

X 上の $A(X)$ metric

北大 理 林 実樹広

序. 平面上の uniform algebra $A(X)$, $R(X)$ に対して, trivial でない Gleason part の各点が, Gleason metric の孤立点でないということは Browder [2] の定理としてよく知られている. このことが bounded point derivation の場合にも一般化出来ることを [7] で示めた. 先項送られて来た James Li-ming Wang 氏の論文 [8] では, 更に一般に, 高階の bounded point derivation に対しても成立することが, 著者の論文とは独立に, 別の観点から一般化された形で示めされている. §1 ではこれについて述べる. この論文の idea を使えば, capacity による Estimate が高階の場合に対しても同様に計算されることが分かる. これを §2 に述べる. これで $A(X)$, $R(X)$ についての [7] の結果は高階の bounded point derivation の場合にもすべて成立することになる.

また講義時において, $A(X)$ が hypo-dirichlet algebra のと

を $A(X)$ と $R(X)$ による X 上の Gleason metric が等しければ,
 $A(X) = R(X)$ となるということも, admissible (仮称) という条件のもとで述べた. その後, 証明の essential な部分が Bishop の定理からすぐわかること, しかも admissible という条件が不用になることが Gamelin から指摘された. これにより証明はほとんど自明になったが, §3 で簡単に示れることにした.

§1. bounded point derivation on $A(X)$

X は複素平面上の compact set とし, X 上の複素数値連続関数で, X の内部 X° で analytic なもの全体を $A(X)$ とする.

$x \in X$ に対して, $A(X)$ の元で x の近傍に analytic に延長されるもの全体を $A(X; x)$ とする. Arens の lemma から $A(X; x)$ は $A(X)$ で uniformly dense な subalgebra である. triviality を避けるため x は X の孤立点でないとする.

$t=1, 2, \dots$ とし, $f \in A(X; x)$ に対して functional D_x^t を

$$D_x^t : f \mapsto \frac{1}{t!} f^{(t)}(x)$$

により定義する. ここで, $f^{(t)}(x)$ は普通の意味の x における n 階の微分係数である. D_x^t が bounded のとき, 先に述べたことから, D_x^t は $A(X)$ 上に一意に延長され, bounded linear functional となる. これを x における t -th order

の bounded point derivation という。以下では単に t -point derivation ということにする。

さて、 X 上の $A(X)$ -metric (Gleason metric) は

$$\|x-y\|^A = \sup \{ |f(x) - f(y)| : f \in A(X), \|f\| \leq 1 \}$$

により定義される。1-point derivation に関して、次の事柄は互いに同値である。

(1.1) x における 1-point derivation が存在する。

(1.2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(E_n(x; r, a) \setminus X^0)}{(ra^n)^2} < \infty$; $E_n(x; r, a) = \{z; ra^{n+1} < |z-x| < ra^n\}$, $0 < a < 1$ (Hallstrom [6])

(1.3) x における complex 表現測度 μ があつて

$$\int \frac{d|\mu|}{|z-x|} < \infty \quad (\text{Wilken [9]})$$

(1.4) x に収束する点列 $x_n \in X$ があつて、すべての $f \in A(X)$ に対して、 $\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}$ は収束する ([7])。

(1.5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|z - x\|^A}{|z - x|} < \infty$ ([7])。

実は、(1.1), (1.2), (1.3) は同じ形で t -point derivation の場合にも成立する ([6], [9]) が、(1.4) と (1.5) については新に記号を定義する必要がある。以下 Wang に従つて、これを述べよう。 $f \in A(X; x)$ に対して $A(X; x)$ 上の operator R_x^t を

$$f(z) = f(x) + (z-x) D_x^1 f + \cdots + (z-x)^t D_x^t f + R_x^t f(z)$$

によつて定義する。 $D_x^1, D_x^2, \dots, D_x^t$ が bounded な S は、

$R_x^t \in A(X)$ 上の bounded operator に拡張出来る. また $y \in X$ に対して, $A(X; \mathbb{R})$ 上の linear functional $R_{x,y}^t \in$

$$R_{x,y}^t : f \longmapsto R_{x,y}^t(f)$$

により定義する. $h \in \mathbb{C}$ として, 関数 f に対して, $\Delta_h f = f(z+h) - f(z)$ を定義される範囲内で z の関数とし, $\Delta_h^j = \Delta_h \circ \Delta_h^{j-1}$ (for $j > 1$) とする. $f \in A(X)$ とすると $\Delta_h^j f(z)$ は $z, z+h, \dots, z+jh$ がすべて X に含まれようする z に対してのみ定義される.

t -point derivation に関して, 次は同値である.

