

ヒルベルト空間の作用素の族から 導入された核空間について

東理大 理工 永倉 安次郎

§1 序論

「階位空間の方法」(The method of ranked space)は位相空間論とは本質的に異なる。距離空間では、数で点と点との遠近がわかると同時に、それを $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... とすれば「近づく」という事を、数の大小の順序によって、我々は知る事が出来る。しかし、一般位相空間では、「近さ」の概念を示す近傍は、精密に規定されてはいるが、「近づく」という method の方は constructive であるとは一般にはないがたい。これに反して、「階位空間の方法」では近傍に対しては、条件をゆるめ、(例えば、開集合の概念は特に必要とはしないし、方向性をもった問題を含む事も可能) method としては、基本近傍列として、収束の行序の概念を明確に規定している。基本近傍列は2つの思想をもっている。1つは、順序数で定義された rank によって、次々に調べる近

傍の順序が示される事、1つは、中へ中へ近傍をとる事によつて、場所が次第に限定されて行く事の2つである。しかも、ある系列が収束している事を証明するには、ある1つの基本近傍列に関して、ある条件を満足していればよい。これは、この理論が *positive* の形である事を示している。

スカラー体が数の、線形階位空間 (*linear ranked space*) では、空間の深さ (*depth*) は ω 、即ち近傍の *rank* は自然数になる。しかし乍ら、位相空間におけるが如く、近傍系が *countable* だからと云つて、*Fréchet space* になつてしまふとは限らない。何故なら、*Fréchet space* はその *inductive limit* をとれば、*Fréchet space* でなくなつてしまふが、*linear ranked space* の場合は、その時でも、全く同じ *type* の、即ち *countable* の近傍系をもつ *linear ranked space* となるからである。例としては *Schwartz* の *Distribution* の基礎空間は「階位空間の方法」で完全で、しかも無理なく記述出来る。

linear ranked space の *inductive limit* における収束は、ある基本近傍列をとる事によつて、自然に場所が限定されて擬収束となるが、位相空間の *inductive limit* では擬収束を実現するためには、条件の悪い近傍も全てとつて、否定する形でその収束する場所を限定しなければならない。

つまり、出来るだけ多くの seminorm を使用する必要がある。これが「階位空間の方法」は positive の働きをし、位相空間の方は negative の働きをする例である。

なお、Banach space における主要な理論の基礎となつてゐる「closed graph theorem」及び「Banach-Steinhaus theorem」は広い条件の linear ranked space で既に証明されている。

さて、この論文で取扱う核空間について述べる。場の量子論では、次の様に理論が構成されている。最初に核空間 Ω が与えられ、それを埋め込む共役空間 Ω^* をつくる。更に Ω と Ω^* の間にヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ をつくつて、

$$\Omega \subset \mathcal{H} \subset \Omega^*$$

なる、3つの組の rigged Hilbert space を構成する。これに対して、我々は最初に、状態ベクトルのヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ と、その中で問題とされる作用素が与えられたとする。そこで、それらの作用素を、その共通の定義域で、全て連続とする核 $\mathcal{D}$ を持つ linear ranked space $\mathcal{D}$ とその拡張の空間 $\hat{\mathcal{D}}$ をつくつて

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{H} \subset \hat{\mathcal{D}}$$

なる3つの組をつくる。

この理論の特色は、状態ベクトルのヒルベルト空間は最初

から固定して、その中で理論をつくるという事である。従って完備正規直交系は唯一組でよいので、核定理の証明や $\mathcal{H}$ における Gaussian measure の定義は容易となる。

Roberts [1] は、与えられたヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の中に、ある closed linear operator の family が存在した時に、その中の 1 つが invertible self-adjoint extension をもち、その inverse が nuclear operator ならば、それらの operator の common dense invariant domain D は kernel topology を導入する事によって、nuclear space となる事を示した。これは、上の operator を、すべて連続とする位相である。

そこで、我々は Roberts [1] の仮定をもつヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ をこの理論の出発点とする。

この理論の、もう一つの特色は、nuclear operator が表面から姿を消したという事である。従来の nuclear space の理論は、空間自身の位相とは別に、nuclear operator の family があって、それが極限に密接に関係している。これは、つまり極限の二重性という事実であるが、ここでは、nuclear operator の果すべき重要な役割を全て ranked space の近傍の定義に組込んでしまった。そしてそれ以降は一切 nuclear operator を使わない。また nuclear

space を拡張するのに，共役空間によらずに，completion によって，一挙に共役空間を含む広い空間をつくった。即ち，連続線形汎関数は拡張された空間の中の1つの要素として表現される。

次に，順を追って各節の内容を紹介する。§2 は Roberto [1] による最初の問題設定の仮定を述べてある。§3 ではヒルベルト空間の部分空間 D に rank もった近傍 π_i を nuclear operator の役割を考慮して定義して， D を linear ranked space とした。この時，階位空間としての極限は，Roberto [1] によって導入された kernel topology による極限と同値である事が示される。§4 では，この理論によりよい見通しを与えるために，closed linear operator の後に2つの条件を附加して新しい近傍 π_i を定義し，これで D を linear ranked space とした。この時， D は完備な空間となる。§5 では，空間 D を拡大するために，§4 で導入した近傍 π_i よりも弱い条件をもつ近傍 π_i を定義して， D を linear ranked space とした。この時， D は完備でない空間となるので，completion をして D を含む拡大空間 $\hat{D}$ を構成する事が出来る。 $\hat{D}$ は有限次元ユークリッド空間の projective limit となる。§6 では，§4 で定義した linear ranked space D における連続線形汎関数について調べる

。先づ、それは $\mathcal{H}$ の中の 1 つの要素として、表現されることを示し、それらの全体は、inductive limit となることを示した。linear ranked space では、inductive limit を取換うと、その収束は必然的に擬収束となるのであるが、ここでは、それについて詳述する。また、各處で収束する連続線形汎関数の列は、実は、汎関数として、収束することも示した。これは、より一般の linear ranked space において、証明されている一般性定理及び、Banach-Steinhaus theorem を使用して、証明された。§7 では、核定理を証明した。これも一般性定理を使って、簡単に証明された。§8 では、拡大空間 $\mathcal{H}$ に、Gaussian measure を定義した。この理論を通じて、完備正規直交系は 1 組で十分なる事が、よく判るのである。

§2 On the assumptions

Roberts [1] に従って、次の条件を仮定する。

- (1) $\mathcal{O}$ を separable Hilbert space $\mathcal{H}$ の closed linear operator の族として、次の性質をもつとする。 $\mathcal{O}$ の要素 A は共通な dense invariant domain をもって、且つ、 A^* も $\mathcal{O}$ に属する。
- (2) $\mathcal{A}$ を $\mathcal{O}$ と恒等作用素から、次の方法で生成された最小の

ring とする。(これを C. O. ring と呼ぶことにする)
 即ち, (i) 和は通常 operator の和の closure (ii)
 積は通常 operator の積の closure, と定める。又 $\mathcal{O}$ に
 対する最大の invariant domain は $D = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} D(A)$ によっ
 て与えられる。

(3) $\mathcal{A}$ の中に, ある operator A があって, $A^0 = A|D$ は
 めて self-adjoint extension をもち, 且つその inverse
 は nuclear operator である。

(4) $\mathcal{O}$ は countable, とする。

§3 The neighbourhood for D in the sense of ranked space

§2 の仮定(3)によつて, A^0 は self-adjoint extension T
 をもち, T^{-1} は nuclear operator であるとする。 T^{-1} の固
 有値を重複度も考え、次の様に番号づける。

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_k| \geq \dots > 0$$

e_k を μ_k に対応する固有ベクトルとすれば, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ は $\mathcal{H}$ の完
 備正規直交系となる。今 $\lambda_k = 1/|\mu_k|$ とおくと, T^{-1} は
 nuclear operator なることより, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$ であり
 , $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ は単調に $+\infty$ に発散する。従つて, ある自然数 N
 が存在して,

$$1 < \lambda_N \leq \lambda_{N+1} \leq \dots$$

と出来る。今後、この N を固定して、理論を展開する。次に *algebra $\mathcal{A}$ の要素の中、単位元と、ある自然数 n に対して $A|D = T^n|D$ となる根元 operator A 以外の要素に対して、番号をつけて、 $A_1, A_2, \dots$ としておく。

さて、linear space D に対し、原点の近傍として、次の様に $V_i(r, l; D)$ を定義しよう。

$$V_i(r, l; D) = \left\{ x \in D; \left(\sum_{k=1}^i |\xi_k|^2 \right)^{1/2} < r, \left(\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^i \xi_k|^2 \right)^{1/2} < l, \& \right. \\ \left. \|A_h x\| < l \text{ for } h=1, \dots, i \right\}$$

ここで、 $\{\xi_k\}$ は x の $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ に関するフーリエ係数であり、 i は自然数、また $r > 0, l > 0$ 。

この時、特に $V_i(D) = V_i(1/2, 1; D)$ for $i \geq 1$ とおいてこれを rank i の原点の近傍と呼ぶ事にする。空間 D を rank zero の近傍とし、これを $V_0(D)$ で示す。 D の任意の点 x の rank i の近傍は $x + V_i(D)$ と定める。

さて、階位空間の一般理論の示す如く、基本近傍列とは次の如き近傍の列 $\{V_{\delta_i}(D)\}$ である。

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad V_{\delta_1}(D) \supseteq V_{\delta_2}(D) \supseteq \dots \supseteq V_{\delta_i}(D) \supseteq \dots \\ \quad \text{但し, } V_{\delta_i}(D) \text{ は rank } \delta_i \text{ の近傍.} \\ (2) \quad \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_i \leq \dots \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

そして, 点列 $\{x_i\}$ が x に収束するとは, ある基本近傍列 $\{V_{\alpha_i}(D)\}$ が存在して, $x_i - x \in V_{\alpha_i}(D)$ for all i が成立する事である。

次に, いくつかの補題, 定理を証明してから, 上の様に近傍 V_i が定義された空間 D は linear ranked space である事を証明しよう。

Lemma 1 (1) $V_i(r, l; D)$ は circled である。

(2) $V_{i+1}(r', l'; D) \subseteq V_i(r, l; D)$, if $r' \leq r, l' \leq l$

(3) $\lambda V_i(r, l; D) = V_i(\lambda r, \lambda l; D)$, for $\lambda > 0$

(4) $V_i(r, l; D) + V_i(r', l'; D) \subseteq V_i(r+r', l+l'; D)$

(証明)(1) $x \in V_i(r, l; D)$ 且 $|\lambda| \leq 1$ ならば, 明らかに $\lambda x \in V_i(r, l; D)$ 。

(2) $1 < \lambda_N \leq \lambda_{N+1} \leq \dots$ であるから, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ かつ $V_{i+1}(r', l'; D)$ に属するならば, $\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^i \xi_k|^2 \leq \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{i+1} \xi_k|^2 < l'^2 \leq l^2$. 従って $x \in V_i(r, l; D)$ 。

(3) これは明白である。

(4) $x \in V_i(r, l; D)$, $x' \in V_i(r', l'; D)$ とし, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$, $x' = \sum_{k=1}^{\infty} \xi'_k e_k$ とすると,

$$\left(\sum_{k=1}^i |\xi_k + \xi'_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^i |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^i |\xi'_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < r + r'.$$

且つ $(\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^i (\xi_k + \xi'_k)|^2)^{1/2} \leq (\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^i \xi_k|^2)^{1/2} + (\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^i \xi'_k|^2)^{1/2} < l + l'$
 その上, $\|A_k(x+x')\| \leq \|A_k x\| + \|A_k x'\| < l + l'$ for $k=1, \dots, i$.
 が成立つから $x + x' \in V_i(r+r', l+l'; D)$ (証明終)

次の定理は, 任意の収束列は唯一つの極限点をもつ事を示している。

Theorem 1 $\{V_{\gamma_i}(D)\}$ を任意の基本近傍列とする時には $\bigcap_{i=1}^{\infty} V_{\gamma_i}(D) = \{0\}$.

