 w_2(t)) \cdot \nabla(w_1(t) - w_2(t)) dx \\ & + (g(w_1(t)) - g(w_2(t)), w_1(t) - w_2(t)) + Y_1(t) + Y_2(t) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

for a.e. $t \in [0, T]$, ここで

$$Y_1(t) := (u_1(t) - u_2(t), e_1(t) - e_2(t)) - (\lambda'(w_1(t))u_1(t) - \lambda'(w_2(t))u_2(t), w_1(t) - w_2(t))$$

$$Y_2(t) := (\xi_1(t) - \xi_2(t), w_1(t) - w_2(t)).$$

β の単調性より $Y_2(t) \geq 0$. また, [7, Lemma 3.1] の結果と条件 (A3) より, $Y_1(t) \geq 0$. ゆえに (1.14) より (1.11) が得られる. $\square$

Corollary 1.1. *Lemma 1.1 と同じ仮定のもとで, $\nu > 0$ かつ $\kappa \geq 0$ のとき, 問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解は一意的である.*

Proof. $\{u_i, w_i\}$ を $\nu > 0$ のときの問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解とし, $e_i := \rho(u_i) + \lambda(w_i)$, $i = 1, 2$ とおく. すると Lemma 1.1 の (1.11) より,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{|e_1(t) - e_2(t)|_{V^*}^2 + \nu |w_1(t) - w_2(t)|_H^2\} + \kappa |\nabla(w_1(t) - w_2(t))|_H^2 \\ & \leq L(g) |w_1(t) - w_2(t)|_H^2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

for a.e. $t \in [0, T]$, ここで $L(g)$ は g の Lipschitz 定数. (1.15) に Gronwall の lemma を適用すると, $e_1 = e_2$ と $w_1 = w_2$ が得られる, i.e. $\{u_1, w_1\} = \{u_2, w_2\}$. よって問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解の一意性が得られる. $\square$

2. Asymptotic convergence in $(P_{\nu\kappa})$ as $\kappa \searrow 0$

この節では, $\nu > 0$ を固定して, $\kappa \searrow 0$ としたときの問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解 $\{u_{\nu\kappa}, w_{\nu\kappa}\}$ の挙動について述べる.

Theorem 2.1. 条件 (A1)-(A5), (H1)-(H4) が成り立つと仮定し, $\nu > 0$ とする. すると $\kappa \searrow 0$ としたときに, 問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解 $\{u_{\nu\kappa}, w_{\nu\kappa}\}$ がある関数の組 $\{u_{\nu 0}, w_{\nu 0}\}$ に次の意味で収束する.

$$\begin{aligned} u_{\nu\kappa} &\rightarrow u_{\nu 0} && \text{in } C_w([0, T]; V), \\ \rho(u_{\nu\kappa}) &\rightarrow \rho(u_{\nu 0}) && \text{in } C_w([0, T]; H), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} w_{\nu\kappa} &\rightarrow w_{\nu 0} && \text{weakly in } W^{1,2}(0, T; H), \\ &&& \text{in } C_w([0, T]; V) \cap L^2(0, T; V). \end{aligned} \quad (2.2)$$

そのうえ, 極限関数 $\{u_{\nu 0}, w_{\nu 0}\}$ は問題 $(P_{\nu 0})$ の一意解になる.

上の定理は Colli-Sprekels [4] の結果の改良になっている. その中では, $\rho(u) = -\frac{1}{u}$ ($-\infty < u < 0$) かつ $\lambda: \mathbf{R}$ で convex のとき, κ に関する問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解の収束を証明している. ここで Theorem 2.1 の証明を, [4] とは異なる方法で与える.

