

概均質ベクトル空間の分類について

筑波大数学 笠井伸一 (Shin-ichi Kasai)

G を連結線型代数群とし, $\rho: G \rightarrow GL(V)$ を有限次元有理表現とする。すべて複素数体上で考えているものとする。 (G, ρ) が概均質ベクトル空間 (以下 $P.V.$ と略す) であるとは, V が Zariski-dense な G -orbit を持つことをいう。

G' を半単純線型代数群とする。 $G' = G_1 \times \cdots \times G_k$, G_i ($1 \leq i \leq k$) は単純代数群, としてよい。 G' の有限次元有理表現 $\rho': G' \rightarrow GL(V)$ を考える。そのとき ρ' は既約表現 $\rho_i: G' \rightarrow GL(V_i)$ ($i=1, \dots, l$) の直和に分解する: $\rho' = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_l$, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$ 。 G を $GL(1)^l \times G'$ とし, ρ を ρ' とその各既約成分 V_i へのスカラー倍の作用 $GL(1)^l$ との合成とする。このとき $P.V.$ となるような (G, ρ) の分類を考える。

[1]では, 既約 $P.V.$ の分類, 即ち $l=1$ の場合に任意の k に対して $P.V.$ となる (G, ρ) を分類している。[2]では, simple $P.V.$ の分類, 即ち $k=1$ の場合に任意の $l (\geq 2)$ に対して $P.V.$ となる

(G, ρ) を分類している。さらに [3] においては, finite P, V の分類, 即ち ρ の作用により V が有限個の G -orbit に分解するような (G, ρ) を分類している。

P, V の分類の次の段階として, two simple P, V の分類, 即ち $k=2$ の場合に任意の $\ell (\geq 2)$ に対して P, V となる (G, ρ) を分類することが問題となる。two simple P, V の分類は現在, 木村笠井犬塚によりおこなわれており, non-trivial case の分類は完成した。即ち (G, ρ) がその既約成分に trivial P, V 以外の既約な two simple P, V を含む場合の分類はできている (犬塚による本講究録参照)。

既約 P, V の分類結果を見ると, casting class の代表としてほとんどのものが finite P, V をとることができ。実際, 既約正則 P, V の reduced なものはすべて finite P, V である。

P, V の分類において, 既知の分類結果 (simple P, V の分類, finite P, V の分類) からいくつかの変換によって構成される P, V がどのような位置をしめているのかを見ることは重要である。ここでは two simple P, V の分類結果においてこのことを調べてみる。例外的にあるものを少ないほど一般の分類が可能であることを示しているとみることができる。

はじめに次の 2 つの変換を考える。

変換 I. 裏返変換 ([1] の Prop. 7).

変換 II. $(G_1 \times GL(m), \rho_1 \otimes \Lambda_1)$ が正則 P. V. のとき,

$$(GL(1)^2 \times G_1 \times SL(m), \rho_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^*) \text{ と}$$

$$(GL(1)^2 \times G_1 \times SL(m), \rho_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1) \text{ とは P. V. 同値.}$$

定理. I, II の変換により, simple P. V. ([2]) または

finite P. V. ([3]) と同値になるものを除いた,

two simple P. V. の non-trivial case の分類結果

は次の通り;

1. $(GL(1)^2 \times SL(4) \times SL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes \Lambda_1)$
2. $(GL(1)^3 \times SL(4) \times SL(m), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + \Lambda_1 \otimes 1) (m=2, 4)$
3. $(GL(1)^3 \times SL(5) \times SL(m), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + \Lambda_1^* \otimes 1) (m=2, 8)$
4. $(GL(1)^3 \times SL(5) \times SL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1^* \otimes 1 + \Lambda_1^* \otimes 1)$
 $(GL(1)^3 \times SL(5) \times SL(8), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + \Lambda_1 \otimes 1)$
5. $(GL(1)^2 \times SL(5) \times SL(8), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$
6. $(GL(1)^2 \times SL(5) \times SL(9), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$
7. $(GL(1)^3 \times SL(5) \times SL(9), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1^{(*)} \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$
8. $(GL(1)^3 \times SL(7) \times SL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1^* \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1)$
 $(GL(1)^3 \times SL(7) \times SL(20), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1)$
9. $(GL(1)^2 \times SL(9) \times SL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1^* \otimes 1)$
 $(GL(1)^2 \times SL(9) \times SL(34), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1)$