(証明) $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \in V_{\gamma_i}(D)$ for all i
 とすると, 近傍の定義から $\sum_{k=1}^{\gamma_i} |\xi_k|^2 < 1/\gamma_i^2$ が任意の i について成立つ。従つて, すべての k に対して $\xi_k = 0$ が成立つ。即ち $x = 0$. (証明終).

Theorem 2 近傍列 $\{V_{\gamma_i}(r_i, l_i; D)\}$ は次の極限性質をもつとある。 $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_i \leq \dots \rightarrow \infty$, $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_i \geq \dots \rightarrow 0$, $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_i \geq \dots$. すると適当な基本近傍列 $\{V_{\gamma_i}(D)\}$ が存在して

$$V_{\gamma_i}(r_i, l_i; D) \subseteq V_{\gamma_i}(D) \quad \text{for all } i$$

となる。

(証明) $\gamma_i > 1$ の時, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ が $V_{\gamma_i}(\nu_i, l_i; D)$ に属するならば, 定義より

$$\sum_{k=1}^{\gamma_i} |\xi_k|^2 < \nu_i^2, \quad \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k \xi_k|^2 \leq (\lambda_N^{-\gamma_i+1})^2 \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{\gamma_i} \xi_k|^2 < (l_i \lambda_N^{-\gamma_i+1})^2$$

であり, また $k=1, \dots, \gamma_i$ に対して $\|A_k x\| < l_i$ である。

一方, $A_1 \in \mathcal{A}$ ならば, 定義より $\overline{A_1^* A_1} \in \mathcal{A}$ され故, ある番号 m があって $\overline{A_1^* A_1} = A_m$ となっている。従って $\gamma_i > \max(m, N)$ なる $V_{\gamma_i}(\nu_i, l_i; D)$ に属する $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ に対しては

$$\begin{aligned} \|A_1 x\|^2 &= (A_1 x, A_1 x) = (A_1^* A_1 x, \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (A_1^* A_1 x, e_k) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(A_1^* A_1 x, e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|A_1^* A_1 x\| < \\ &\quad \{ \nu_i^2 + (l_i \lambda_N^{-\gamma_i})^2 \}^{\frac{1}{2}} l_i. \end{aligned}$$

が成立つ。従って, 十分大なる自然数 j_1 をとれば, $i \geq j_1$ なる i に対して, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \in V_{\gamma_i}(\nu_i, l_i; D)$ ならば,

$\sum_{k=1}^1 |\xi_k|^2 < 1, \quad \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k \xi_k|^2 < 1, \quad \|A_1 x\| < 1$ とする事が出来る。この時は

$$V_{\gamma_i}(\nu_i, l_i; D) \subseteq V_1(D) \quad \text{for } i \geq j_1$$

である。同様にして, $V_2(D)$ に対して, 十分大なる自然数 $j_2 > j_1$ をとれば

$$V_{\gamma_i}(\nu_i, l_i; D) \subseteq V_2(D) \quad \text{for } i \geq j_2$$

とする事が出来る。これを繰返して, 一般に,

$$V_{\gamma_i}(\nu_i, l_i; D) \subseteq V_m(D) \quad \text{for } i \geq j_m$$

なる自然数列 $\{j_m\}$ を得る。

そこで, $V_{\delta_i}(D) = V_0(D)$ for $1 \leq i < j_1$, $V_{\delta_i}(D) = V_1(D)$ for $j_1 \leq i < j_2$, $V_{\delta_i}(D) = V_2(D)$ for $j_2 \leq i < j_3$, $\dots$ とおくと

$$V_{\delta_i}(r_i, l_i; D) \subseteq V_{\delta_i}(D) \quad \text{for all } i$$

なる基本近傍列 $\{V_{\delta_i}(D)\}$ を得る。(証明終)

さて, M. Washihara [4] は linear ranked space の定義を与えたが, 上で考えた近傍をもつ linear space D は Washihara の条件をみたす事を示そう。Washihara の条件は

(R, L₁) 任意の基本近傍列 $\{V_{\delta_i}(D)\}$ 及び $\{V_{\delta'_i}(D)\}$ に対し, ある基本近傍列 $\{V_{\delta''_i}(D)\}$ が存在して

$$V_{\delta_i}(D) + V_{\delta'_i}(D) \subseteq V_{\delta''_i}(D) \quad \text{が成立つ。}$$

(R, L₂) (1) 任意の基本近傍列 $\{V_{\delta_i}(D)\}$ と任意の数 α に対し, ある基本近傍列 $\{V_{\delta'_i}(D)\}$ が存在して

$$\alpha V_{\delta_i}(D) \subseteq V_{\delta'_i}(D) \quad \text{が成立つ。}$$

(2) 任意の実数 α と $\lim \alpha_i = 0$ なる数列 $\{\alpha_i\}$ に対し, ある基本近傍列 $\{V_{\delta_i}(D)\}$ が存在して

$$\alpha_i \alpha \in V_{\delta_i}(D) \quad \text{が成立つ。}$$

(3) 任意の基本近傍列 $\{V_{\delta_i}(D)\}$ と $\lim \alpha_i = 0$ なる数列 $\{\alpha_i\}$ に対し, ある基本近傍列 $\{V_{\delta'_i}(D)\}$ が存在して

$$\alpha_i V_{\delta_i}(D) \subseteq V_{\delta'_i}(D) \quad \text{が成立つ。}$$

linear space D がこの条件を満たす事を次に示す。

(R, L_1) に対し Z .

$\{V_{\sigma_i}(D)\}, \{V_{\sigma'_i}(D)\}$ を $=$ の任意の基本近傍列とし, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$,
 $y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k$ をそれぞれ $\sigma_i > 1, \sigma'_i > 1$ なる $V_{\sigma_i}(D), V_{\sigma'_i}(D)$
 に属する要素とする。

$$\sigma_i'' = \min(\sigma_i, \sigma'_i, [(\sigma_i \sigma'_i)(\sigma_i + \sigma'_i)^{-1}]) \quad (\text{但し } [] \text{ は ガウス 記号})$$

とおく,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\sigma_i''} |\xi_k + \eta_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{k=1}^{\sigma_i''} |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\sigma_i''} |\eta_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\sigma_i} |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\sigma'_i} |\eta_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< (\sigma_i^{-1} + \sigma'^{-1}_i) \leq \sigma_i'', \end{aligned}$$

$$\text{また, } \left(\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{\sigma_i''} (\xi_k + \eta_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{\sigma_i''} \xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{\sigma_i''} \eta_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 2,$$

$$\|A_i(x+y)\| \leq \|A_i x\| + \|A_i y\| < 2 \quad \text{for } 1 \leq i \leq \sigma_i''.$$

$$\text{従って} \quad x+y \in V_{\sigma_i''}(1/\sigma_i'', 2; D)$$

$$\text{即ち,} \quad V_{\sigma_i}(D) + V_{\sigma'_i}(D) \subseteq V_{\sigma_i''}(1/\sigma_i'', 2; D)$$

Theorem 2 を考慮すれば, 証明は終った。

$(R, L_2)(1)$ に対し Z .

Lemma 1 に $\beta > 2$, $\alpha V_{\sigma_i}(D) = V_{\sigma_i}(|\alpha|/\sigma_i, |\alpha|; D)$ である
 から Theorem 2 に $\beta > 2$, 明かである。

$(R, L_2)(2)$ に対して,

$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ を D に属する任意の要素とすると, D の定義から, 任意の i に対して $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^i \xi_k|^2 < \infty$, 且つ $\|A_i x\| < \infty$ である。一方 $\{\alpha_i\}$ は 0 に収束するから, 十分大なる自然数 m_1 をとれば,

$$\sum_{k=1}^i |\alpha_i \xi_k|^2 < 1, \sum_{k=N}^{\infty} |\alpha_i \lambda_k \xi_k|^2 < 1, \|A_1 \alpha_i x\| < 1 \quad \text{for } i \geq m_1$$

となる根に出来る。即ち, $\alpha_i x \in V_1(D)$ for $i \geq m_1$.

同根にある自然数 $m_2 > m_1$ をとって,

$$\sum_{k=1}^2 |\alpha_i \xi_k|^2 < 2^{-2}, \sum_{k=N}^{\infty} |\alpha_i \lambda_k^2 \xi_k|^2 < 1, \|A_1 \alpha_i x\| < 1, \|A_2 \alpha_i x\| < 1$$

for $i \geq m_2$.

となる根に出来る。即ち, $\alpha_i x \in V_2(D)$ for $i \geq m_2$.

これを繰返して, 一般に,

$$\alpha_i x \in V_j(D) \quad \text{for } i \geq m_j$$

となる単調増加自然数列 $\{m_j\}$ を得る。そこで, $V_{\delta_i}(D) = V_0(D)$

for $1 \leq i < m_1$, $V_{\delta_i}(D) = V_1(D)$ for $m_1 \leq i < m_2$, $V_{\delta_i}(D) = V_2(D)$

for $m_2 \leq i < m_3$, ... とおくと

$$\alpha_i x \in V_{\delta_i}(D) \quad \text{for all } i$$

を得る。

$(R, L_2)(3)$ に対して,

$(R, L_2)(1)$ によつて明らかである。

かくて, 上に定義した近傍をもつ linear space D は linear

ranked space である事がわかった。次に、この D は R -complete であることを示そう。

Theorem 3 $\{x_i\}$ を linear ranked space D における R -Cauchy 列とする (即ち、ある基本近傍列 $\{V_{\gamma_i}(D)\}$ があって、 $x_j - x_k \in V_{\gamma_i}(D)$ for all $j, k \geq i$) この時、 D の中に $\{x_i\}$ の極限点 x がある。従って、linear ranked space D は R -Complete である。

(証明) 今 $x_i = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(i)} e_k$ とおき、 $x_l - x_j \in V_{\gamma_i}(D)$ (但し、 $\gamma_i \geq N$) とすれば

$$\begin{aligned} \|x_l - x_j\|^2 &= \sum_{k=1}^{N-1} |\xi_k^{(l)} - \xi_k^{(j)}|^2 + \sum_{k=N}^{\infty} |\xi_k^{(l)} - \xi_k^{(j)}|^2 \\ &< \frac{1}{\gamma_i^2} + \lambda_N^{-2\gamma_i} \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{\gamma_i} (\xi_k^{(l)} - \xi_k^{(j)})|^2 < \frac{1}{\gamma_i^2} + \lambda_N^{-2\gamma_i} \end{aligned}$$

また、任意の自然数 n に対して、十分大なる γ_i をとれば

$$\overline{A_n^* A_n} \in \{A_{n'}\}_{n'=1, \dots, \gamma_i}$$

と出来るから

$$\begin{aligned} \|A_n(x_l - x_j)\|^2 &= (A_n^* A_n(x_l - x_j), (x_l - x_j)) \\ &\leq \|A_n^* A_n(x_l - x_j)\| \|x_l - x_j\| < \|x_l - x_j\| \end{aligned}$$