Proof of Theorem 2.1. $\nu > 0$ を固定し, 任意の $\kappa \in (0, 1]$ に対し, 問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解を $\{u_\kappa, w_\kappa\}$ と表すとする.

$$\widehat{\rho^{-1}}(\rho(u_\kappa)) - \rho(u_\kappa)r_0 \geq \widehat{\rho^{-1}}(\rho(r_0)) - \rho(r_0)r_0 \quad \text{a.e. on } Q,$$

に注意すると, (1.8) と (1.9) より次が得られる.

$$\{u_\kappa\} \text{ is bounded in } L^\infty(0, T; V), \quad (2.3)$$

$$\{\rho(u_\kappa)\} \text{ is bounded in } L^\infty(0, T; H) \cap W^{1,2}(0, T; V^*), \quad (2.4)$$

$$\{w_\kappa\} \text{ is bounded in } W^{1,2}(0, T; H), \quad (2.5)$$

$$\{\sqrt{\kappa}w_\kappa\} \text{ is bounded in } L^\infty(0, T; V). \quad (2.6)$$

また, (1.4) に $F_0 w_\kappa(t) (= -\Delta w_\kappa(t))$ をかけると次が得られる.

$$\frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} |\nabla w_\kappa(t)|_H^2 + \kappa |\Delta w_\kappa(t)|_H^2 \leq (L(g) + M(\lambda')) |\nabla w_\kappa(t)|_H^2 + M(\lambda') |\nabla u_\kappa(t)|_H^2 \quad (2.7)$$

for a.e. $t \in [0, T]$, ここで $M(\lambda') : \lambda'$ の $[\sigma_*, \sigma^*]$ 上の最大値. (2.7) を得るために (A3) より $\lambda''(w_\kappa)u_\kappa \leq 0$ なので,

$$(\xi_\kappa(t), -\Delta w_\kappa(t)) \geq 0$$

かつ

$$\begin{aligned} & (\lambda'(w_\kappa(t))u_\kappa(t), -\Delta w_\kappa(t)) \\ &= \int_{\Omega} \lambda''(w_\kappa(t))u_\kappa(t)|\nabla w_\kappa(t)|^2 dx + \int_{\Omega} \lambda'(w_\kappa(t))\nabla u_\kappa(t) \cdot \nabla w_\kappa(t) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \lambda'(w_\kappa(t))\nabla u_\kappa(t) \cdot \nabla w_\kappa(t) dx \\ &\leq M(\lambda')(|\nabla w_\kappa(t)|_H^2 + |\nabla u_\kappa(t)|_H^2), \end{aligned}$$

を用いた. (2.7) に Gronwall の lemma を使い, (2.3) に注意すると,

$$\begin{cases} \{w_\kappa\} \text{ is bounded in } L^\infty(0, T; V), \\ \{\sqrt{\kappa}\Delta w_\kappa\} \text{ is bounded in } L^2(0, T; H). \end{cases} \quad (2.8)$$

次に, $\{\kappa_n\}$ を $(0, 1]$ の 0 に収束する任意の減少列とすると, Lemma 1.1, の (1.11) より

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{|e_n(t) - e_m(t)|_{V^*}^2 + \nu|w_n(t) - w_m(t)|_H^2\} \\ &+ \int_{\Omega} \nabla(\kappa_n w_n(t) - \kappa_m w_m(t)) \cdot \nabla(w_n(t) - w_m(t)) dx \\ &\leq L(g)|w_n(t) - w_m(t)|_H^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

for a.e. $t \in [0, T]$, ここで $\{u_n, w_n\} := \{u_{\kappa_n}, w_{\kappa_n}\}$ かつ $e_n := \rho(u_n) + \lambda(w_n)$.
(2.9) より

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \exp\left(-\frac{2L(g)}{\nu}t\right) (|e_n(t) - e_m(t)|_{V^*}^2 + \nu|w_n(t) - w_m(t)|_H^2) \right\} \\ &+ 2 \exp\left(-\frac{2L(g)}{\nu}t\right) \int_{\Omega} \nabla(\kappa_n w_n(t) - \kappa_m w_m(t)) \cdot \nabla(w_n(t) - w_m(t)) dx \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{2L(g)}{\nu}s\right) (|e_n(s) - e_m(s)|_{V^*}^2 + \nu|w_n(s) - w_m(s)|_H^2) \\ &+ 2 \int_0^s \int_{\Omega} \exp\left(-\frac{2L(g)}{\nu}t\right) \nabla(\kappa_n w_n - \kappa_m w_m) \cdot \nabla(w_n - w_m) dx dt \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

for all $s \in [0, T]$. 特に, $\tilde{w}_n := \exp(-\frac{L(g)}{\nu}t)w_n$ とおくと

$$\int_0^T \int_{\Omega} \nabla(\kappa_n \tilde{w}_n - \kappa_m \tilde{w}_m) \cdot \nabla(\tilde{w}_n - \tilde{w}_m) dx ds \leq 0.$$