(t.1) X における t -point derivation が存在する.

$$(t.2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(E_n(x; r, a) \setminus X^0)}{(r\alpha^n)^{t+1}} < \infty \quad (\text{Hallstrom [6]})$$

(t.3) X における complex 表現測度 μ があって

$$\int \frac{d|\mu|}{|z-x|^t} < \infty \quad (\text{Wilken [9]})$$

(t.4) X に収束する点列 $x+h_n \in X$ があって, すべての $f \in A(X)$

に対して $\Delta_{h_n}^t f(z) / (t! h_n^t)$ は収束する. (Wang [8])

$$(t.5) \quad \lim_{|z-x|^t} \frac{\|R_{x,z}^{t-1}\|}{|z-x|^t} < \infty \quad (\text{Wang [8]}).$$

(t.4) 及び (t.5) から (t.1) が導びかれることは容易にわかる (c.f. [7]). 逆は Wang の結果であるが, 彼は Browder の議論をも, と一般的な形で証明して, その他いくつかの興味ある結果を得ている.

記号: $x (\in X)$ は固定して, $\Delta_n = \{z: |z-x| < \frac{1}{n}\}$ とする.

平面上の area measure を $dm (= dx dy)$ とする.

定義] 平面上の可測集合 E が

$$\lim_n \frac{m(E \cap \Delta_n)}{m(\Delta_n)} = 1$$

をみたすとき, E は x において full area density を持つという. 関数 F に対して, x に full area density をもつ集合 E が存在して, E 上では $F(z) \rightarrow a$ (as $z \rightarrow x$) と仮定するとき,

$$\text{app} \lim_{z \rightarrow x} F(z) = a$$

と書く.

定義] 半区間 $(0, +\infty)$ 上で定義された正値 (>0) で, 広義の増加関数 φ が "admissible" とは, $\tilde{\varphi}(r) = \frac{r}{\varphi(r)}$ が広義の増加関数で $\tilde{\varphi}(+0) = 0$ となることをいう. 更に $\int_0^1 \frac{dr}{\varphi(r)} < \infty$ となるとき, "nice admissible" という.

Example: $\varphi(r) = r^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$)

及び, $r_0 > 0$ を十分小さいものとして

$$\varphi(r) = \begin{cases} r (\log \frac{1}{r})^\beta & \text{for } 0 < r < r_0 \\ r_0 (\log \frac{1}{r_0})^\beta & \text{for } r_0 < r \quad (\beta > 1) \end{cases}$$

はともに nice admissible function である.

さて, 半区間 $(0, +\infty)$ 上の正値で, 広義の増加関数 ψ に対して, 平面上の測度 μ の ψ -potential は

$$U_{\mu}^{\psi}(z) = \int \frac{d\mu(\zeta)}{\psi(\zeta-z)}$$

によって定義される. $1/\psi(|z|)$ が $dm (=dx dy)$ に関して locally summable ならば, U_{μ}^{ψ} も dm に関して locally summable となることはすぐわかる. とくに $\psi(r) = r$ のとき,

$$U_{\mu}^{\psi}(z) = \tilde{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(\zeta)}{|\zeta-z|} \text{ は Newton potential である.}$$

ここで, $\delta > 0$ に対して

$$E_{\mu}^{\psi}(\delta) = \{ y \in \mathbb{C} : \psi(|y-z|) U_{\mu}^{\psi}(y) < \delta \}$$

$$E_{\mu}(\delta) = \{ y \in \mathbb{C} : |y-z| \tilde{\mu}(y) < \delta \}$$

によって, 集合 $E_{\mu}^{\psi}(\delta)$, $E_{\mu}(\delta)$ を定義しておく.

次が Browder の補題の一般化である.