となる。これらの事は $\{x_i\}, \{A_n x_i\}$ は、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の Cauchy 列であることを示している。従って、それぞれの

極限 x, y が $\mathcal{A}$ の中に存在する。しかるに $\mathcal{A}$ に属する A_n は closed linear operator だから $x \in D(A_n)$, かつ $A_n x = y$ 。これが, すべての $A_n, n=1, 2, \dots$ について云える。最後に, $j \geq N$ なる j に対して, $j \geq i$ とすれば,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n \xi_k^{(j)}|^2 \right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n (\xi_k^{(i)} - \xi_k^{(j)})|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n \xi_k^{(i)}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\lambda_N^n \sum_{k=1}^{N-1} |\xi_k^{(i)} - \xi_k^{(j)}|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^n (\xi_k^{(i)} - \xi_k^{(j)})|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n \xi_k^{(i)}|^2 \right)^{1/2} \\ &< \lambda_N^n j^{-1} + 1 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n \xi_k^{(i)}|^2 \right)^{1/2} \quad \text{for } n=1, \dots, j. \end{aligned}$$

しかるに, $x_i \in D$ だから, n に対応して, ある数 M_1 が存在して,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n \xi_k^{(i)}|^2 \right)^{1/2} = \|T^n x_i\| < M_1$$

従って, $j \geq i$ なる自然数 j に対して,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n \xi_k^{(j)}|^2 < M^2 \quad (\text{但し, } M = \lambda_N^n j^{-1} + 1 + M_1)$$

故に, 任意の m と $j \geq i$ なる j に対して,

$$\sum_{k=1}^m |\lambda_k^n \xi_k^{(j)}|^2 < M^2$$

そこで, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ とすれば, $j \rightarrow \infty$ のとき, $\xi_k^{(j)} \rightarrow \xi_k$ であるから, 任意の m に対して

$$\sum_{k=1}^m |\lambda_k^n \xi_k|^2 \leq M^2$$

従って $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n \xi_k|^2 \leq M^2$, 故に $x \in D(T^n)$ 。

即ち, x は $\mathcal{A}$ に属する operator の common domain D に属す。

次の定理は linear ranked space D で点列 $\{x_i\}$ が x に収束することは, Roberts [1] の kernel topology で収束することと同値であることを示す。即ち nuclear space としての収束と同値である。

Theorem 4 linear ranked space D において, 点列 $\{x_i\}$ が x に収束することは, A に属する任意の operator A について $\|A(x_i - x)\| \rightarrow 0$ なる事と同値である。

(証明) linear ranked space D において, $\{x_i\}$ は x に収束するとすると, ある基本近傍列 $\{V_{\delta_i}(D)\}$ が存在して,

$$x_i - x \in V_{\delta_i}(D) \quad \text{for all } i$$

が成立つ。今 $x_i = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(i)} e_k$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ とおくと, $\delta_i \geq N$ なる i に対しては,

$$\begin{aligned} \|x_i - x\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(i)} - \xi_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{N-1} |\xi_k^{(i)} - \xi_k|^2 + \lambda_N^{-2\delta_i} \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{\delta_i} (\xi_k^{(i)} - \xi_k)|^2 \\ &< \delta_i^{-2} + \lambda_N^{-2\delta_i}, \end{aligned}$$

が成立つ。従って, $i \rightarrow \infty$ とすれば $\|x_i - x\| \rightarrow 0$ 。

更に, 任意の自然数 n に対して, δ_i を十分大にすれば,

$$\overline{A_n^* A_n} \in \{A_{n'}\}_{n'=1, \dots, \delta_i}$$

と出来るので, その様な i に対しては,

$$\|A_n(x_i - x)\|^2 = (A_n^* A_n(x_i - x), (x_i - x)) \leq \|A_n^* A_n(x_i - x)\| \|x_i - x\|$$

$$< \|x_i - x\|$$

また, 任意の自然数 n に対して,

$$\begin{aligned} \|T^n(x_i - x)\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n (\xi_k^{(i)} - \xi_k)|^2 \leq \lambda_N^n \sum_{k=1}^{N-1} |\xi_k^{(i)} - \xi_k|^2 \\ &\quad + \sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k^{-2\delta_i+2n} |\lambda_k^{\delta_i} (\xi_k^{(i)} - \xi_k)|^2 \end{aligned}$$

が成立つので, $\delta_i > \max(n, N)$ のときは,

$$\|T^n(x_i - x)\|^2 < \lambda_N^n \delta_i^{-2} + \lambda_N^{-2\delta_i+2n}$$

従って, $i \rightarrow \infty$ のとき, $\mathcal{A}$ に属する任意の A に対して,

$$\|A(x_i - x)\| \rightarrow 0.$$

逆に, D における数列 $\{x_i\}$ が $\mathcal{A}$ に属する任意の A に対して,

$$\|A(x_i - x)\| \rightarrow 0.$$

であると仮定する。十分大なる自然数 m_1 をとれば, $i \geq m_1$ なら

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^1 |\xi_k^{(i)} - \xi_k|^2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(i)} - \xi_k|^2 = \|Ix_i - Ix\|^2 < 1, \\ \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k (\xi_k^{(i)} - \xi_k)|^2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k (\xi_k^{(i)} - \xi_k)|^2 = \|Tx_i - Tx\|^2 < 1, \end{aligned}$$

$$\text{また, } \|A_i(x_i - x)\| < 1$$

と出来るから, この時は

$$x_i - x \in V_1(D) \quad \text{for } i \geq m_1.$$

同様にして, 十分大なる自然数 $m_2 > m_1$ をとれば,

$$x_i - x \in V_2(D) \quad \text{for } i \geq m_2.$$

これを繰返す事によって, $\{x_i\}$ は linear ranked space D において, x に収束することを知る。 (証明終)

linear ranked space における有界集合の定義は[4]に示されている。即ち, linear ranked space D の subset M に対して, ある基本近傍列 $\{V_{\alpha_i}(D)\}$ とある実数列 $\{\alpha_i\}$ が存在して,

$$M \subseteq \alpha_i V_{\alpha_i}(D) \quad \text{for all } i$$

ならば, M は有界集合と云われる。また, subset F の点列 $\{y_i\}$ が存在して, $y_i \rightarrow y$ のとき, $y \in \overline{F}$ であると定義し, 更に $F = \overline{F}$ のとき, F を閉集合とする。また, subset E において, 任意の点列 $\{y_i\}$ より適当な部分列をとれば, E の点に収束せられるとき, E を sequential compact と呼ぶ事にすれば, linear ranked space D では次の定理が成立つ。

Theorem 5 linear ranked space D の有界閉集合は sequential compact である。

(証明) 今与えられた有界閉集合を M とすると, ある基本近傍列 $\{V_{\alpha_i}(D)\}$ とある実数列 $\{\alpha_i\}$ が存在して,

$$M \subseteq \alpha_i V_{\alpha_i}(D) \quad \text{for all } i$$

が成立つ。今, M に属する任意の点列を $\{x_j\}$ とし, $x_j = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(j)} e_k$ としておく。このとき, $j_i \geq N$ なる i に対して

$$\sum_{k=1}^{j_i} |\xi_k^{(j_i)}|^2 < (\alpha_i j_i^{-1})^2, \quad \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{\alpha_i} \xi_k^{(j_i)}|^2 < \alpha_i^2$$

である。従つて, ある部分列 $\{x_{j_m}\}$ があつて, 各 i に対して

$\{\xi_k^{(j_m)}\}_m$ が収束する根に出来る。自然数 i を

$$\overline{A_i^* A_i} \in \{A_{k'}\}_{k'=1, \dots, \gamma_i} \quad \text{且} \gamma_i \geq 2$$

なる根に固定しておく。このとき次の条件を満たす根 n , 自然数 $l_1 > N$ が存在する。

$$(1) \quad |\xi_1^{(j_m)} - \xi_1^{(j_n)}| < 1 \quad \text{for } m, n > l_1$$

(2) $\lambda_h \rightarrow \infty$, as $h \rightarrow \infty$ だから, $m, n, h > l_1$ なる m, n, h に対して,

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k (\xi_k^{(j_m)} - \xi_k^{(j_n)})|^2 &\leq \sum_{k=N}^{h-1} |\lambda_k (\xi_k^{(j_m)} - \xi_k^{(j_n)})|^2 \\ &+ \lambda_h^{-1} \sum_{k=h}^{\infty} |\lambda_k^2 (\xi_k^{(j_m)} - \xi_k^{(j_n)})|^2 < \sum_{k=N}^{h-1} |\lambda_k (\xi_k^{(j_m)} - \xi_k^{(j_n)})|^2 \\ &+ \lambda_h^{-1} (2\alpha i)^2 < 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \|A_1(x_{j_m} - x_{j_n})\|^2 &= (A_1^* A_1 (x_{j_m} - x_{j_n}), (x_{j_m} - x_{j_n})) \\ &\leq \|A_1^* A_1 (x_{j_m} - x_{j_n})\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^{(j_m)} - \xi_k^{(j_n)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\left(\sum_{k=1}^{h-1} |\xi_k^{(j_m)} - \xi_k^{(j_n)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \lambda_h^{-1} \left(\sum_{k=h}^{\infty} |\lambda_k (\xi_k^{(j_m)} - \xi_k^{(j_n)})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad \times \|A_1^* A_1 (x_{j_m} - x_{j_n})\| \\ &< \left[\left(\sum_{k=1}^{h-1} |\xi_k^{(j_m)} - \xi_k^{(j_n)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \lambda_h^{-1} (2\alpha i) \right] \times 2\alpha i < 1. \end{aligned}$$

従って, 十分大なる自然数 l_1 をとれば,

$$x_{j_m} - x_{j_n} \in T_1(D) \quad \text{for } m, n > l_1$$

と出来る。同様にして, 十分大なる自然数 $l_2 > l_1$ をとれば

$$x_{j_m} - x_{j_n} \in T_2(D) \quad \text{for } m, n > l_2$$

と出来る。以下同様にして $\{x_{jm}\}$ は R -Cauchy列であることがわかる。従って極限値が D の中にある。 (証明終)

今後、簡単のために、原点の近傍として $\{\pi_i(r, l; D)\}$ をもつ linear ranked space D を (D, π_i) とかくことにする。

§ 4 The space D under new additional assumptions.