よって, [3, Lemma 2.4] より, 上の不等式と (2.8) から

$$\{\nabla \tilde{w}_n\} \text{ is Cauchy in } L^2(0, T; H)^N.$$

つまり

$$\{w_n\} \text{ is Cauchy in } L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H) \quad (2.10)$$

$$\{\rho(u_n)\} \text{ is Cauchy in } C([0, T]; V^*). \quad (2.11)$$

さらに, (2.10) と (2.11) にそれぞれ (2.8) と (2.4) をあわせると, ある関数 w と χ に対して

$$w_n \rightarrow w \quad \text{in } C_w([0, T]; V) \quad (2.12)$$

$$\rho(u_n) \rightarrow \chi \quad \text{in } C_w([0, T]; H). \quad (2.13)$$

今, $\{u_n\}$ が u に weakly* in $L^\infty(0, T; V)$ で収束するように $\{n\}$ の部分列をとり, あらためて $\{n\}$ と表すと, $\chi = \rho(u)$, すなわち, $\rho(u_n) \rightarrow \rho(u)$ in $C_w([0, T]; H)$. 実際, $\rho(u_n) \rightarrow \chi$ in $C([0, T]; V^*)$ より,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T (\rho(u_n), u_n - u) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \rho(u_n), u_n - u \rangle dt = 0,$$

これは $L^2(0, T; H)$ での maximal monotone の議論を使うと $\chi = \rho(u)$. その上, $u_n, u \in C_w([0, T]; V)$ かつ $u_n \rightarrow u$ in $C_w([0, T]; V)$ が得られる.

一方,

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_n := -\nu w'_n + \kappa_n \Delta w_n - g(w_n) + \lambda'(w_n)u_n \\ \quad \rightarrow -\nu w' - g(w) + \lambda'(w)u =: \xi \quad \text{weakly in } L^2(0, T; H), \\ \text{and } \xi \in \beta(w) \text{ a.e. on } Q. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

最後に, (2.3)-(2.5), (2.8), (2.12)-(2.14) 及び Corollary 1.1 より, 極限関数 $\{u, w\}$ は問題 $(P_{\nu 0})$ の一意解である. (2.1) と (2.2) の $\kappa \searrow 0$ としたときの収束は, 部分列 $\kappa_n \searrow 0$ のとりかたによらない. $\square$

3. Asymptotic convergence in $(P_{\nu\kappa})$ as $\nu \searrow 0$

この節では, $\kappa > 0$ を固定し, ρ と λ により強い仮定をおいて, $\nu \searrow 0$ としたときの問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解 $\{u_{\nu\kappa}, w_{\nu\kappa}\}$ の挙動について述べる.

(A1) と (A3) のかわりに, 次を仮定する:

(A1)' $\rho : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : \text{bi-Lipschitz 連続な増加関数};$

(A3)' $\lambda(r) = r \text{ for all } r \in \mathbf{R}.$

最初に問題 $(P_{0\kappa})$ with $\lambda(r) \equiv r$ の解の定義を与える.

Definition 3.1. 2つの関数 $u := u_{0\kappa} : [0, T] \rightarrow V$ と $w := w_{0\kappa} : [0, T] \rightarrow V$ の組が次の条件 $(w1)_{0\kappa}$ -(w3) $_{0\kappa}$ を満たすとき, 問題 $(P_{0\kappa})$ with $\kappa > 0$ の解という:

(w1) $_{0\kappa}$ $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), w \in L^\infty(0, T; V), (\rho(u) + w)' \in L^2(0, T; V^*)$
and $(\rho(u) + w)(0) = \rho(u_0) + w_0.$

(w2) $_{0\kappa}$ 任意の $z \in V$ と a.e. $t \in [0, T]$ に対して, (1.1) が成り立つ.

(w3) $_{0\kappa}$ 任意の $z \in V$ と a.e. $t \in [0, T]$ に対して $\xi \in L^2(0, T; H)$ が存在して, $\xi \in \beta(w)$
a.e. on Q かつ

$$\kappa a(w(t), z) + (\xi(t) + g(w(t)) - u(t), z) = 0, \quad (3.1)$$

すると次の結果が得られた.