補題 1. φ を admissible 関数, μ を X 上の測度として

$$\frac{1}{m(\Delta_n)} \int_{\Delta_n} \tilde{\varphi}(|z-x|) U_{\mu}^{\tilde{\varphi}}(z) dm(z) \rightarrow \mu(\{x\}) \quad (\text{as } n \rightarrow \infty)$$

系 2. $\mu(\{x\}) = 0$ ならば, $E_{\mu}^{\tilde{\varphi}}(\delta)$, $E_{\mu}(\delta)$ は x において full area density をもつ.

この補題は, 更に, 次の様に一般化されている.

補題 1'. E を平面上の Borel set として, $\pi f_n^2 = m(\Delta_n \cap E)$, $dm_n = \frac{n}{f_n} dm|_{\Delta_n \cap E}$ とする. ここで, $dm|_{\Delta_n \cap E}$ は dm を $\Delta_n \cap E$ に与えた測度である. φ, μ は前と同じとして, 更に $\mu(\{x\}) = 0$ とする. このとき,

$$\int \tilde{\varphi}(|z-x|) U_{\mu}^{\tilde{\varphi}}(z) dm_n(z) \rightarrow 0 \quad (\text{as } n \rightarrow \infty).$$

補題1'の証明は Browder の論法と変わるところはないが、その相似性をは、そりさせるために、ここでは補題1の方を証明しよう：

$$F_n(w) = \frac{1}{m(\Delta_n)} \int_{\Delta_n} \frac{\tilde{\varphi}(|z-x|)}{\tilde{\varphi}(|w-z|)} dm(z)$$

と置く。 $F_n(x) = 1$ で、 $w \neq x$ に対しては

$$F_n(w) \leq \frac{\tilde{\varphi}(\frac{1}{n})}{\tilde{\varphi}(|w-x|-\frac{1}{n})} \quad (\rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty).$$

また、任意の $w \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\begin{aligned} F_n(w) &\leq \frac{\tilde{\varphi}(\frac{1}{n})}{m(\Delta_n)} \int_{\Delta_n} \frac{dm(z)}{\tilde{\varphi}(|w-z|)} \leq \frac{\tilde{\varphi}(\frac{1}{n})}{m(\Delta_n)} \int_{\Delta(w; \frac{1}{n})} \frac{dm(z)}{\tilde{\varphi}(|w-z|)} \\ &= \frac{\tilde{\varphi}(\frac{1}{n})}{m(\Delta_n)} \int_{\Delta(0; \frac{1}{n})} \frac{dm(z)}{\tilde{\varphi}(|z|)} = 2 \tilde{\varphi}(\frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{(\frac{1}{n})^2} \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(r) dr \\ &\leq 2 \tilde{\varphi}(\frac{1}{n}) \cdot \frac{\varphi(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})} = 2. \end{aligned}$$

よって、補題は Lebesgue の収束定理の結果である。

系2は次の不等式から明らかである：

$$\frac{m(\Delta_n \setminus E_n^{\tilde{\varphi}}(\delta))}{m(\Delta_n)} \leq \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{m(\Delta_n)} \int_{\Delta_n} \tilde{\varphi}(|y-x|) U_n^{\tilde{\varphi}}(y) dm(y).$$

さて、 x における t -point derivation D_x^t があれば、(t.3)より complex 表現測度 μ があって

$$\int \frac{d|\mu|}{|z-x|^t} < \infty$$

と取る。もちろん $|\mu|(\{x\}) = 0$ である。このとき、適当

な (nice) admissible 関数 φ を作って

$$(*) \quad \int \frac{d|M|}{|z-x|^{t+\varphi(|z-x|)}} < \infty$$

と出来ることは容易に想像される。

定理 3. $\varphi \in \text{admissible 関数}$, $t = 0, 1, 2, \dots$ とする。

(*) をみたす complex 表現測度 μ があれば, x における order t までの point derivation が存在して, $f \in A(X)$ は

$$f = \sum_{j=0}^t (z-x)^j D_x^j f + R_x^t f, \quad R_x^t f \in A(X)$$

と書かれる。更に

$$(*) \quad \text{app} \lim_{z \rightarrow x} \frac{R_x^t f(z)}{|z-x|^{t+\varphi(|z-x|)}} = 0$$

$$(**) \quad \text{app} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^t f(x)}{t! h^t} = D_x^t f$$