これから以降、次の2つの条件を仮定して理論を進める。

- (1) nuclear operator T^{-1} のすべての固有ベクトル $\{e_k\}$ は D に含まれる。
- (2) A に属する任意の operator A に対して、ある自然数 n とある正数 M が存在して

$$\|Ax\| \leq M \|T^n x\| \quad \text{for all } x \in D.$$

が成立つ。

さて、このとき空間 D に次の様に新しい原点の近傍を定義する。

$$\pi_i(r, l; D) = \{x \in D; (\sum_{k=1}^i |\xi_k|^2)^{1/2} < r, (\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^i \xi_k|^2)^{1/2} < l\}$$

但し、 $\{\xi_k\}$ は x のフーリエ係数とする。

特に、 $\pi_i(D) = \pi_i(1/2, 1; D)$ とおいて、これを rank i の原点の近傍ということにする。(但し $i \geq 1$)。空間 D は rank zero の原点の近傍とし、 $\pi_0(D)$ とかくことにする。更

に, D の点 x の rank i の近傍を $x + \pi_i(D)$ と定義する。この近傍系をもつ linear space $D \ni (D, \pi_i)$ とかくことにすると, (D, π_i) は linear ranked space である事は容易にわかる。実は, (D, π_i) において 収束する点列は, (D, π_i) においても収束するし, 逆も成立つ。

Theorem 6 (D, π_i) における任意の基本近傍列 $\{\pi_{\delta_i}(D)\}$ に対しては, (D, π_i) における, ある基本近傍列 $\{\pi_{\delta_i}(D)\}$ が存在して,

$$\pi_{\delta_i}(D) \subseteq \pi_{\delta_i}(D) \quad \text{for all } i$$

 が成立つ, 逆に (D, π_i) における任意の基本近傍列 $\{\pi_{\delta_i}(D)\}$ に対しては,

$$\pi_{\delta_i}(D) \subseteq \pi_{\delta_i}(D) \quad \text{for all } i$$

 が成立つ。

(証明) $\delta_i \geq 1$ なる i に対して, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \in \pi_{\delta_i}(D)$ とすれば, $(\sum_{k=1}^{\delta_i} |\xi_k|^2)^{1/2} < \delta_i^{-1}$, $(\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{\delta_i} \xi_k|^2)^{1/2} < 1$ が成立つ。
 一方, $\mathcal{A}$ は $*$ -algebra かつ $\overline{A_1^* A_1} \in \mathcal{A}$, 仮定より, ある自然数 n とある正数 M が存在して,

$$\|A_1^* A_1\| \leq M \|T^n x\| \quad \text{for all } x \in D.$$

が成立つ, そこで

$$\begin{aligned} \|A_1 x\|^2 &= (A_1^* A_1 x, x) \leq M \|T^n x\| \|x\| = M \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^n \xi_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq M \left(\sum_{k=1}^{N-1} |\xi_k|^2 + \lambda_N^{-p} \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^p \xi_k|^2 \right)^{1/2} \left(\lambda_N^n \sum_{k=1}^{N-1} |\xi_k|^2 + \lambda_N^{-p} \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{n+p} \xi_k|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

よって, $\gamma_i > \max(N, n+p)$ なる i に対して, $x \in U_{\gamma_i}(D)$ とすれば

$$\|A_1 x\|^2 \leq M(\lambda_N^m \gamma_i^{-2} + \lambda_N^{-p})$$

となるので, 十分大なる自然数 m_1 に対して,

$$U_{\gamma_i}(D) \subseteq V_1(D) \quad \text{for } i \geq m_1$$

と出来る。次に, $V_2(D)$ に対し, この議論を繰返すと, 十分大なる自然数 $m_2 > m_1$ に対し

$$U_{\gamma_i}(D) \subseteq V_2(D) \quad \text{for } i \geq m_2$$

と出来る。以下同様にして, 一般に,

$$U_{\gamma_i}(D) \subseteq V_j(D) \quad \text{for } i \geq m_j$$

なる自然数列 $\{m_j\}$ を得る。

今, $V_{\gamma_i}(D) = V_0(D)$ for $1 \leq i < m_1$, $V_{\gamma_i}(D) = V_1(D)$ for $m_1 \leq i < m_2$, $V_{\gamma_i}(D) = V_2(D)$ for $m_2 \leq i < m_3$, ...

とおくと $U_{\gamma_i}(D) \subseteq V_{\gamma_i}(D)$ for all i

なる基本近傍列 $\{V_{\gamma_i}(D)\}$ を得る。逆は明か。 (証明終)

従って, §3 において証明された Theorem 3, 4, 5 は (D, π_i) においても真である。

Theorem 7 $\{\pi_{\gamma_i}(r_i, l_i; D)\} \in (D, \pi_i)$ における原点の近傍列で次の性質をもつものとする。即ち $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_i \leq \dots \rightarrow \infty$, $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_i \geq \dots \rightarrow 0$, $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_i \geq \dots$ 。

すると、ある原点の基本近傍列 $\{\pi_i(D)\}$ が存在して、

$$\pi_i(r_i, l_i; D) \subseteq \pi_i(D) \quad \text{for all } i,$$

が成立つ。

(証明) Theorem 2 と同様にして証明される。

§5 The extended nuclear space

この節では、空間 (D, π_i) を拡大するために、新しく linear space D に、原点の近傍として $\pi_i(r, l; D)$ よりも弱い条件をもつ近傍 $W_i(r; D)$ を次の様に定義する。

$$W_i(r; D) = \left\{ x \in D : \left(\sum_{k=1}^i |\xi_k|^2 \right)^{1/2} < r \quad \text{for } x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \right\}$$

特に、 $W_i(D) = W_i(1/i; D)$ for $i \geq 1$ とおいて、これを原点の rank i の近傍と呼ぶ。更に空間 D を rank zero の近傍とし、これを $W_0(D)$ と書き、 D の任意の点 x の rank i の近傍は $x + W_i(D)$ と定義する。すると、この空間 D は linear ranked space であることが容易にわかる。この $\{W_i(r; D)\}$ を近傍系とする linear space D を (D, W_i) とかく。このとき (D, W_i) は R -complete ではない。

Lemma 2 (1) $W_i(r; D)$ は circled である。

$$(2) \quad W_{i+1}(\nu'; D) \subseteq W_i(\nu; D) \quad \text{if } \nu' \leq \nu,$$

$$(3) \quad \lambda W_i(\nu; D) = W_i(\lambda \nu; D) \quad \text{for } \lambda > 0,$$

$$(4) \quad W_i(\nu; D) + W_i(\nu'; D) \subseteq W_i(\nu + \nu'; D)$$

Theorem 8 $\{W_{\delta_i}(\nu_i; D)\}$ を原束の近傍列で、次の性質をもつとする、即ち、 $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_i \leq \dots \rightarrow \infty$, $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_i \geq \dots \rightarrow 0$. すると、ある原束の基本近傍列 $\{W_{\delta_i}(D)\}$ が存在して、

$$W_{\delta_i}(\nu_i; D) \subseteq W_{\delta_i}(D) \quad \text{for all } i.$$

Definition $\{x_n\}, \{y_n\}$ を (D, W_i) における 2 つの R -Cauchy 列とする。その時、ある基本近傍列 $\{W_{\delta_i}(D)\}$ が存在して

$$x_i - y_i \in W_{\delta_i}(D) \quad \text{for all } i$$

が成り立つならば、 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は同値であると定義する。これを $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ とかく。

上の定義の同値関係は、反射律、対称律、推移律をみたすので (D, W_i) における、すべての R -Cauchy 列の全体はこの関係によって、class 分けする事が出来る。この同値類の集合を D^* とかく事にする。さて $D^* \ni \hat{x}, \hat{y}$ なる任意の要素に対し、 $\{x_n\}, \{y_n\}$ をそれぞれ、 $\hat{x}, \hat{y}$ に属する R -Cauchy 列とすると $\{x_n + y_n\}$ は亦

R -Cauchy列である。今 $\{x_n\}, \{y_n\}$ をそれぞれ $\hat{x}, \hat{y}$ に属する R -Cauchy列とすると, $\{x_n + y_n\}, \{x'_n + y'_n\}$ は同値な R -Cauchy列である事がわかるので, $\{x_n + y_n\}$ を含む同値類を $\hat{x} + \hat{y}$ と定義する。そして, この定義は $\hat{x}, \hat{y}$ のみに関係して, $\{x_n\}, \{y_n\}$ の選び方には無関係である。また, 同値類 $\lambda \hat{x}$ を R -Cauchy $\{\lambda x_n\}$ を含む同値類として定義する。 D^* の原点は $x_n \rightarrow 0$ なる R -Cauchy列 $\{x_n\}$ を含む同値類である。かくて, D^* は linear space であるので, D^* に近傍を定義する。

Definition linear space D^* の原点の近傍 $W_i(\tau; D^*)$ を次の様に定義する。 D^* の要素 $\hat{x}$ に属する, ある R -Cauchy列 $\{x_n\}$ に対して, $0 < \tau' < \tau$ なる正数 τ' 及び, ある自然数 m が存在して, $x_n \in W_i(\tau'; D)$ if $n \geq m$ が成立すれば $\hat{x}$ は $W_i(\tau; D^*)$ に属すると定義する。

特に $W_i(D^*) = W_i(1/2; D^*)$ for $i \geq 1$ において, これを D^* の原点の rank i の近傍と呼ぶ。 D^* 自身を rank zero の近傍とし, W_0 とかくことにし, また, $\hat{x} + W_i(D^*)$ は $\hat{x}$ の rank i の近傍と定める。

Lemma 3 (1) $W_i(\tau; D^*)$ は circled である。

- (2) $w_{i+1}(\nu; D^*) \subseteq w_i(\nu; D^*)$ if $\nu \leq \nu$,
 (3) $\lambda w_i(\nu; D^*) = w_i(\lambda \nu; D^*)$ for $\lambda > 0$,
 (4) $w_i(\nu; D^*) + w_i(\nu'; D^*) \subseteq w_i(\nu + \nu'; D^*)$.

(証明) (1) $\hat{x}$ を $w_i(\nu; D^*)$ に属する要素とする。定義から $\hat{x}$ に属する, ある R -Cauchy 列 $\{x_n\}$ に対して, $0 < \nu_0 < \nu$ なる正数 ν_0 , 及び, ある自然数 m が存在して

$$x_n \in w_i(\nu_0; D) \quad \text{if } n \geq m$$

が成立つ。 $w_i(\nu_0; D)$ は circled だから, $|\lambda| \leq 1$ なる任意の

$$\lambda \text{ に対して } \lambda x_n \in w_i(\nu_0; D) \quad \text{if } n \geq m$$

$$\text{従って } \lambda \hat{x} \in w_i(\nu; D^*).$$

(2) 定義より明白。

(3) $\hat{x} \in \lambda w_i(\nu; D^*)$ とすれば $\hat{x}/\lambda \in w_i(\nu; D^*)$.
 従って, $\hat{x}/\lambda$ に属する, ある R -Cauchy 列 $\{x_n/\lambda\}$ に対して,
 $0 < \nu_0 < \nu$ なる正数 ν_0 と, ある自然数 m が存在して

$$x_n/\lambda \in w_i(\nu_0; D) \quad \text{if } n \geq m$$

が成立つ。従って

$$x_n \in \lambda w_i(\nu_0; D) = w_i(\lambda \nu_0; D) \quad \text{if } n \geq m$$

$$\text{従って } \hat{x} \in w_i(\lambda \nu; D^*)$$

$$\text{故に } \lambda w_i(\nu; D^*) \subseteq w_i(\lambda \nu; D^*)$$

逆の包含関係も, 同様にして証明出来る。

(4) $\hat{x} \in W_i(r; D^*)$ 且 $\hat{y} \in W_i(r'; D^*)$ とする。定義から、それぞれ $\hat{x}, \hat{y}$ に属する R -Cauchy列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ に対して、 $0 < r_0 < r, 0 < r'_0 < r'$ なる正数 r_0, r'_0 とある自然数 m が存在して、 $x_n \in W_i(r_0; D), y_n \in W_i(r'_0; D)$ if $n \geq m$ が成立つ。従つて $x_n + y_n \in W_i(r_0 + r'_0; D)$ if $n \geq m$ 。しかるに、 $\{x_n + y_n\}$ は $\hat{x} + \hat{y}$ に属する R -Cauchy列であるから

$$\hat{x} + \hat{y} \in W_i(r + r'; D^*) \quad (\text{証明終})$$

Theorem 9 $\{W_{\delta_i}(r_i; D^*)\}$ を、次の性質をもつ原桌の近傍列とする、即ち、 $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_i \leq \dots \rightarrow \infty, r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_i \geq \dots \rightarrow 0$ 。すると、ある原桌の基本近傍列 $\{W_{\delta_i}(D^*)\}$ が存在して、

$$W_{\delta_i}(r_i; D^*) \subseteq W_{\delta_i}(D^*) \quad \text{for all } i$$

が成立つ。

(証明) 仮定によつて、十分大なる自然数 m_1 をとれば

$$1 < \delta_i, r_i < 1 \quad \text{for } i \geq m_1$$

となる様に出来る。このとき、明白に

$$W_{\delta_i}(r_i; D^*) \subseteq W_1(1; D^*) = W_1(D^*) \quad \text{for } i \geq m_1.$$