10. $(GL(1)^2 \times SL(2m+1) \times SL(m), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1) (m=2, m(2m-1)-1)$
11. $(GL(1)^3 \times Sp(2) \times SL(3), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_2 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$
12. $(GL(1)^3 \times Sp(2) \times SL(m), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1^{(*)}) (m=2, 4)$
13. $(GL(1)^3 \times Spin(7) \times SL(m), \text{vector rep.} \otimes \Lambda_1 + \text{spin rep.} \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1^{(*)}) (m=2, 6)$
14. $(GL(1)^2 \times Spin(10) \times SL(m), \text{vector rep.} \otimes \Lambda_1 + \text{half-spin rep.} \otimes 1) (m=4, 6)$
15. $(GL(1)^2 \times Spin(10) \times SL(15), \text{half-spin rep.} \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$
16. $(GL(1)^3 \times SL(5) \times SL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1^* \otimes 1 + 1 \otimes 2\Lambda_1)$
17. $(GL(1)^{1+k} \times SL(2m+1) \times SL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \sigma_k) \sigma_1 = 2\Lambda_1, 3\Lambda_1; \sigma_2 = \Lambda_1 + 2\Lambda_1$
18. $(GL(1)^{1+k} \times Spin(10) \times SL(2), \text{half-spin rep.} \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \sigma_k) \sigma_1 = 2\Lambda_1, 3\Lambda_1; \sigma_2 = \Lambda_1 + 2\Lambda_1$
19. $(GL(1)^4 \times SL(5) \times SL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1^* \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1)$
20. $(GL(1)^{1+k} \times SL(2m+1) \times SL(2), \Lambda_2 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \sigma_k) \sigma_2 = \Lambda_1 + \Lambda_1; \sigma_3 = \Lambda_1 + \Lambda_1 + \Lambda_1$
21. $(GL(1)^{1+k} \times Spin(10) \times SL(2), \text{half-spin rep.} \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \sigma_k) \sigma_2 = \Lambda_1 + \Lambda_1; \sigma_3 = \Lambda_1 + \Lambda_1 + \Lambda_1$
22. $(GL(1)^4 \times Sp(m) \times SL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^{(*)} + 1 \otimes \Lambda_1^{(*)} + 1 \otimes \Lambda_1^{(*)})$
 $t = t'' \in (GL(1)^4 \times Sp(m) \times SL(2m+1), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$ は除く
23. $(GL(1)^4 \times Sp(m) \times SL(m), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1^{(*)} + 1 \otimes \Lambda_1^{(*)})$
 $t = t'' \in (GL(1)^4 \times Sp(m) \times SL(2m+1), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$ は除く
24. $(GL(1)^2 \times Sp(m) \times SL(2m+1), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_2)$
25. $(GL(1)^3 \times Sp(m) \times SL(2m+1), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + \Lambda_1 \otimes 1 + \Lambda_1 \otimes 1)$
26. $(GL(1)^3 \times Sp(m) \times SL(5), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_2 + 1 \otimes \Lambda_1^*)$
27. $(GL(1)^{1+k} \times Sp(m) \times SL(2), \Lambda_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \sigma_k) \sigma_1 = 3\Lambda_1; \sigma_2 = \Lambda_1 + 2\Lambda_1$

変換Ⅲ. $2n \geq \deg p$ のとき, $(Sp(n) \times G, \Lambda_1 \otimes p)$ と
 $(G, p_{\text{日}})$ とは P. V. 同値 ([1] の Prop. 13).

さらに, Ⅲ の変換まで考えると, 22. ~ 27. は simple P. V. と同値になる。

変換Ⅳ.

(1) $(GL(1)^4 \times G_1 \times SL(\deg p_1), p_1 \otimes \Lambda_1 + \tau \otimes 1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1)$ と
 $(GL(1)^3 \times G_1, \tau + p_1 + p_1)$ とは P. V. 同値.

(2) $(GL(1)^4 \times G_1 \times SL(\deg p_1 + 1), p_1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1 + 1 \otimes \Lambda_1)$ と
 $(GL(1) \times G_1, p_1 + p_1)$ とは P. V. 同値.

さらに, Ⅳ の変換まで考えると, 19. ~ 21. は simple P. V. と同値になる。

参考文献

- [1] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, Nagoya Math. J. 65 (1977), 1-155.
- [2] T. Kimura, A classification of prehomogeneous vector spaces of simple algebraic groups with scalar multiplications, J. of Alg. 83 (1983), 72-100.
- [3] T. Kimura, S-I. Kasai and O. Yasukura, A classification of reductive algebraic groups which admit only a finite number of orbits, to appear in Amer. J. of Math.