が, すべての $f \in A(X)$ に対して成立つ。

証明: はじめの部分は, Wilken の定理 (t.3) よりわかる。

よって, 定数 $C > 0$ があって $\|R_x^t f\| \leq C \|f\|$ for $f \in A(X)$ 。

(*) から測度

$$\lambda_j = \frac{\mu}{(z-x)^j} \quad (0 \leq j \leq t), \quad \alpha = \frac{\lambda_t}{\varphi(|z-x|)}$$

が定義される。 $f \in A(X; x)$ のとき, $R_x^t f \in A(X; x)$ と取り,

$R_x^t f$ は x において $t+1$ 次の零点をもつ。よって

$$(**) \quad \int R_x^t f d\lambda_j = 0 \quad \text{for } 0 \leq j \leq t.$$

R_x^t は bounded operator 故, これは $\forall \varepsilon$ での $f \in A(X)$ に対して成立つ. $\forall \varepsilon > 0$ を fix して, $\delta = \frac{\varepsilon}{2C + \varepsilon}$ とおく.

$$E_\varepsilon = E_\mu(\delta) \cap E_\alpha(\delta) \cap E_{\tilde{\alpha}}(\delta)$$

とすれば, 系 2 から, E_ε は x において full area density をもつ. $c(y) = 1 + (y-x)\hat{\mu}(y)$, $\hat{\mu}(y) = \int \frac{d\mu(z)}{z-y}$ とすれば, $y \in E_\varepsilon$ のとき, $|c(y)| \geq 1 - \delta > 0$ 故 $y \in X$. (かつ $\frac{1}{c(y)} \frac{z-x}{z-y} d\mu(z)$ は y の complex 表現測度となる. よ, $\int R_x^t f d\mu = 0$ より)

$$R_x^t f(y) = \frac{1}{c(y)} \int R_x^t f \frac{z-x}{z-y} d\mu = \frac{y-x}{c(y)} \int R_x^t f \frac{d\mu}{z-y}.$$

ここで, 簡単計算より,

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{z-y} &= \left(\frac{1}{z-x} + \frac{y-x}{(z-x)^2} + \dots + \frac{(y-x)^{t-1}}{(z-x)^t} + \frac{(y-x)^t}{(z-x)^t(z-y)} \right) d\mu \\ &= \sum_{j=1}^t (y-x)^{j-1} d\lambda_j + (y-x)^t \frac{\lambda_t}{z-y} \end{aligned}$$

であるから, (**) により

$$R_x^t f(y) = \frac{(y-x)^{t+1}}{c(y)} \int R_x^t f \frac{d\lambda_t}{z-y}.$$

φ が admissible 関数ということから $\varphi(r_1 + r_2) \leq \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$

(for $r_1, r_2 > 0$) となることが容易に確かめられる. これから

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_t(y) &= \int \frac{\varphi(|z-x|)}{|z-y|} d\alpha \leq \int \frac{\varphi(|z-y|) + \varphi(|y-x|)}{|z-y|} d\alpha \\ &= \int \varphi(|z-y|) d\alpha + \varphi(|y-x|) \tilde{\lambda}_t(y). \end{aligned}$$

従, $\int \varphi(|z-y|) d\alpha < \infty$ なることは

$$\begin{aligned}
|R_x^t f(y)| &\leq \frac{1}{|C(y)|} |y-x|^{t+1} \|R_x^t f\| \tilde{\chi}_p(y) \\
&\leq \frac{C \|f\|}{1-\delta} |y-x|^{t+1} (\cup_{\alpha} \tilde{\varphi}(y) + \varphi(|y-x|) \tilde{\alpha}(y)) \\
&= \frac{C \|f\|}{1-\delta} |y-x|^t \varphi(|y-x|) (\tilde{\varphi}(|y-x|) \cup_{\alpha} \tilde{\varphi}(y) + |y-x| \tilde{\alpha}(y)) \\
&\leq \frac{2\delta C}{1-\delta} \|f\| |y-x|^t \varphi(|y-x|) \\
&= \varepsilon \|f\| |y-x|^t \varphi(|y-x|).
\end{aligned}$$