また、次に十分大なる自然数 $m_2 > m_1$ をとれば

$$2 < \delta_i, r_i < 1/2 \quad \text{for } i \geq m_2$$

と出来る。この時は

$$W_{\delta_i}(\gamma_i; D^*) \subseteq W_2(1/2; D^*) = W_2(D^*) \quad \text{for } i \geq m_2$$

以下同様にして、一般に

$$W_{\delta_i}(\gamma_i; D^*) \subseteq W_j(1/j; D^*) = W_j(D^*) \quad \text{for } i \geq m_j$$

なる自然数列 $\{m_j\}$ を得る。そこで、 $W_{\delta_i}(D^*) = W_0$ for $1 \leq i < m_1$,
 $W_{\delta_i}(D^*) = W_1(D^*)$ for $m_1 \leq i < m_2$, $W_{\delta_i}(D^*) = W_2(D^*)$ for
 $m_2 \leq i < m_3, \dots \dots \dots$ とおくと

$$W_{\delta_i}(\gamma_i; D^*) \subseteq W_{\delta_i}(D^*) \quad \text{for all } i$$

なる基本近傍列 $\{W_{\delta_i}(D^*)\}$ を得る。 (証明終)

さて、上の極限に定義された D^* は linear ranked space となる事は容易にわかるが、R-complete なる事を次に証明する。

Theorem 10 linear ranked space D^* は R-complete である。即ち、 D^* における R-Cauchy 列は D^* の中にその極限点をもつ。

(証明) $\{\hat{x}_k\}$ を D^* における R-Cauchy 列とする。即ち、ある基本近傍列 $\{W_{\delta_i}(D^*)\}$ が存在して、

$$\hat{x}_k - \hat{x}_h \in W_{\delta_i}(D^*) \quad \text{for } k, h \geq i.$$

今、 D における R-Cauchy 列 $\{x_n^{(n)}\}_n, \{x_n^{(h)}\}_n$ をそれぞれ $\hat{x}_k, \hat{x}_h$ に属するものとして、 $\{x_m^{(n)} - x_n^{(h)}\}$ は $(\hat{x}_k - \hat{x}_h)$ に属す

る R -Cauchy列である。そこで、 $0 < \alpha_0 < 1/\delta_i$ なる正数 $\alpha_0 = \alpha_0(K, h)$ と、ある自然数 $m = m(K, h)$ が存在して、

$$x_n^{(K)} - x_m^{(K)} \in W_{\delta_i}(\alpha_0; D) \quad \text{for } n \geq m$$

となる。一方、 $\{x_n^{(K)}\}_n$ は (D, W_i) における R -Cauchy列だから、ある基本近傍列 $\{W_{\delta_i(K)}(D)\}$ が存在して、

$$x_n^{(K)} - x_m^{(K)} \in W_{\delta_i(K)}(D) \quad \text{for } n, m \geq \delta_i(K).$$

が成立つ。そこで、すべての K に対して、 $\{\delta_i(K)\}_i$ の中から、

$\delta'_K > K$, $\delta'_K < \delta'_{K+1}$ なる様に、 δ'_K を選ぶ。今 $y_K = x_{\delta'_K}^{(K)}$ とおくと

$\{y_K\}$ は (D, W_i) における R -Cauchy列である。何故ならば

$K \geq K' > i$, $n \geq \max(m(K, h), \delta'_K, \delta'_{K'})$ なる自然数 K, K', n に対して、

$$y_K - y_{K'} = (x_{\delta'_K}^{(K)} - x_m^{(K)}) + (x_m^{(K)} - x_m^{(K')}) + (x_m^{(K')} - x_{\delta'_{K'}}^{(K')})$$

$$\in W_{\delta'_K}(D) + W_{\delta_i}(\alpha_0(K, h); D) + W_{\delta'_{K'}}(D) \subseteq W_{\delta'_K}(D) + W_{\delta_i}(D) + W_{\delta'_{K'}}(D).$$

そこで、 $\delta''_K = \min(\delta'_K, \delta_i)$, $\alpha_K = 2\delta'^{-1}_K + \delta_i^{-1}$ とおくと、

$$y_K - y_{K'} \in W_{\delta''_K}(\alpha_K; D).$$

よって、 $\{y_K\}$ は R -Cauchy列である事が、これから容易にわかる。

さて、 $\{y_K\}$ が属する同値類を $\hat{y}$ とすれば、 $\hat{y}$ は $\{\hat{x}_K\}$ の極限である事を証明する。

$j \geq \delta'_K$, $j \geq K \geq i$, $n = \max(m(j, K), \delta'_j, \delta'_K)$ なる十分大なる自然数 j, n に対し、

$$y_j - x_j^{(K)} = (x_{\delta'_j}^{(j)} - x_m^{(j)}) + (x_m^{(j)} - x_m^{(K)}) + (x_m^{(K)} - x_j^{(K)})$$

$$\in W_{\delta'_j}(D) + W_{\delta_i}(\alpha_0(j, K); D) + W_{\delta'_K}(D)$$

そこで, $\delta_k'' = \min(\delta_k', \delta_i)$ とおくと

$$y_i - x_j^{(k)} \in W_{\delta_k''}(D) + W_{\delta_i}(D) + W_{\delta_k'}(D) \subseteq W_{\delta_k''}(2\delta_k'^{-1} + \delta_i^{-1}; D)$$

従って, $\hat{y} - \hat{x}_k \in W_{\delta_k''}(\nu_k; D^*)$ 但し, $\nu_k = 3\delta_k'^{-1} + 2\delta_i^{-1}$
(証明終)

Theorem 11 D^* の部分集合 D_0 を, (D, W_i) における同じ要素からなる R -Cauchy列を含む同値類の全体とする。 D から D_0 への mapping F を, D の要素 x に対し, x のみからなる R -Cauchy列を含む同値類 $\hat{x}$ を対応させることにより定義すれば, F は bijective であって, $x \in W_i(\nu; D)$ ならば $\hat{x} \in W_i(\nu; D^*)$ であり, 逆も真である。

(証明) x, y を D における相異なる要素とする。この時, $x_n = x$, $y_n = y$ なる2つの R -Cauchy $\{x_n\}, \{y_n\}$ を同時に含む同値類は存在しない。何故ならば, $\{x_n\}, \{y_n\}$ を含む同値類があれば, $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ である。従って, ある基本近傍列 $\{W_{\delta_i}(D)\}$ があって

$$x_i - y_i \in W_{\delta_i}(D) \quad \text{for all } i$$

従って, $x = y$ 这不合理となるからである。次に

$x \in W_i(\nu; D)$ とある, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ とおけば $\sum_{k=1}^i |\xi_k|^2 < \nu^2$
従って $0 < \nu_1 < \nu$ なる正数 ν_1 が存在して

$$\sum_{k=1}^i |\xi_k|^2 < \nu_1^2 < \nu^2$$

よって, $x_n = x$ から $x_n \in W_i(\gamma_i; D)$ 故に $\hat{x} \in W_i(\gamma_i; D^*)$.
 逆も容易に証明される。 (証明終)

Theorem 12 D_0 は D^* で dense である。

(証明) $\hat{x}$ を D^* における任意の要素とする。そして $\{x_n\}$ を $\hat{x}$ に属する R-Cauchy 列とすると, ある基本近傍列 $\{W_{\delta_i}(D)\}$ が存在して, $n \geq i, m \geq i$ ならば,

$$x_n - x_m \in W_{\delta_i}(D)$$

x_n のみからなる R-Cauchy 列を, $\hat{x}_n$ とすると

$$\hat{x}_n - \hat{x} \in W_{\delta_i}(\gamma_i^{-1}; D^*) \quad \text{for } n \geq i$$

これ即ち $\hat{x}_n \rightarrow \hat{x}$ を示している。 (証明終)

さて, $\hat{x}$ を D^* の任意の要素とし, $\{x_n\}$ を $\hat{x}$ に属する R-Cauchy 列とする。従って, ある基本近傍列 $\{W_{\delta_i}(D)\}$ が存在して,

$$x_n - x_m \in W_{\delta_i}(D) \quad \text{for } n, m \geq i$$

が成立。今 $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} e_k$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{\gamma_i} |\xi_k^{(n)} - \xi_k^{(m)}|^2 < \gamma_i^{-2}$$

故に, $\{\xi_k^{(n)}\}_n$ は数の Cauchy 列である。従って, 極限 γ_k がある。同様にして, すべての k に対して $\{\xi_k^{(n)}\}_n$ の極限 γ_k が存在する。このとき, 数列 $\{\gamma_k\}_k$ は $\hat{x}$ の γ に関連して, $\{x_n\}$ の

とり方には無関係であることが容易にわかる。逆に、任意の数列 $\{\gamma_k\}_k$ が与えられたとき、 $y_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k e_k$ とおくと、 $\{y_n\}_n$ は (D, w_i) における R -Cauchy 列である。よって $\{y_n\}$ を含む同値類を $\hat{y}$ とする。かくして、 $\hat{y} \in \hat{D}^*$ から数列 $\{\gamma_k\}_k$ への対応は bijective である事は容易にわかる。そこで、 $\{\gamma_k\}_k$ を任意の数列としたとき、ideal element $y = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k \in D$ に付加したものを $\hat{D}$ とすれば、 $\hat{D}$ は次の Theorem 13, 14 によって R -Complete space で、 $\gamma \in D$ は D は dense となる。

Theorem 13 $\hat{y} \in \hat{D}^*$ から $\hat{D}$ の ideal element $y = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k$ への上記の表に定めた対応は linear で bijective である。

さて、linear space $\hat{D}$ において、原点の近傍 $w_i(r; \hat{D})$ を次の表に定義する。

$$w_i(r; \hat{D}) = \{x \in \hat{D}; (\sum_{k=1}^i |\gamma_k|^2)^{1/2} < r \text{ for } x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k\}$$

特に、 $w_i(\hat{D}) = w_i(1; \hat{D})$ for $i \geq 1$ において、これを rank i の原点の近傍とよぶ。空間 $\hat{D}$ は rank zero の近傍であるとし $w_0(\hat{D})$ でこれを示す。 $x + w_i(\hat{D})$ を $\hat{D}$ の点 x の rank i の近傍と定義する。

Theorem 14 上記の対応により、 $\hat{x} \in D^*$ に対し、 $y = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k \in \hat{D}$ が対応するとする。このとき $\hat{x} \in W_i(r; D^*)$ ならば $y \in W_i(r; \hat{D})$ であり、逆も成立つ。

(証明) $\hat{x} \in W_i(r; D^*)$ とする。 $\hat{x}$ に属する、ある R-Cauchy 列 $\{x_n\}$ に対し、ある自然数 m と、 $0 < r_1 < r$ なるある正数 r_1 が存在して

$$x_n \in W_i(r_1; D) \quad \text{for } n \geq m$$

が成立つ。 $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{(n)} e_k$ とおくと

$$\sum_{k=1}^i |\xi_k^{(n)}|^2 < r_1^2 < r^2 \quad \text{for } n \geq m$$

となるが、 $\xi_k^{(n)} \rightarrow \gamma_k$ as $n \rightarrow \infty$ であるから、

$$\sum_{k=1}^i |\gamma_k|^2 \leq r_1^2 < r^2$$

従って、 $y \in W_i(r; \hat{D})$

逆に、 $y \in W_i(r; \hat{D})$ とする。 $y_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k e_k$ とし、 $r_1 = \left(\sum_{k=1}^i |\gamma_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

とすれば、 $r_1 < r$ であり、 $r_2 = \frac{1}{2}(r + r_1)$ とおくと

$r_1 < r_2 < r$ 故に $y_n \in W_i(r_2; D)$ for all n .

