

Association schemes with a prime number of points

九大数理研 平坂 貢 (Mitsugu Hirasaka)

主定理 1 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ を可換なアソシエーションスキームで、 $|X|$ が素数と仮定する。もし *valency* が 3 の *relation* が存在するならば、 $\mathcal{X}$ は *valency* が 3 の *cyclotomic scheme* と同型である。

「素數位数の群は巡回群のみである。」このことはごく簡単な結果であるが、上の群をアソシエーションスキームに置き換えると、どうなるか? というのがそもそもの動機である。このことは「translation」という群の作用を仮定した対象に限定すれば、群の場合と同様に、*cyclotomic scheme* と同型という結果が得られるが ([5], p.66, 参照)、「translation」を仮定しないと問題は極めて厄介なものになる。実際、 $|X| = 19$ で、*nontranslation scheme* の存在が認められていて ([8], 参照)、 $|X|$ が大きくなるにつれ、 $d = 2$ のアソシエーションスキームの同型類も飛躍的に大きくなるものと予想される。このことは組み合わせ的見地から見た困難さを物語っていて、*translation* と *nontranslation* の境界を明白にすることの意義を立証するものである。

今回の主定理は *valency* が十分小さいときの素数点上のアソシエーションスキームの一意性を述べたものであるが、*valency* が 4 以上のときどうなるかは今後の研究課題である。勿論、 $|X| = 19$ のときに *nontranslation scheme* が存在しているので、上限は存在するのだが、これは $d = 2$ の場合なので、この *diameter* と *valency* との関わり合いも注目すべき点である。

以上は構造定数も含めた組み合わせ構造に関する議論であるが、構造定数のみを考えることも興味深い。例えば $d = 2$ のアソシエーションスキームの構造定数は一意に決まる。 $d \geq 3$ に関しては未解決である。しかし $d = 3$ のときは $k_1 = k_2 = k_3$ を仮定すると、構造定数は一意という結果 ([7], 参照) が示されているので、 $k_1 = k_2 = k_3$ という条件を $|X|$ が素数という条件から導けないか、と模索中である。

用語の定義は今から述べるが、詳しくは [2], [5] を参照されたし。

定義 1 X を有限集合として、 R_i ($i = 0, \dots, d$) を $X \times X$ の部分集合とする。各 R_i に関する X の元で順序付けられた隣接行列 A_i を次のように定義する。

$$(A_i)_{xy} := \begin{cases} 1 & \text{if } (x, y) \in R_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

次に述べる条件 i), ii), iii), iv) を満たすとき $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{i=0, \dots, d})$ はアソシエーションスキームと呼ばれる。

- i) $A_0 = I$, ただし I は単位行列。
- ii) $A_0 + \dots + A_d = J$, ただし J は成分がすべて 1 の行列。
- iii) 任意の i に対して、 ${}^t A_i = A_{i'}$ となるような $i' \in \{0, 1, \dots, d\}$ が存在する。
- iv) 任意の i, j に対して、次が成り立つ。

$$A_i A_j = \sum_{h=0}^d p_{ij}^h A_h.$$

さらに、 $\mathcal{X}$ が次の v) を満たすとき、可換であるという。

- v) 任意の $i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$ に対して、 $A_i A_j = A_j A_i$ 。

$\mathcal{X}$ が次の vi) を満たすときに対称であるという。

- vi) 任意の $i \in \{0, 1, \dots, d\}$, $A_i^t = A_i$ 。

定義 2 (Cyclotomic schemes) F_q を位数が q の有限体とする。ただし q は素数冪である。 ξ を F_q の乗法群の生成元として、 $K \subset F_q^*$ を ξ^d で生成される部分群とする。ただし d は $q-1$ の約数である。そのとき $X = F_q$ 上の *cyclotomic scheme* は

$$R_i = \{(x, y) \mid y - x \in \xi^i K\} \quad (1 \leq i \leq d).$$

によって定義される。

定義 3 (Translation scheme) アソシエーションスキーム $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ に対して、 X がアーベル群の構造を持っていて、任意の *relation* R_i に対して、

$$(x, y) \in R_i \iff (x + z, y + z) \in R_i$$

が成り立つとき *translation scheme* と呼ばれる。

それでは主定理の証明の概略を述べる。以下で、 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ を可換なアソシエーションスキームで、 $|X|$ が素数と仮定する。

- (i) 「 $|X| = 7 \iff p_{jj}^j = 1$ for some R_j with $k_j = 3$ 」を示す。
(ii) 「 $\exists R_m$ s.t. $k_m = 3, p_{mm}^{m'} = 2$ 」を示す。

(i),(ii) より、 A_1, A_2 を R_1, R_2 に関する隣接行列とした時、「 $A_1^2 = 2A_1^t + A_2$ ただし $k_1 = k_2 = 3, A_2 \notin \{A_1, A_1^t\}$ 」を仮定してよいことが分かる。

定義 4 X の元の列 $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ は「 $(x_i, x_{i+1}) \in R_1$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) かつ $(x_i, x_{i+2}) \in R_1$ ($i = 0, 1, \dots, n-2$)」を満たすときに長さ n の *chain* と呼ばれる。