これより (★) がわかる. 実際, $L_y f = \frac{R_x^t f(y)}{|y-x|^t \varphi(|y-x|)}$ とすると, $\{L_y\}_{y \in E_\varepsilon}$ は $A(X)$ 上の一様有界な linear functional の族である. 一方 $f \in A(X; \varepsilon)$ に対しては, $L_y f \rightarrow 0$ (as $y \rightarrow x$) であるから, $f \in A(X)$ に対しても $L_y f \rightarrow 0$ (as $y \rightarrow 0$, $y \in E_\varepsilon$) となる. さて, $F_j = \{h \in \mathbb{C} : x+jh \in E_\varepsilon\}$ ($0 < j \leq t$) とおくと, 各 F_j は x において full area density ε をもつから, $F = \bigcup_{j=1}^t F_j$ も x において full area density ε をもち, 今示めたことから

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in F}} \frac{R_x^t f(x+jh)}{h^t} = 0 \quad \text{for } 0 \leq j \leq t.$$

一方, 多項式 P に対しては, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^t P(x)}{t! h^t} = D_x^t P$ とわかるから, $\Delta_h^t R_x^t f(x)$ が $R_x^t f(x+jh)$ ($0 \leq j \leq t$) の finite combination であることに注意すれば, (★) がわかる. (終).

★モ: $\{L_y\}_{y \in E_\varepsilon}$ が $A(X)$ 上の linear functional として E_ε 上 strongly に 0 に収束することを示めた事であるが,

ε を動かして E_ε から新しい集合 E を作って, E 上 uniformly に 0 に収束するようにも出来る. なお, 後に述べる系 9 を参照のこと.

補題 1' の方から, 次のことがわかる.

定理 4. 仮定は定理 3 と同じとして, $P_\varepsilon = \{y \in X : \|y - x\|^A < \varepsilon\}$ とおく. このとき, $m \rightarrow \infty$ としたときその $m(\Delta_m \setminus P_\varepsilon)$ の 0 に近づく速さは

$$m(\Delta_m \setminus P_\varepsilon) = o\left(\frac{\varphi(\frac{1}{m})^2}{m^{2t+2}}\right).$$

従って, 高次の point derivation が存在すれば, それだけ Gleason part の x における密度が濃くなっている.

これらでの議論では, (*) をみたす admissible 関数 φ が, とにかくあるというだけで, 具体的にどのようなものかは分らない. (しかし, 次の一見驚異的なことがすぐわかる.

補題 5. φ を nice admissible 関数とすると, ほとんどすべて (dm) の non peak point に対して, φ の complex 表現測度 μ_φ があって

$$\int \frac{d|\mu_\varphi|(z)}{\varphi(|z-y|)} < \infty.$$

証明: 任意の non peak point $x \in X$ に対して, x の表現測度 μ で, $\mu(\{x\}) = 0$ と仮定するものがある. そこで

$$F = \left\{ y \in \mathbb{C} : \int \frac{d|\mu|(z)}{|z-y|\varphi(|z-y|)} < \infty \right\}$$

とおけば, φ が "nice admissible" のときは $\frac{1}{|z|\varphi(|z|)}$ は dm に関して locally summable であるから, $m(\mathbb{C} \setminus F) = 0$.

よって, $0 < \delta < 1$ に対して, $E = F \cap E_\mu(\delta)$ とおけば, E は x において full area density をもち, $y \in E$ に対して, $\mu_y = \frac{1}{c(y)} \frac{z-x}{z-y} \mu$ ($c(y) = 1 + (y-x)\hat{\mu}(y)$) は条件をみたす y の complex 表現測度となる. x は non trivial な Gleason part の任意の元であることから, 補題がわかる.

系 6. $\varphi(r) = r(\log \frac{1}{r})^{\frac{3}{2}}$ として, ほとんどすべての (dm) の non peak point に対して

$$m(\Delta_n \setminus P_\varepsilon) = o\left(\frac{(\log n)^3}{n^4}\right).$$

以上が Wang の結果の紹介である. もちろん $R(X)$ の場合についても同じ結果が成立する. 実は, 補題 5 と系 6 は $R(X)$ の場合について意味があるが, $A(X)$ の場合は, ほとんどすべての non peak point は X の内部 X° にあるので, 自明である.

★補題: bounded point derivation が唯 1 点しかないような $R(X)$ が作られる (O'Farrell [4]). 従って, 系 6 を高次の point derivation に拡張することは出来る.