Theorem 3.1. $(A1)', (A2), (A3)', (A4), (A5), (H1)-(H4)$ が成り立つと仮定し, 加えて次を仮定する: $\beta + g + \frac{1}{L(\rho)}I : \text{strongly monotone on } [\sigma_*, \sigma^*]$, ここで $L(\rho)$ は ρ の Lipschitz 定数とする. すなわち, ある正の定数 c_0 が存在して, 次が成り立つ:

$$(\xi_1 - \xi_2 + g(r_1) - g(r_2) + \frac{1}{L(\rho)}(r_1 - r_2))(r_1 - r_2) \geq c_0 |r_1 - r_2|^2 \quad (3.2)$$

for all $r_i \in D(\beta), \xi_i \in \beta(r_i), i = 1, 2.$

$\kappa > 0$ を正の定数とする. すると問題 $(P_{\nu\kappa})$ の解 $\{u_{\nu\kappa}, w_{\nu\kappa}\}$ は $\nu \searrow 0$ としたときに, ある関数の組 $\{u_{0\kappa}, w_{0\kappa}\}$ に次の意味で収束する:

$$\begin{aligned} u_{\nu\kappa} &\rightarrow u_{0\kappa} && \text{in } L^2(0, T; H), \\ &&& \text{weakly in } L^2(0, T; V), \\ &&& \text{weakly}^* \text{ in } L^\infty(0, T; H), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} w_{\nu\kappa} &\rightarrow w_{0\kappa} && \text{in } L^2(0, T; V), \\ &&& \text{weakly}^* \text{ in } L^\infty(0, T; V), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\rho(u_{\nu\kappa}) + w_{\nu\kappa} \rightarrow \rho(u_{0\kappa}) + w_{0\kappa} \quad \text{in } L^2(0, T; H) \cap C_w([0, T]; H). \quad (3.5)$$

そのうえ, 極限関数 $\{u_{0\kappa}, w_{0\kappa}\}$ は問題 $(P_{0\kappa})$ の一意解となる.

Proof. (*Uniqueness for $(P_{0\kappa})$*) $\{u_i, w_i\}$ を問題 $(P_{0\kappa})$ on $[0, T]$ の2つの解 (Definition 3.1 の意味で) とし,

$$e_i := \rho(u_i) + w_i \in C_w([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V), \quad i = 1, 2.$$

とおく.

(1.3) と (1.4) と同様に,

$$e'_1(t) + e'_2(t) + F(u_1(t) - u_2(t)) = 0 \quad (3.6)$$

for a.e. $t \in [0, T]$ and

$$\kappa F_0(w_1(t) - w_2(t)) + (\xi_1(t) - \xi_2(t)) + (g(w_1(t)) - g(w_2(t))) = u_1(t) - u_2(t) \quad (3.7)$$

for a.e. $t \in [0, T]$, ここで $\xi_i \in L^2(0, T; H)$ with $\xi_i \in \beta(w)$ a.e. on Q , $i = 1, 2$. (3.6) に $F^{-1}(e_1(t) - e_2(t))$ をかけ, (3.7) に $w_1(t) - w_2(t)$ をかけると,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |e_1(t) - e_2(t)|_{V^*}^2 + (u_1(t) - u_2(t), e_1(t) - e_2(t)) = 0 \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \kappa |\nabla(w_1(t) - w_2(t))|_H^2 + (\xi_1(t) - \xi_2(t) + g(w_1(t)) - g(w_2(t)), w_1(t) - w_2(t)) \\ &= (u_1(t) - u_2(t), w_1(t) - w_2(t)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

for a.e. $t \in [0, T]$.

$$\begin{aligned} & (u_1 - u_2, w_1 - w_2) \\ &= (u_1 - u_2, e_1 - e_2) - (\rho^{-1}(e_1 - w_1) - \rho^{-1}(e_2 - w_2), (e_1 - w_1) - (e_2 - w_2)) \\ &\leq (u_1 - u_2, e_1 - e_2) - \frac{1}{L(\rho)} |(e_1 - w_1) - (e_2 - w_2)|_H^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.8) と (3.9) を加え, (3.10) を使うと