定義 5 $\{B_n\}_{1 \leq n}$ を次の漸化式で定義された行列の集合とする。

$$B_1 := A_1, B_2 := A_2, B_3 := A_1 A_2 - A_1 A_1^t + 3A_0$$

$$B_n := A_1 B_{n-1} - A_1^t B_{n-2} + B_{n-3}, \quad n \geq 4 \quad (1)$$

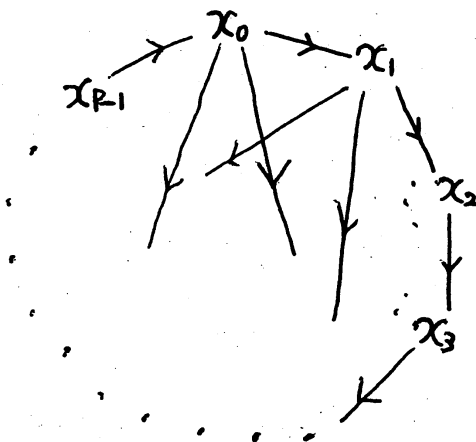
- (iii) 「chain の長さはrelation を characterize すること」を示す。すなわち、

命題 1 B_i ($1 \leq i \leq n$)が単位行列でない $\mathcal{R}$ の隣接行列と仮定する。そのとき次が成り立つ。

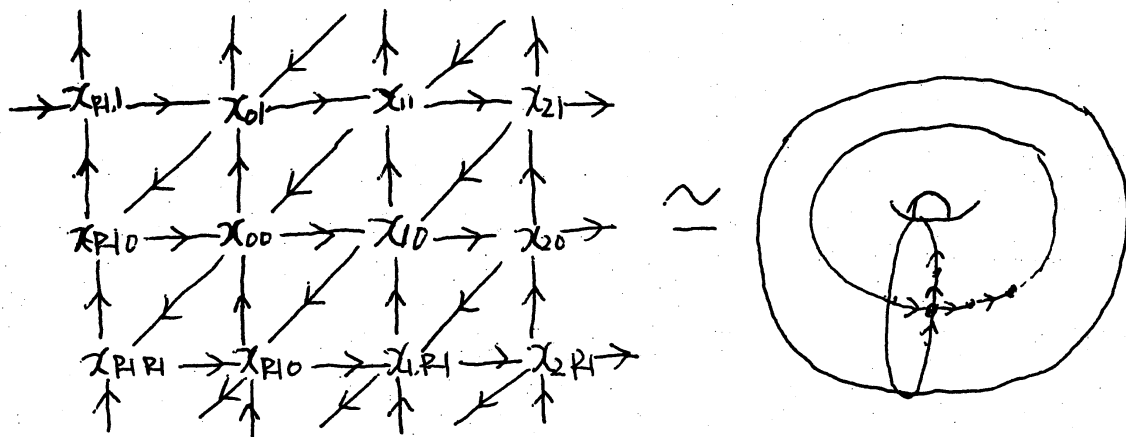
$(x, y) \in R_n \iff x$ から y に向かう唯一つの長さ n の *chain*が存在する。
ただし R_n は B_n に対応する *relation*である。

- (iv) このchainを用いて、 R_1 -グラフの構造を決定する。 R_1 に関する連結成分は次の(a),(b)のいずれかである。

(a) $\{x_i\}_{0 \leq i \leq p-1}$, p は素数。 $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1}, x_0)$ はchain。



(b) $\{x_{i,j}\}_{0 \leq i,j \leq p-1}$, p は素数。任意の i, j に対して、 $(x_{i,0}, x_{i,1}, \dots, x_{i,p-1}, x_{i,0})$, $(x_{0,j}, x_{1,j}, \dots, x_{p-1,j}, x_{0,j})$ は chain。



(i), (ii), (iii), (iv) までの議論は $|X|$ が素数という条件を「 $\mathcal{X}$ is primitive.」かつ「 $\mathcal{X}$ has no symmetric relation with odd valency.」という条件に置き換えても成り立つ。

(v) $|X|$ は素数なので (b) は不適。(iii) により、(a) は translation scheme である。

次の命題はすでに証明されている ([5], p.66, 参照)。

命題 2 素数点からなる translation scheme は cyclotomic scheme である。

上の命題より、証明が終わる。

構造定数の議論については H.I. Blau, Z. Arad, E. Fisman, V. Miloslavsky, M. Muzychuk らが「Integral table algebra」に関する結果を出している。([1], [3], [4], 参照) Integral table algebra とは自然数の構造定数を持つ基底ではられた代数で、いくつかの条件を満たすものである。アソシエーションスキームの隣接行列ではられる Bose-Mesner algebra もまた Integral table algebra の例である。彼らは内積や整数条件を用いて結果を導いている。定義 5 の漸化式も彼らの論文の引用で、この漸化式を用いることで、statement をかなり平易にすることができた。

References

- [1] Z. Arad, E. Fisman, V. Miloslavsky, M. Muzychuk, On antisymmetric homogeneous integer table algebras, preprint.

- [2] E.Bannai and T.Ito, Algebraic Combinatorics I: Association schemes, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1984.
- [3] H.I. Blau, Integral Table Algebras, Affine Diagrams, Analysis of Degree Two, J. Algebra 178, 872-918 (1995)
- [4] H.I. Blau, On Table Algebras and Applications to Finite Group Theory, J. Algebra 138, 137-185 (1991)
- [5] A.E.Brouwer, A.M.Cohen and A.Neumaier, Distance Regular Graphs, Springer-Verlag, 1989.
- [6] C.D.Godsil, Algebraic Combinatorics, Chapman and Hall Mathematics
- [7] M.Hall, Jr. Combinatorial Theory, second edition, A Wiley-Interscience Publication.
- [8] Akihide Hanaki and Izumi Miyamoto, private communication.
- [9] E.Nomiyama, Classification of association schemes with at most ten vertices, Kyushu J. of Math. 49(1995), 163-195.