§ 2. Capacity estimates for t -point derivation.

1-point derivation に関しては, 点列 $\{x_n\}$ が (1.4) をみたすための必要十分条件が capacity を用いてあらわせることを [7] で示したが, t -point derivation の場合にも同様に出来ることがわかった.

$r > 0$, $0 < a < 1$ に対して

$$E_n(x; r, a) = \{z \in \mathbb{C}; ra^{n+1} < |z-x| < ra^n\}$$

とする. 更に整数 $M \leq N (= \infty \text{ も可})$ に対して

$$\alpha_t^{M,N}(x; r, a) = \frac{1}{(1-a)a^t} \sum_{n=M}^N \frac{\alpha(E_n(x; r, a) \setminus X^0)}{(ra^n)^t}$$

とおく. $M=0$, $N=\infty$ の場合には簡単に $\alpha_t(x; r, a)$ と書くことにする.

補題 7. $0 < a, b < 1$ とする. このとき, a, b によって定まる定数 $C(a, b)$, $C'(a, b)$ があって

$$C'(a, b) \alpha_t(x; r, b) \leq \alpha_t(x; r, a) \leq C(a, b) \alpha_t(x; r, b)$$

が成立つ.

従って, 以下に述べる性質は, a として $0 < a < 1$ とある任意の数を固定して考えてよい.

$\delta > 0$, $0 < a < 1$ として, $r > 0$ を十分大きく取って $X \subset \Delta(x; r)$ とする. 記号は § 1 と同じとして, $A(X)$ に関して次の Estimate が成立つ. [C : 定数とある]

$$(I) \quad \frac{2(1-a)}{e t(t+1)a^{t+1}} \cdot \frac{\alpha_{t+1}(x; \delta, a)}{\alpha_1(x; \delta, a) + 3a^2} \leq \|D_x^t\| \leq \frac{C}{2\pi} \alpha_{t+1}(x; r, a)$$

$$(II) \quad \|R_{x,y}^t\| \geq \frac{a-a^2}{e(1-a)^{t+1}} \cdot \frac{\alpha_1(y; a|x-y|, a)}{\alpha_1(y; a|x-y|, a) + \frac{a^2}{1-a}(t^2+t+1)}$$

$$(III) \quad \|R_{x,y}^t\| \leq C |x-y|^t \left[\frac{\sqrt{|x-y|}}{\sqrt{r} - (1+a)\sqrt{|x-y|}} \alpha_{t+1}(x; r, a) + \frac{1}{a} \alpha_{t+1}^{R, \infty}(y; r, a) + \frac{1}{(1-a)^{t+1}} \cdot \frac{\alpha_1(y; a|x-y|, a)}{|x-y|^t} \right]$$

$\in E^1, \quad R = \left[\log_a \sqrt{\frac{|x-y|}{r}} \right] \text{ (ガウス記号)}$

$$(III') \quad \|R_{x,y}^t\| \leq C |x-y|^{t+1} \left[\frac{4}{a} \alpha_{t+2}(x; r, a) + \frac{1}{(1-a)^{t+1}} \frac{\alpha_1(y; a|x-y|, a)}{|x-y|^{t+1}} \right]$$

定理 8. x における t -point derivation が存在すると仮定する. このとき, $x_n \in x$ に収束する点列として, $A(x)$ 上の linear functional R_{x, x_n}^{t-1} に対して,

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_{x, x_n}^{t-1}}{(x_n - x)^t} = D_x^t f \quad \left[\left[u\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_{x, x_n}^{t-1}}{(x_n - x)^t} = D_x^t f \right] \right]$$

と仮定するための必要十分条件は,

$$\overline{\lim_n} \frac{\alpha_1(x_n; a|x_n - x|, a)}{|x_n - x|^t} < \infty \quad \left[\left[\lim_n \frac{\alpha_1(x_n; a|x_n - x|, a)}{|x_n - x|^t} = 0 \right] \right].$$

系 9. $h_n = x_n - x$ として,

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{h_n}^t f(x)}{t! h_n^t} = D_x^t f \quad \left[\left[u\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_{h_n}^t f(x)}{t! h_n^t} = D_x^t f \right] \right]$$

