

磁場中の2次元ローレンツ気体におけるリアプノフ指数 ローレンツ-ボルツマン方程式による方法

大阪市立大学工学研究科応用物理学専攻

熊谷 雅良

1 概要

ローレンツ気体は、固定された複数の剛体ディスク (半径 a) と点粒子 (質量 m) から成る系である。この系は、古くから気体分子運動論の単純なモデル [1] として取り扱われており、近年では、古典的カオスを示す系として非線形動力学の分野 [2] でも注目を集めている。まず、この系の一般的性質について述べておく。粒子はディスクとディスクの間での自由運動と、ディスクとの完全弾性衝突を交互に繰り返す。系の形状をみると、ディスクの配置の仕方により三角格子状や正方格子状などに分類される。さらに、ディスクが無数個ならんだ系は閉じた系と呼ばれ、粒子が空間的に一様に分布することから平衡系のモデルとして扱われる。これに対応し、非平衡系のモデルとして、ディスク数が有限な開いた系がある。開いた系では系から逃避する粒子が存在するため密度勾配が生じる。

ここでは、磁場中の2次元ローレンツ気体のカオス的性質を調べるために、計算手段としてローレンツ-ボルツマン型方程式から得られる分布関数を用いて、磁場とディスク密度に依存したリアプノフ指数の導出を試みる。ディスク配置がランダムな閉じた系を考える。電荷 q の粒子は系に垂直に加わった磁場 B の影響を受け、その軌道は円弧を描く。後の計算の都合上ディスクの数密度 n は十分希薄であり、磁場の逆数に比例するラーマー半径 r は点粒子の平均自由行程 $l = 1/(2na)$ にくらべて大きい、という仮定を設ける。リアプノフ指数の計算にはシナイによる曲率の公式 [3] を用いる。この公式に含まれるアンサンブル平均を、ローレンツ-ボルツマン型方程式から得られる分布関数を用いた平均に置き換えることによりリアプノフ指数の解析的計算が可能となる。結果は磁場のないときのリアプノフ指数に、磁場の2乗に比例した補正項が加わった形で与えられる。

2 曲率半径とリアプノフ指数

まず初めに、曲率の公式について簡単に述べておく。曲率 κ は隣接した2粒子間の距離の分離の割合で定義される。またその逆数は曲率半径 ρ と呼ばれ、外場がないときは vt で与えられる (v : 粒子の速さ)。磁場が加わったとき、粒子の軌道は円弧を描くため、曲率半径の表式は修正される。図1において、実線は隣接した2粒子の軌道を表わす。衝突地点における2本の破線は衝突直後の2粒子の速度ベクトルに平行で、そのなす角を $\delta\theta$ とする。この衝突と次に起こる衝突の間において、時刻 t での2粒子間の距離を $|\delta\mathbf{x}(t)|$ とし、曲率半径を $\rho(t) = |\delta\mathbf{x}(t)|/\delta\theta$ と定義する。幾何学的な考察、および $\delta\theta \ll 1$ という近似により、曲率半径は

$$\rho(t) = 2r \sin \frac{vt}{2r}, \quad (1)$$

で与えられる。曲率の公式により、リアプノフ指数 λ は

$$\lambda = v \left\langle \frac{1}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v})} \right\rangle, \quad (2)$$

で与えられる。ここで $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を表わす。さらに、ディスク配置がランダムであることからこの配置についても平均操作をすると、 ρ は独立変数とみなされる。いま、点粒子は ρ 、 $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{v}$ を変数とするある分布関数 P に従って分布しているとすると、式(2)のリアプノフ指数は閉じた系に対して

$$\lambda = \frac{v}{N} \int \frac{1}{\rho} P(\rho, \mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} d\rho, \quad (3)$$

と書ける。 N は分布関数の規格化定数である。この分布関数は次節に示すローレンツ-ボルツマン型方程式により導かれる。

3 閉じた系におけるローレンツ-ボルツマン型方程式

分布関数は位置、速度に加えて曲率半径にも依存する。衝突の幾何学的考察により、分布関数の従うべきローレンツ-ボルツマン型方程式[4]は

$$\left\{ \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \rho) = -\nu P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \rho) + \frac{\sigma \Theta(1-\sigma)}{a\sqrt{1-\sigma^2}} \int_0^\infty d\rho' [P(\mathbf{r}, \mathbf{v}', \rho') + P(\mathbf{r}, \mathbf{v}'', \rho')], \quad (4)$$

となる。ここに $\sigma = 2\rho/a$ 、 $\nu = 2nav$ は衝突頻度、 Θ は階段関数、“'”は衝突直前の量を示す。閉じた系を考えているので位置および速度の分布は一様であるとして、この方程式は簡単に以下のように書ける。

$$\left(\frac{d\rho}{dt} \frac{d}{d\rho} + \nu \right) P(\rho) = \frac{2\nu\sigma\Theta(1-\sigma)}{a\sqrt{1-\sigma^2}} \int_0^\infty d\rho' P(\rho') \quad (5)$$