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |e_1(t) - e_2(t)|_{V^*}^2 + \kappa |\nabla(w_1(t) - w_2(t))|_H^2 + \frac{1}{L(\rho)} |e_1(t) - e_2(t)|_H^2 \\ &+ (\xi_1(t) - \xi_2(t) + g(w_1(t)) - g(w_2(t)) + \frac{1}{L(\rho)} (w_1(t) - w_2(t)), w_1(t) - w_2(t)) \\ &\leq \frac{2}{L(\rho)} (e_1(t) - e_2(t), w_1(t) - w_2(t)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

for a.e. $t \in [0, T]$. さらに, 任意の小さい $\delta > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} & (e_1(t) - e_2(t), w_1(t) - w_2(t)) \\ &\leq \delta \{ |\nabla(w_1(t) - w_2(t))|_H^2 + |w_1(t) - w_2(t)|_H^2 \} + C_\delta |e_1(t) - e_2(t)|_{V^*}^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

for all $t \in [0, T]$, ここで C_δ は δ によらない正の定数. (3.11) (3.12) と (3.2) より

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |e_1(t) - e_2(t)|_{V^*}^2 + (\kappa - \frac{2\delta}{L(\rho)}) |\nabla(w_1(t) - w_2(t))|_H^2 + \frac{1}{L(\rho)} |e_1(t) - e_2(t)|_H^2 \\ & + (c_0 - \frac{2\delta}{L(\rho)}) |w_1(t) - w_2(t)|_H^2 \leq \frac{2C_\delta}{L(\rho)} |e_1(t) - e_2(t)|_{V^*}^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

for a.e. $t \in [0, T]$. よって Gronwall の lemma より $e_1 = e_2$ かつ $w_1 = w_2$, i.e. $\{u_1, w_1\} = \{u_2, w_2\}$.

(Convergence of (P_{ν_n}) as $\nu \searrow 0$) $\{\nu_n\}$ を 0 に収束する任意の列とし, 簡単のため, 問題 (P_{ν_n}) の解 $\{u_{\nu_n}, w_{\nu_n}\}$ を $\{u_n, w_n\}$ と表す. すると, 条件 (A1)' のもとでの不等式 (1.8) より

$$\begin{cases} \{u_n\} \text{ is bounded in } L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \\ \{w_n\} \text{ is bounded in } L^\infty(0, T; V), \\ \{\rho(u_n) + w_n\} \text{ is bounded in } L^2(0, T; V) \cap W^{1,2}(0, T; V^*), \\ \{\sqrt{\nu_n} w'_n\} \text{ is bounded in } L^2(0, T; H). \end{cases} \quad (3.14)$$

これらの評価より $\{n\}$ の部分列 (あらためて $\{n\}$ と表す) と, 関数の組 $\{u, w\}$ が存在し,

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u & \text{weakly in } L^2(0, T; V) \text{ and weakly* in } L^\infty(0, T; H), \\ w_n \rightarrow w & \text{weakly* in } L^\infty(0, T; V), \\ \nu_n w'_n \rightarrow 0 & \text{in } L^2(0, T; H). \end{cases} \quad (3.15)$$

一意性の証明と同様に, $e_n = \rho(u_n) + w_n$, δ と C_δ に対し, (3.13) と同様に,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |e_n(t) - e_m(t)|_{V^*}^2 + (\kappa - \frac{2\delta}{L(\rho)}) |\nabla(w_n(t) - w_m(t))|_H^2 + \frac{1}{L(\rho)} |e_n(t) - e_m(t)|_H^2 \\ & + (c_0 - \frac{2\delta}{L(\rho)}) |w_n(t) - w_m(t)|_H^2 + (\nu_n w'_n(t) - \nu_m w'_m(t), w_n(t) - w_m(t)) \\ & \leq \frac{2C_\delta}{L(\rho)} |e_n(t) - e_m(t)|_{V^*}^2 \end{aligned}$$

for a.e. $t \in [0, T]$. (3.15) と併せて考えると $\{e_n\} : \text{Cauchy in } C_w([0, T]; V^*) \cap L^2(0, T; H)$ かつ $\{w_n\} : \text{Cauchy in } L^2(0, T; V)$ が得られる. 従って, $n \rightarrow +\infty$ としたときに,

$$w_n \rightarrow w \quad \text{in } L^2(0, T; V) \quad (3.16)$$

$$u_n = \rho^{-1}(e_n - w_n) \rightarrow u = \rho^{-1}(e - w) \quad \text{in } L^2(0, T; H)$$

i.e.