となるための必要十分条件は, すべての $k=1, 2, \dots, t$ に対し

$$\overline{\lim}_m \frac{\alpha_k(x+kh_m; \alpha_k|h_m|, a)}{|x_m - x|^t} < \infty \quad \left[\lim_m \frac{\alpha_k(x+kh_m; \alpha_k|h_m|, a)}{|x_m - x|^t} = 0 \right].$$

Estimate (II) を得るには, $f_m \in \mathcal{AG}(E_m(y; \delta, a) \setminus X^0)$ に対し, $g_m = f'_m(\infty) - (z-y)f'_m(z)$ の ∞ における Laurent 展開

$$g_m(z) = \frac{a_1}{z-x} + \frac{a_2}{(z-x)^2} + \dots$$

を考えて

$$h_m(z) = (z-x)a_t + \dots + (z-x)^t a_1 - (z-x)^{t+1} g_m(z)$$

とおき, 関数 $\sum_{n=0}^N \frac{h_m}{\delta a^n}$ を用いて標値すればよい. ただし, $\delta = \delta(x, y)$ とする. (I) は Hallstrom [6] に従って求まる. (III) 及び (III') は [7] と同様である. 以上は,

$$\delta_t^{M,N}(x; r, a) = \frac{1}{(1-a)a^t} \sum_{n=M}^N \frac{\delta(E_m(x; r, a) \setminus X)}{(ra^n)^t}$$

において, $\alpha_t^{M,N}$ を $\delta_t^{M,N}$ に書き換えれば, $R(X)$ について同じことが成立つ.

§3. 各点有界近似と Gleason metric.

$A(X)$, $R(X)$ による X 上の Gleason metric をそれぞれ $\|x-y\|^A$, $\|x-y\|^R$ であらわすことにして, ここでは次の問題を考える.

$$(Q) \quad \|x-y\|^A = \|x-y\|^R \text{ on } X \Rightarrow A(X) = R(X) ?$$

この問題を考えたのは以下の理由による. § 1, § 2 で述べたように capacity, 表現尺度及び Gleason metric は $A(X)$, $R(X)$ においては, 互いに実運し合, ている. 一方, $A(X) = R(X)$ となるための条件として capacity を用いた Vistushkin の条件, 表現尺度を用いた Glicksberg-Garnett の条件があるのだから, Gleason metric を用いた条件もあ, っているのではないか! 実際, Vistushkin の条件とは粗, ぼく, いて, 2 つの capacity $\alpha(\Delta_x \setminus X^0)$ と $\delta(\Delta_x \setminus X)$ が比例するということであり, 一方 Estimate (II)_{t=0}, (III)_{t=0} によれば, $\|R_{x,y}^0\| = \|x-y\|^A$ であるから, $\|x-y\|^A$ は $\alpha_1(x; r, a)$ に比例していると思える. $R(X)$ においても同じ Estimate が成立しているから, $\|x-y\|^A$ と $\|x-y\|^R$ が比例すれば $A(X) = R(X)$? という問題が考えられるのである.

部分的ではあるが, 次のことが示される.

定理 10. $A(X)$ を hypo-dirichlet algebra とすると, $A(X) = R(X)$ となるための必要十分条件は, $\|x-y\|^A = \|x-y\|^R$ on X .

この定理は, 次の定理から得られる.

定理 11. X^0 の各連結成分が, *finitely connected* とすれば, $A(X)$ [$R(X)$] が $H^\infty(X^0)$ で各点有界 dense であるための必要十分条件は, X^0 上で $\|x-y\|^A = \|x-y\|^{H^\infty}$ [$\|x-y\|^R = \|x-y\|^{H^\infty}$] と取ることである. ただし, $H^\infty(X^0)$ は X^0 上の有界正解析関数の全体, $\|x-y\|^{H^\infty}$ は, $H^\infty(X^0)$ による Gleason metric とする.

$A(X)$ が hypodirichlet のとき, X^0 の各連結成分が *finitely connected* であり, $A(X)$ が $H^\infty(X^0)$ で各点有界 dense と取ることが知られているので, $\|x-y\|^A = \|x-y\|^{H^\infty}$ と取る. 従って, 定理 11 が示めたいのは, この場合 [5] により $C(X) \cap H^\infty(X^0) = R(X)$ と取るので, 定理 10 が得られる.