$\{y_n\}$ は $\hat{x}$ に属することは容易にわかるから $\hat{x} \in W_i(r; D^*)$

(証明終)

今後は、原典の近傍系として $\{W_i(r; \hat{D})\}$ をもつ R-complete linear ranked space $\hat{D} \in (\hat{D}, W_i)$ と書き、 (D, W_i) の completion とする。

§ 6 Continuous linear functional on (D, π_i)

この節では、 (D, π_i) における連続線形汎関数は $\hat{D}$ の要素として表現される事を示す。

Definition f を (D, π_i) で定義された任意の線形汎関数とする。 (D, π_i) における任意の収束列 $x_n \rightarrow x$ に対して、 $\lim f(x_n) = f(x)$ ならば、 f は連続であるという。

Theorem 15 f を (D, π_i) における連続線形汎関数とする。そのとき、ある自然数 i が存在して、

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{-i} f(e_k)| \text{ は収束する。}$$

(証明) 任意の自然数 i に対し、 $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{-i} f(e_k)|$ は収束しないと仮定する。正数 M に対し、ある自然数列 $\{n_j\}$ (但し $n_0 = N$, $n_j < n_{j+1}$) が存在して、

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} |\lambda_k^{-(j+2)} f(e_k)| > M \quad \text{for every } j$$

と出来る。

$$x_j = \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \overline{f(e_k)} |f(e_k)|^{-1} \lambda_k^{-(j+2)} e_k$$

とすると $x_j \in \pi_1(r_1, d; D)$ for $j \geq 0$ (但し $\sum_{k=N}^{\infty} \lambda_k^{-4} = r_1^2$, $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} = d^2$), $x_j \in \pi_2(r_2, d; D)$ for $j \geq 1$ (但し $\sum_{k=n_1}^{\infty} \lambda_k^{-4} = r_2^2$)
一般に, $x_j \in \pi_i(r_i, d; D)$ for $j \geq i-1$ (但し $\sum_{k=n_{i-1}}^{\infty} \lambda_k^{-4} = r_i^2$)。

従って, $x_j \rightarrow 0$ in (D, π_i) しかし $\nexists s, f(x_j) > M$ これは矛盾である (証明終)

Theorem 16 f を (D, π_i) における連続線形汎関数で, ある自然数 i に対して, $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{-i} f(e_k)|^2$ が収束するものとする。この時, 任意の $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \in (D, \pi_i)$ に対して,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) \text{ が成立つ。}$$

(証明) 任意の $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k \in (D, \pi_i)$ に対して, $x_n = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$ とおくと $x_n \rightarrow x$ であるから $f(x_n) \rightarrow f(x)$ 。

一方 $f(x_n) = \sum_{k=1}^n \xi_k f(e_k)$ であるから

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k) - \sum_{k=1}^n \xi_k f(e_k) \right| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k^{-i} f(e_k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k^i \xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

より $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f(e_k)$ を得る (証明終)

そこで, $\hat{D}$ の要素 $y = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k$ で自然数 n に対して,
 $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{-n} \gamma_k|^2 < \infty$ とする y の全体を $L^{(n)}$ とかく事にする。すると (D, π_i) における連続線形汎関数 f に対し, $y = \sum_{k=1}^{\infty} f(e_k) e_k$ を対応させる事によって, (D, π_i) における, すべての連続線形汎関数は $\bigcup_n L^{(n)}$ と同一視することが出来る。

さて, linear space $L^{(n)}$ において, 基底の逆像 $\pi_i^*(e_k, d; L^{(n)})$ を次の様に定義する。

$$\pi_i^*(r, d; L^{(n)}) = \left\{ y \in L^{(n)}; \left(\sum_{k=1}^i |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < r, \left(\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{-n} y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < d \right. \\ \left. \text{for } y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k \right\}$$

特に, $\pi_i^*(L^{(n)}) = \pi_i^*(1/i, 1; L^{(n)})$ for $i \geq 1$ とおいて, これを rank i の近傍と呼ぶ。更に $L^{(n)}$ を rank zero の近傍として $\pi_0^*(L^{(n)})$ とかく。 $y + \pi_i^*(L^{(n)}) \in L^{(n)}$ のとき y の rank i の近傍と定義する。

Lemma 4 (1) $\pi_i^*(r, d; L^{(n)})$ は circled である。

(2) $\pi_{i+1}^*(r', d'; L^{(n)}) \subseteq \pi_i^*(r, d; L^{(n)})$ if $r' \leq r, d' \leq d$.

(3) $\lambda \pi_i^*(r, d; L^{(n)}) = \pi_i^*(\lambda r, \lambda d; L^{(n)})$ for $\lambda > 0$.

(4) $\pi_i^*(r, d; L^{(n)}) + \pi_i^*(r', d'; L^{(n)}) \subseteq \pi_i^*(r+r', d+d'; L^{(n)})$.

Theorem 17 $\{\pi_{\delta_i}^*(L^{(n)})\}$ を $L^{(n)}$ における基本近傍列とする。もし $y \in \pi_{\delta_i}^*(L^{(n)})$ for all i ならば, $y = 0$, 即ち $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k$ とすれば $y_k = 0$.

Theorem 18 $\{\pi_{\delta_i}^*(r_i, d_i; L^{(n)})\}$ を次の性質をもつ近傍列とする。即ち, $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_i \leq \dots \rightarrow \infty, r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_i \geq \dots \rightarrow 0, d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_i \geq \dots \rightarrow 0$. その時, ある基本近傍列 $\{\pi_{\delta_i}^*(L^{(n)})\}$ が存在して, $\pi_{\delta_i}^*(r_i, d_i; L^{(n)}) \subseteq \pi_{\delta_i}^*(L^{(n)})$ for all i .

(証明) 明か。

上の標に定義した近傍 $\pi_i^*(r, d; L^{(n)})$ をもつ linear space $L^{(n)}$ は linear ranked space である事はすぐわかる。

さて, 任意の自然数 n に対して, $L^{(n)} \subseteq L^{(n+1)}$ であるが, ranked space の意味で inductive limit $\bigcup_n L^{(n)}$ を構成しよう。この場合, 上で定義した $L^{(n)}$ における近傍 $\pi_i^*(r, d; L^{(n)})$ をそのまま, $\bigcup_n L^{(n)}$ における近傍として採用し, $\pi_i^*(L^{(n)})$, $i \geq 1$ を $\bigcup_n L^{(n)}$ における原点の rank i の近傍とよぶ。 $\bigcup_n L^{(n)}$ 自身を rank zero の近傍とし, $\pi_0^*(\bigcup L^{(n)})$ とかく事にする。 $\bigcup L^{(n)}$ における点 x の rank i の近傍は $x + \pi_i^*(L^{(n)})$ と定義する。この inductive limit $\bigcup L^{(n)}$ は linear ranked space である事は容易に証明される。次の Theorem 19, 20 は inductive limit $\bigcup L^{(n)}$ における収束は, 必然的に擬収束となることを示す。

Theorem 19 もし $\pi_i^*(r, d; L^{(n)}) \supseteq \pi_i^*(r, d'; L^{(m)})$,
(但し $d \geq d'$, $n \neq m$) ならば, $n > m$ 。

(証明) $n < m$ とすれば矛盾となることを示す。

$d = d'$ の場合: 今自然数 $N_1 \in N_1 > \max(i, N)$ なる標に定

め, $y = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k$ を次の振数要素とする.

$$\begin{cases} \gamma_{N_1} = (d/\sqrt{\lambda_{N_1}}) \lambda_{N_1}^m \\ \gamma_k = 0 & \text{for } k \neq N_1 \end{cases}$$

このとき, $\sum_{k=1}^i |\gamma_k|^2 = 0$, $\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{-m} \gamma_k|^2 = d^2 \lambda_{N_1}^{-1} < d^2$

より $y \in \pi_i^*(r, d; L^{(n)})$

しかし, $\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{-n} \gamma_k|^2 = d^2 \lambda_{N_1}^{2m-2n-1} > d^2$

より $y \notin \pi_i^*(r, d; L^{(n)})$

これは, 仮定に反する。

$d > d'$ の場合: 十分大なる自然数 N_1 をとって, $\lambda_{N_1} d'^2 > d^2$

($\because \lambda_k \rightarrow \infty$, as $k \rightarrow \infty$) 且つ, $N_1 > \max(i, N)$ としておく。

さて, $y = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k$ を次の振数要素とする。

$$\begin{cases} \gamma_{N_1} = (d'/\sqrt{\lambda_{N_1}}) \lambda_{N_1}^m \\ \gamma_k = 0 & \text{for } k \neq N_1 \end{cases}$$

このとき, $\sum_{k=1}^i |\gamma_k|^2 = 0$, $\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{-m} \gamma_k|^2 = d'^2 \lambda_{N_1}^{-1} < d'^2$

より $y \in \pi_i^*(r, d'; L^{(n)})$

しかし, $\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{-n} \gamma_k|^2 = \lambda_{N_1}^{2m-2n-1} d'^2 \geq \lambda_{N_1} d'^2 > d^2$

より $y \notin \pi_i^*(r, d; L^{(n)})$

これは, 仮定に反する。

Theorem 20 $\{\pi_{j_i}^*(L^{(n)})\}$ を $\bigcup_n L^{(n)}$ における原典の
基本近傍列をとると, 即ち,

$$\begin{cases} \pi_{\delta_1}^*(L^{(n_1)}) \geq \pi_{\delta_2}^*(L^{(n_2)}) \geq \dots \geq \pi_{\delta_i}^*(L^{(n_i)}) \geq \dots \\ \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_i \leq \dots \rightarrow \infty \end{cases}$$

とすると, 必然的に $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_i \geq \dots \geq 1$ である. 従って, ある自然数 j があって

$$n_j = n_{j+1} = \dots \geq 1 \quad \text{が成立つ.}$$

Theorem 21 $\{\pi_{\delta_i}^*(r_i, d_i; L^{(n_i)})\}$ を次の性質をもつ近傍列とする.

$$\begin{cases} \pi_{\delta_1}^*(r_1, d_1; L^{(n_1)}) \geq \pi_{\delta_2}^*(r_2, d_2; L^{(n_2)}) \geq \dots \geq \pi_{\delta_i}^*(r_i, d_i; L^{(n_i)}) \geq \dots, \\ \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_i \leq \dots \rightarrow \infty, \quad r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_i \geq \dots \rightarrow 0, \\ d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_i \geq \dots. \end{cases}$$

すると, ある基本近傍列 $\{\pi_{\delta_i}^*(L^{(n_i)})\}$ が存在して

$$\pi_{\delta_i}^*(r_i, d_i; L^{(n_i)}) \leq \pi_{\delta_i}^*(L^{(n_i)}) \quad \text{for all } i$$

が成立つ.