さらに、 $c_0 = 1/(2\pi v)$ を速度規格化定数、 n_e を点粒子密度として、分布関数を $P(\rho) = c_0 n_e \delta(|\mathbf{v}| - v) f_0(\rho)$ と表わす。また式(1)から得られる $d\rho/dt = v\sqrt{1 - \{\rho/(2r)\}^2}$ を式(5)に代入してこの微分方程式を解くと、曲率半径の分布関数

$$f_0(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{l} \exp\left\{-\frac{\rho}{l} - \frac{1}{6l} \frac{\rho^3}{(2r)^2}\right\} & (\rho > a/2), \\ \frac{1}{l} \left[1 - \sqrt{1-\sigma^2} + \frac{a^2}{32r^2} \left\{\frac{1}{3}\sqrt{(1-\sigma^2)^3} - \sqrt{1-\sigma^2} + \frac{2}{3}\right\}\right] & (\rho < a/2), \end{cases} \quad (6)$$

が得られる。これは $\rho = a/2$ で連続的につながっている。

4 結果

2、3節で与えられた式(3)、(6)を用いると、磁場中のリアプノフ指数は

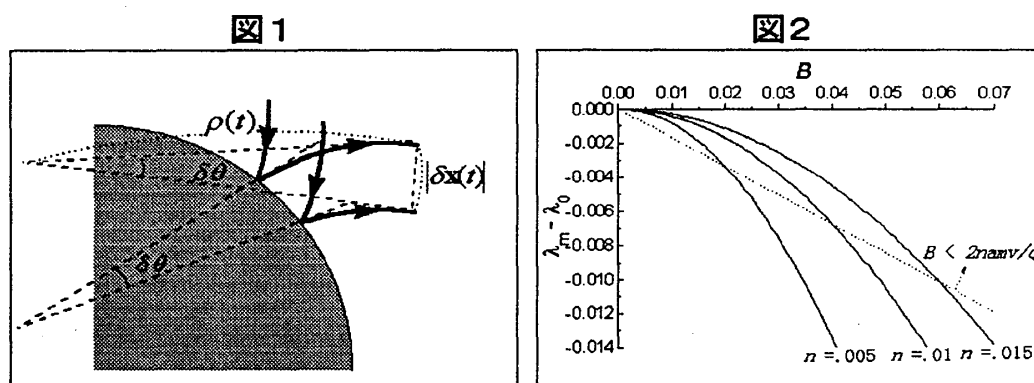
$$\lambda_m = \lambda_0 + \frac{2nav}{3} \left(\frac{a}{4r}\right)^2 \left\{ \frac{1}{3} - \ln 2 - \frac{1}{na^2} - \frac{1}{(na^2)^2} \right\}, \quad (7)$$

のように解析的に求まる。ここで $\lambda_0 = 2nav\{1 - \ln 2 - C - \ln(na^2)\}$ は磁場がないときのリアプノフ指数[4]である($C = 0.55721\dots$:オイラー定数)。

磁場による補正項(式(7)の右辺第2項)は磁場の大きさの2乗に比例し、密度に依存した係数を持つことが分かった。ただしこの公式は1節で述べたように、ディスク密度が十分希薄でラーマー半径が平均自由行程より大きいような範囲 $B < 2namv/q$ で妥当性をもつ。この結果をディスク数密度 n が 0.005、0.01、0.015 の場合について図2に示す。ここで質量 m 、速さ v 、電荷 q 、ディスク半径 a はすべて1としている。

5 今後の課題

今回の研究では、閉じた系におけるリアプノフ指数を得た。同様の方法を用いて、開放系に対してもリアプノフ指数、KS エントロピーが計算される。また、これら解析的結果と数値計算の比較についても検討してみる。本報告のより詳細な内容については文献 [5]、[6] を参考されたい。



参考文献

- [1] J. Machta and R. Zwanzig : Phys. Rev. Lett. **50** , 1959 (1983)
- [2] P. Gaspard and F. Baras : Phys. Rev. E. **51** , 5332 (1995) ; P. Gaspard and J. R. Dorfman : Phys. Rev. E. **52** , 3525 (1995)
- [3] Ya. G. Sinai : Russ. Math. Surv. **25** , 137 (1970)
- [4] H. van. Beijeren and J. R. Dorfman : Phys. Rev. Lett. **74** , 4412 (1995) ; H. van. Beijeren , J. R. Dorfman , E. G. D. Cohen , H. A. Posch and Ch. Dellago : Phys. Rev. Lett. **77** , 1974 (1996)
- [5] 熊谷 雅良 : 1997 年度大阪市立大学工学研究科修士論文 (1998 年, 3 月)
- [6] M. Kumagai and K. Nakamura : in preparation