定理 11 の証明は三段階に分かれる.

Step 1. X^0 が連結の場合に reduce する: $\lambda = dx dy | X^0$ として, $H^\infty(\lambda) \in A(X)$ [$R(X)$] の w^* -closure とする. 仮定より X^0 の各連結成分は唯一つの Gleason part に含まれている. 従って, Davies による $H^\infty(\lambda)$ の元の $A(X)$ [$R(X)$] による各点有界近似の定理を用いれば, X^0 の各連結成分は $H^\infty(\lambda)$ の peak set と取ることがわかる. これより $H^\infty(\lambda)$ は, X^0 の各連結成分へ制限したものの直和にあらわせることかわかるので, X^0 が連結の場合を考えれば十分である.

Step 2. $H^\infty(X^0)$ の generator を $H^\infty(\lambda)$ から探す: $U = X^0$ とし, U は finitely connected な平面領域とする. U は有限個の analytic arc で囲まれているものとしてよい. $a, b \in U$ に対して, $F_{ab} \in H^\infty(U)$, $|F_{ab}| \leq 1$ で

$$F_{ab}(a) - F_{ab}(b) = \|a - b\|_{H^\infty(U)}$$

となるような関数が唯一存在して, extremal function といわれる. Gleason metric が等しいということ, 及び $H^\infty(\lambda)$ が各点有界収束に関して閉じていることを合せれば, $F_{ab} \in H^\infty(\lambda)$ となる.

Step 3. $H^\infty(U)$ は extremal function から生成される: まず, F_{ab} は ∂U の近傍でも analytic となるように拡張され $|F_{ab}| = 1$ on ∂U , F_{ab}' は ∂U 上で 0 にならないということに注意する. また, b が a に十分近いとき $F_{ab}'(a) \neq 0$ となることもわかる. そこで, extremal function $F_1, \dots, F_n$ を有限個取って, $F_1, \dots, F_n$ は ∂U 上の有限個の点を除いては $\bar{U}$ の点を分離するように出来, しかも $\bar{U}$ 上で $F_1', \dots, F_n'$ が同時に 0 にならないように出来る. $F_1, \dots, F_n$ によって生成された uniform algebra を $B (\subset A(\bar{U}))$ とすると, Bishop の定理 ([1]) から, $f \in A(\bar{U})$ の元で, $F_1, \dots, F_n$ によって分離されない点上で一定値を取るものは, すべて $f \in B$ となる. $F_1, \dots, F_n$ で分離されない点は, 高々有限個であ,

て, それは B に関する peak set となることに注意すれば,
 B が $H^\infty(D)$ で各点有界 dense となること, 従って $H^\infty(X) = H^\infty(D)$
 となることかわかる. (略証終).

Step 1, Step 2 の証明で使われた各点有界近似の定理など
 $H^\infty(X)$ に関する性質は, 近年 Gamelin, Garnett &
 Davis によってきれいな形にまとめられたものである.
 これらのことに关しては, 今回小林さんが講演されたので,
 それを参照されたい.

参 考 文 献

1. Bishop, E., Subalgebras of functions on Riemann surface,
 Pac. J. Math. 8 (1958), 29-50.
2. Browder, A., Point derivations on function algebras, J.
 Funct. Anal. 1 (1967), 22-27.
3. Curtis, P. C., Peak point for algebras of analytic functions,
 J. Funct. Anal. 3 (1969), 35-47.
4. O'Farrel, A., An isolated bounded point derivation, Proc.
 Amer. Math. Soc. 39 (1973), 559-562.
5. Gamelin, T. W., and Garnett, J., Bounded approximation by
 rational functions, Pac. J. Math. 45 (1973), 129-150.
6. Hallstrom, A. P., On bounded point derivations and analytic
 capacity, J. Funct. Anal. 4 (1969), 153-165.
7. Hayashi, M., Point derivations on commutative Banach algebras
 and estimates of the $A(X)$ -metric norm, (to appear).

8. Wang, J. L., An approximate Taylor's theorem for $R(X)$,
Aarhus Univ. Preprint Series 1972/73 No. 59.
9. Wilken, D. R., Bounded point derivations and representing
measures on $R(X)$, Proc. Amer. Math. Soc. (1970), 371-373.