(証明) $\pi_{\delta_i}^*(r_i, d_i; L^{(n_i)})$ for $\delta_i \geq 1$ に属する要素 $y = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k$ に対し $\sum_{k=1}^{\delta_i} |\gamma_k|^2 < r_i^2$, $\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{-n_i} \gamma_k|^2 < d_i^2$ が成立つ.

そこで, 十分大なる自然数 $m_0 = \max_i(n_i)$ とすれば

$$\sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{-m_0} \gamma_k|^2 < (\lambda_N^{-m_0+n_j})^2 \sum_{k=N}^{\infty} |\lambda_k^{-n_j} \gamma_k|^2 < 1$$

と出来る. 従って, 十分大なる自然数 j_1 とすれば

$$\pi_{\delta_i}^*(r_i, d_i; L^{(n_i)}) \leq \pi_{\delta_i}^*(L^{(n_i)}) \quad \text{for } i \geq j_1$$

が成立つ。同様に $\pi_2^*(L^{(m)})$ に対して十分大なる自然数 $j_2 > j_1$ をとれば, $\pi_{j_i}^*(r_i, d_i; L^{(m)}) \subseteq \pi_2^*(L^{(m)})$ for $i \geq j_2$ と出来る。以下同様にして証明することが出来る (証明終)

上記の近傍をもつ linear space $\bigcup_n L^{(n)} \subseteq (U L^{(n)}, \pi_i^*)$ とかくことにする。すると linear ranked space $\hat{D}$ では

$$D \subset \mathcal{H} \subset \bigcup_n L^{(n)} \subset \hat{D}$$

なる関係が成立し, 更に収束については,

- (1) $x_m \rightarrow x$ in (D, π_i) ならば $x_m \rightarrow x$ in $\mathcal{H}$.
- (2) $x_m \rightarrow x$ in $\mathcal{H}$ ならば $x_m \rightarrow x$ in $(\bigcup_n L^{(n)}, \pi_i^*)$
- (3) $x_m \rightarrow x$ in $(\bigcup_n L^{(n)}, \pi_i^*)$ ならば $x_m \rightarrow x$ in $(\hat{D}, \pi_i)$

が成立つ。

次の定理は各處で収束する連続線形関数列の列は, 汎関数として収束することを示す。

Theorem 22. $\{y_n\} \subseteq (\bigcup_n L^{(n)}, \pi_i^*)$ に属する要素列 (即ち, 連続線形関数列) とする。そして $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(n)} e_k$ とおいたとき, (D, π_i) の任意の点 $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ に対して, $y_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \xi_k$ が収束するとすれば, 実は $\{y_n\}$ は $(\bigcup_n L^{(n)}, \pi_i^*)$ において収束する。

(証明) linear ranked space において証明された,
 Banach-Steinhaus theorem [9] を使って $\lim y_n(x) = y(x)$
 なる $y(x)$ は連続線形関数となることがわかる。一方, また
 linear ranked space においての一極有界性定理 [9] によ
 って, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある近傍 $\cap \pi_i(D) + x_0$ ($\cap > 0$)
 が存在して,

$|y_n(x)| < \varepsilon$ if $x \in \cap \pi_i(D) + x_0$ and all n
 が成立つ。このとき, 一般性を失う事なく, $i > N$ と仮定出
 来る。そこで, $x \in \pi_i(D)$ に対して

$$\begin{aligned} |y_n(x)| &= |y_n(\cap^{-1}(\cap x + x_0) - \cap^{-1}x_0)| \\ &\leq \cap^{-1} |y_n(\cap x + x_0)| + |\cap^{-1} y_n(x_0)| \\ &\leq \cap^{-1} \varepsilon + \sup_m |\cap^{-1} y_m(x_0)| \end{aligned}$$

±て, 十分小なる $\delta > 0$ とすれば

$$\{x \in D; (\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^i \xi_k|^2)^{\frac{1}{2}} < \delta\} \subset \pi_i(D)$$

と出来るので, ある正数 $M > 0$ に対して

$$|y_n(x)| \leq M \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^i \xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{if } x \in D$$

とすることが出来る。

$$\text{もし } x_m = \sum_{k=1}^m \lambda_k^{-2i} \overline{y_k^{(m)}} e_k \quad \text{とおくと}$$

$$|y_n(x_m)| = \sum_{k=1}^m |\lambda_k^{-i} y_k^{(n)}|^2 \leq M \left(\sum_{k=1}^m |\lambda_k^{-i} y_k^{(n)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

故に

$$\left(\sum_{k=1}^m |\lambda_k^{-i} y_k^{(n)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq M.$$

$$y_k^{(n)} = y_n(e_k) \rightarrow y(e_k) \quad \text{だから}$$

$$\left(\sum_{k=1}^m |\lambda_k^{-i} \gamma(e_k)|^2\right)^{1/2} \leq M$$

自然数 m は任意でよいから

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{-i} \gamma(e_k)|^2\right)^{1/2} \leq M.$$

同様に

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{-i} \gamma_k^{(n)}|^2\right)^{1/2} \leq M$$

も得るから γ_n と $\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma(e_k) e_k$ は $L^{(i)}$ に属する。

$\gamma_k^{(n)} \rightarrow \gamma(e_k)$ であるから、自然数 j_1 を十分大にすれば

$$\gamma_n - \gamma \in \pi_1^*(1, 3M; L^{(i)}) \quad \text{for } n \geq j_1$$

と出来る。次に十分大なる自然数 $j_2 > j_1$ をとれば、

$$\gamma_n - \gamma \in \pi_2^*(1/2, 3M; L^{(i)}) \quad \text{for } n \geq j_2$$

と出来る。以下これを繰り返して、 $\gamma_n \rightarrow \gamma$ in $(\cup L^{(i)}, \pi_i^*)$ なる事がわかる。

§7 Kernel theorem.

Theorem 23 $B(x, y)$ を (D, π_i) における連続な bilinear form とすると、ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ のある要素、 a_k, b_k とある自然数 i, j が存在して、

$$B(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (T^{i+2} x, a_k) (T^{j+2} y, b_k)$$

と表現される。

(証明) 最初に、ある非負の数 M と、ある自然数 i, j が存在

$$\text{して } |B(x, y)| \leq M \quad \text{for } x \in \pi_i(D), y \in \pi_j(D)$$

が成立つ事を証明しよう。もしこれが成立ぬとすれば、基本近傍列 $\{\pi_i(D)\}$ に対して、 $\pi_i(D)$ に属する要素 x_i, y_i をとって

$$|B(x_i, y_i)| > i \quad \text{for all } i$$

と出来る。

今 $P_i(y) = B(x_i, y)$ とおくと、 $x_i \rightarrow 0$ であるから連続線形汎関数の列 $\{P_i(y)\}$ は、任意の $y \in D$ に対して有界である。従つて、linear ranked space における一極有界性定理[9]によつて、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある近傍 $\sim \pi_{j_0}(D) + y_0$ ($\varepsilon > 0$) が存在して、

$$|P_i(y)| < \varepsilon \quad \text{if } y \in \sim \pi_{j_0}(D) + y_0 \text{ and all } i.$$

が成立つ。かくて $y \in \pi_{j_0}(D)$ なる任意の y に対して

$$\begin{aligned} |B(x_i, y)| &= |B(x_i, \tau^{-1}(\tau y + y_0) - \tau^{-1} y_0)| \\ &\leq \tau^{-1} |B(x_i, \tau y + y_0)| + \tau^{-1} |B(x_i, y_0)| \\ &\leq \tau^{-1} \varepsilon + \tau^{-1} \sup_n |P_n(y_0)| \end{aligned}$$

これは $\exists y_i \in \pi_i(D)$

$$|B(x_i, y_i)| > i \quad \text{for all } i \quad \text{に反する。}$$

よつて、ある非負の数 M と、ある自然数 i, j が存在して、

$$|B(x, y)| \leq M \quad \text{for } x \in \pi_i(D), y \in \pi_j(D).$$

が成立つ。さて、 $K > \max(i, N)$ に対しては、

$$\{\lambda_k^{-(i+1)} e_k\} \subset \pi_i(D)$$

また, $n > \max(j, N)$ に対しては

$$\{\lambda_n^{-(j+1)} e_n\} \subset \mathcal{U}_j(D)$$

従って, $|B(\lambda_k^{-(i+1)} e_k, \lambda_n^{-(j+1)} e_n)| \leq M$.

従って, $\sum_{k,n=1}^{\infty} \lambda_k^{-(i+2)} \lambda_n^{-(j+2)} |B(e_k, e_n)| \leq \sum_{k,n=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \lambda_n^{-1} M$

故に, $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n^{-(j+2)} B(e_k, e_n)|$ は収束する。

$\lambda_n = |\mu_n|^{-1}$ であつたから, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に, ある要素 b_k が存在して, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n^{j+2} B(e_k, e_n) = b_k$ となる。一方

任意の $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$, $y = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k e_k$ に対して, $x_n = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, $y_m = \sum_{k=1}^m \eta_k e_k$ とおくと, $x_n \rightarrow x$, $y_m \rightarrow y$ であるから

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \sum_{k,n=1}^{\infty} \xi_k \eta_n B(e_k, e_n) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{-(j+2)} \eta_n \mu_n^{(j+2)} B(e_k, e_n) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (T^{j+2} y, b_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{-(i+2)} \xi_k \mu_k^{(i+2)} (T^{j+2} y, b_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (T^{i+2} x, a_k) (T^{j+2} y, b_k) \end{aligned}$$

但し, $a_k = \mu_k^{(i+2)} e_k$ とする。

§ 8 Measure

この節では, linear ranked space $\mathcal{H}$ に Gaussian measure を定義する。

Definition A を $\{e_k\}_{k=1, \dots, n}$ から生成された n -次元の部分空間 E_n における Borel set とする。次の様に集合 Z を定義する。

$$Z = \{x \in \hat{D} ; \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \in A \text{ for } x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k\}$$

そして、これを部分空間 E_n における Borel base A をもつ Borel cylinder set Z とよぶ。

上に定義した cylinder sets は集合の代数となる。即ち

- (1) 任意の Borel cylinder set の complement は Borel cylinder set である。
- (2) 任意の 2 つの Borel cylinder sets の共通部分は Borel cylinder set である。
- (3) 任意の 2 つの Borel cylinder sets の和は Borel cylinder set である。

さて、Borel cylinder set の class を拡張しよう。部分空間 E_i における Borel base をもつ Borel cylinder set の class を $\tilde{R}_i$ とかく事にする。次に $\bigcup_i \tilde{R}_i$ に属する要素の countable union と、その complement の全体を B_0 とかく事にする。そして B_0 は 0 番目の class の Borel set と

よび。 α を Ω より小さな順序数としたとき, α より小さな任意の順序数 β に対して, β 番目の class の Borel set は既に定義されたとする。その時 B_α を α より小さな順序数の class の要素の countable union と, その complement の全体とする。この根にして, Ω より小さなすべての順序数に対して B_α が定義される。そして $\bigcup_{\alpha < \Omega} B_\alpha$ の要素を Borel cylinder set の Borel set とよびこえる。

さて, Borel cylinder set に Gaussian measure を定義する。

Definition 部分空間 E_n における Borel base A をもつ Borel cylinder set Z に対し, 次の根に Gaussian measure を定義する。

$$\mu(Z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{x_n \in A} \exp(-2^{-1} \sum_{k=1}^n |(x_n, e_k)|^2) d_n x$$

但し, x_n は $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ の E_n への projection, 即ち $x_n = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, $d_n x$ は $(x, x)_n = \sum_{k=1}^n |\xi_k|^2$ に関する Lebesgue measure. $\mu(Z)$ を Z の Gaussian measure とよび。

Lemma 5 $\{\alpha_k\}, \alpha_k > 0$ を任意の数列とする。その時 $S = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k(\alpha_k)$, 但し $S_k(\alpha_k) = \{x \in \hat{D}; |\xi_k| \leq \alpha_k \text{ for } x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k\}$,

とおくと, S は seminorm $g_k(x) = |x_k|$ に関して sequential compact である。

(証明) $\{x_v\}$ を S の中の無限集合とする。すると, ある部分列 $\{x_{1,v}\}$ が存在して $\{(x_{1,v}, e_1)\}$ が収束する極に出来る。また, $\{x_{1,v}\}$ の部分列 $\{x_{2,v}\}$ が存在して, $\{(x_{2,v}, e_2)\}$ が収束する極に出来る。かくて, この操作を繰り返して, その対角線にとった部分列 $\{x_{v,v}\}$ は, すべての seminorm に関して収束する。そして $\beta_k = \lim_{v \rightarrow \infty} (x_{v,v}, e_k)$ とおくと, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k$ はその極で, しかも $x \in S$. (証明終)

Theorem 24 $\{Z_k\}$ を open cylinder set の列で $\hat{D} = \bigcup_k Z_k$ とする。そのとき, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \geq 1$.