$$\rho(u_n) \rightarrow \rho(u) \quad \text{in } L^2(0, T; H), \quad (3.17)$$

ここで $e = \rho(u) + w$. この場合は

$$(\rho(u_n) + w_n)' \rightarrow (\rho(u) + w)' \quad \text{weakly in } L^2(0, T; V^*). \quad (3.18)$$

その上, $\{w_n\}$ が $L^2(0, T; H^2(\Omega))$ で有界より,

$$\kappa F_0 w_n + \beta(w_n) \ni l_n := -\nu_n w_n' - g(w_n) + u_n$$

かつ $\{l_n\} : L^2(0, T; H)$ で有界. その結果,

$$\begin{cases} \xi_n := -\nu_n w_n' - \kappa F_0 w_n - g(w_n) + u_n \\ \rightarrow -\kappa F_0 w - g(w) + u =: \xi \quad \text{weakly in } L^2(0, T; H) \\ \text{and } \xi \in \beta(w) \text{ a.e. on } Q. \end{cases} \quad (3.19)$$

(3.15)-(3.19) より極限 $\{u, w\}$ は問題 $(P_{0\kappa})$ の解で, (3.3)-(3.5) が成り立つ. $\square$

参考文献

- [1] J. F. Blowey and C. M. Elliott, A phase-field model with a double obstacle potential, in *Motion by Mean Curvature*, pp. 1-22, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1994.
- [2] G. Caginalp, An analysis of a phase field model of a free boundary, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **92**(1986), 205-245.
- [3] M. G. Crandall and A. Pazy, Semigroups of nonlinear contractions and dissipative sets, *J. Funct. Anal.* **3**(1969), 376-418.
- [4] P. Colli and J. Sprekels, On a Penrose-Fife model with zero interfacial energy leading to a phase-field system of relaxed Stefan type, IAAS, Preprint, No. 104, Berlin, 1994.
- [5] W. Horn, J. Sprekels and S. Zheng, Global existence of smooth solutions to the Penrose-Fife models for Ising ferromagnets, preprint, Univ. GH Essen, 1993.
- [6] N. Kenmochi, Systems of nonlinear PDEs arising from dynamical phase transitions, *Lecture Notes Math.* Vol. **1584**, pp. 39-86, Springer Verlag, 1994.
- [7] N. Kenmochi, Uniqueness of the solution to a nonlinear system arising in phase transition, in *Nonlinear Analysis and Applications*, Gakuto Inter. Ser. Math. Sci. Appl., Vol. **6**, 1995.
- [8] N. Kenmochi and M. Niezgodka, Evolution systems of nonlinear variational inequalities arising from phase change problems, *Nonlinear Anal.*, **22**(1994), 1163-1180.

- [9] N. Kenmochi and M. Niezgódka, Systems of nonlinear parabolic equations for phase change problems, *Adv. Math. Sci. Appl.* **3**(1993/94), 89-117.
- [10] Ph. Laurençot, Solutions to a Penrose-Fife model of phase-field type, *J. Math. Anal. Appl.*, 185(1994), 262-274.
- [11] Ph. Laurençot, Weak solutions to a Penrose-Fife model for phase transitions, *Adv. Math. Sci. Appl.* Vol. 5, No.1(1995), 117-138.
- [12] O. Penrose and P. C. Fife, Thermodynamically consistent models of phase-field type for the kinetics of phase transitions, *Physica D*, **43**(1990), 44-62.
- [13] J. Shirohzu, N. Sato and N. Kenmochi, Asymptotic convergence in models for phase change problems, in *Nonlinear Analysis and Applications*, GAKUTO Inter. Ser. Math. Sci. Appl., Vol. 7, Gakkōtoshō, Tokyo, 1995, 361-385.