(証明) $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\{\alpha_k\}, (\alpha_k > 0)$ を次の様な数列とする。

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{|(x, e_k)| > \alpha_k} \exp(-2^{-1}|(x, e_k)|^2) (dx)^{(k)} < \varepsilon / 2^k$$

但し, $(dx)^{(k)}$ は $|(x, e_k)|$ に関する Lebesgue measure.

このとき, $S = \bigcap_k S_k(\alpha_k)$, $S_k(\alpha_k) = \{x \in \hat{D}; |(x, e_k)| \leq \alpha_k\}$. とおくと $S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ である。一方, Z_k は open base である $\rightarrow$ cylinder set 即ち Z_k は weak topology の open set である。

3. 従って, S は Z_k の有限个で cover される。それを $Z_{n_1}, \dots$

$$Z_{n_k} \text{ とすれば, } S \subset \bigcup_{j=1}^k Z_{n_j}$$

今 $\bigcup_{j=1}^k Z_{n_j}$ を Z とかく事にすれば, Z_k はある有限次元部分空間 E_{n_k} における Borel base をもつので, Z は $m = \max_{j=1, \dots, k} (n_{n_j})$ なる有限次元部分空間 E_m の Borel set $A \in \text{base}$ にある。

γ によって $\hat{\sigma}$ から E_m への projection を P とすれば

$$P(S) \subset A$$

また, $P(S) = \bigcap_{k=1}^m P(S_k(\alpha_k))$ であるから, A と $P(S_k(\alpha_k))$ の E_m に関する補集合を $A', S'_k(\alpha_k)$ とかくと

$$A' \subset \bigcup_{k=1}^m S'_k(\alpha_k)$$

E_m における $S'_k(\alpha_k)$ を base にもつ cylinder set $S'_k(\alpha_k)^*$ とかくと

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^m S'_k(\alpha_k)^*\right) \geq \mu(\hat{\sigma} - Z) = 1 - \mu(Z)$$

μ の有限加法性から,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \mu(S'_k(\alpha_k)^*) &\geq 1 - \mu(Z) = 1 - \mu\left(\bigcup_{j=1}^k Z_{n_j}\right) \\ &\geq 1 - \sum_{j=1}^k \mu(Z_{n_j}) \end{aligned}$$

仮定から

$$\mu(S'_k(\alpha_k)^*) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{|(x, e_k)| > \alpha_k} \exp(-2^{-1} |(x, e_k)|^2) (dx)^{(n)} < \varepsilon/2^k$$

故に

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (\varepsilon/2^k) &\geq 1 - \sum_{j=1}^k \mu(Z_{n_j}) \\ \varepsilon &> 1 - \sum_{j=1}^k \mu(Z_{n_j}) \end{aligned}$$

従って, $\sum_{j=1}^N \mu(Z_{n_j}) > 1 - \varepsilon$

ε は任意であるから

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \geq 1 \quad (\text{証明終})$$

Theorem 25. Gaussian measure μ が countably additive である必要且十分の条件は $\hat{\Omega} = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ となる相互素な Borel cylinder set の列 $\{Z_k\}$ に対して

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) = 1$$

となることである。

(証明) 十分であることのみに証明する。 Z を cylinder set とし, $Z = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ を相互素な cylinder set Z_k への分解であるとする。すると

$$\hat{\Omega} = (\hat{\Omega} - Z) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k \right)$$

が成立。 $\hat{\Omega} - Z$ も cylinder set だから, 仮定より

$$\mu(\hat{\Omega} - Z) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) = 1$$

μ の有限加法性より

$$\mu(\hat{\Omega} - Z) = 1 - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k\right)$$

従って

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k).$$

Theorem 26 Gaussian measure μ が countably

additive である必要且十分な条件は $\hat{C} = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$ なる極な Borel cylinder set の列 $\{Z_k\}$ に對して,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \geq 1$$

となることである。

(証明) 十分であることの μ を証明する。今互に素な Borel cylinder set の列 $\{Z_k\}$ をとる。(但し, $\hat{C} = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_k$).

μ の有限加性性より $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \leq 1$

一方、この空理の仮定より

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) \geq 1$$

従つて

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Z_k) = 1. \quad (\text{証明終})$$

Lemma 6 X を $\hat{C}$ の部分集合であつて, E_n への projection A_n は Borel set であるとする。そして Z_n を Borel base A_n をもつ Borel cylinder set とすると,

$$\mu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(Z_n)$$

が成立つ。

(証明) 仮定によつて、次の式が成立つ。

$$Z_1 = \{x \in \hat{C}; \quad \xi_1 e_1 \in A_1 \text{ for } x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k\}$$

$$Z_2 = \{x \in \hat{C}; \quad \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 \in A_2 \text{ for } x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k\}$$

一般に $Z_n = \{x \in \hat{D}; \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \in A_n \text{ for } x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k\}$.

従って $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} Z_n$, 或は $X' = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z'_n$.

$$\mu(X') = \mu(Z'_1) + \mu(Z'_2 - Z'_1) + \cdots + \mu(Z'_n - Z'_{n-1}) + \cdots$$

$$1 - \mu(X) = \mu(Z'_1) + \mu(Z'_2 \cap Z_1) + \cdots + \mu(Z'_n \cap Z_{n-1}) + \cdots$$

しかるに, $\mu(Z_2) + \mu(Z'_2) = 1$

$$\mu(Z_2) + \mu(Z'_2 \cap Z_1) + \mu(Z'_2 \cap Z'_1) = 1$$

$$Z'_2 \supset Z'_1 \text{ 故 } \mu(Z_2) = 1 - \mu(Z'_1) - \mu(Z'_2 \cap Z_1)$$

一般に $\mu(Z_n) = 1 - \mu(Z'_1) - \cdots - \mu(Z'_n \cap Z_{n-1})$

従って, $\mu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(Z_n)$ (証明終)

Theorem 27 $\mu(X) = 0$ ならば, $\mu(X + e_n) = 0$.

(証明) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\mu(X + e_n) < \varepsilon$ となることを証明する。 $\alpha_k > 0$ を

$$\begin{cases} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{|(x, e_k)| > \alpha_k} \exp(-2^{-1}|(x, e_k)|^2) (dx)^{(n)} < (\varepsilon/2^k) \\ \text{但し } (dx)^{(n)} \text{ は } |(x, e_k)| \text{ に関する Lebesgue measure} \end{cases}$$

を満足する実数とする。

$S = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k(\alpha_k)$, 但し $S_k(\alpha_k) = \{x \in \hat{D}; |(x, e_k)| \leq \alpha_k\}$ とすれば

$$\mu(\hat{D} - S) = \mu(\hat{D} - \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k(\alpha_k)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k = \varepsilon$$

今 $S_1 = S - e_R$, $X_1 = X \cap S_1$, $X_2 = X - X_1$ とおく. $y \notin X_2 + e_R$ に属する要素とすると,

$$y - e_R \in X_2 = X \cap (\hat{D} - S_1)$$

従って, $y - e_R \in \hat{D} - S_1$

これより $X_2 + e_R \subset \hat{D} - S$ を得る

$$\text{よって } \mu(X_2 + e_R) \leq \mu(\hat{D} - S) < \varepsilon.$$

また, X_1 の部分空間 E_n への projection を A_n とし, A_n を base とする cylinder set を Z_n とする. とすると

$$Z_1 \supset Z_2 \supset \cdots \supset Z_n \supset \cdots \supset X_1$$

従って, $\mu(Z_n) \rightarrow \mu(X_1) = 0$

$$\text{よって, } Z_1 + e_R \supset Z_2 + e_R \supset \cdots \supset Z_n + e_R \supset \cdots \supset X_1 + e_R$$

$$\mu(Z_n + e_R) \geq \mu(X_1 + e_R)$$

よって $X_1 = X \cap S_1 \subset S_1$ だから, $n > n_0$ なる自然数 n に対し

では

$$Z_n \subset \left[\bigcap_{i=1}^{R-1} S_i(\alpha_i) \right] \cap \{x \in \hat{D}; |(x + e_R, e_R)| \leq \alpha_R\} \cap \left[\bigcap_{i=R+1}^n S_i(\alpha_i) \right]$$

従って,

$$\begin{aligned} \mu(Z_n + e_R) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{A_n + e_R} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2\right) d_n x \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{A_n} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{R-1} |(x, e_i)|^2 + |(x + e_R, e_R)|^2 + \sum_{i=R+1}^n |(x, e_i)|^2 \right)\right] d_n x \\ &\leq \left[(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{A_n} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2\right) d_n x \right] e^{+\alpha_R + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= (e^{+\alpha_n + \frac{1}{2}}) \mu(Z_n)$$

$$\text{従って } \mu(X_1 + e_n) = 0.$$

$$\varepsilon > 2, \quad \mu(X + e_k) = \mu(X_1 + e_n) + \mu(X_2 + e_n) < \varepsilon \quad \text{を得る}$$

(証明終)

文 献

- [1] J.E. Roberts : Rigged Hilbert spaces in quantum mechanics. Commun. Math. Phys. 3, 98-119 (1966).
- [2] K. Kunugi : Sur les espaces completes et régulièrement complete. I. Proc. Japan Acad., 30, 553-556 (1954).
- [3] ——— : Sur la méthode des espaces rangés. I, II. Proc. Japan Acad., 42, 318-322, 549-554 (1966).
- [4] M. Washihara : On ranked spaces and linearity. Proc. Japan Acad., 43, 584-589 (1967).
- [5] I.M. Gelfand and N.Y. Vilenkin : Generalized Functions, Vol. 4 (1964).
- [6] A. Pietsch : Nuclear locally convex spaces, (1972).
- [7] Y. Nagakura : The theory of nuclear spaces treated by the method of ranked space. I, II, III, IV. Proc. Japan Acad., 47, 337-341, 342-345, 870-874, 875-879 (1971).
- [8] ——— : The theory of nuclear spaces treated by the method of ranked space. V, VI, VII. Proc. Japan Acad., 48, 110-115, 221-226, 394-397 (1972).
- [9] ——— : On Banach-Steinhaus theorem. Proc. Japan Acad., 49, 333-336 (1973).