

超流動 ^4He における非一様量子乱流の 理論的および数値的研究

大阪市立大学大学院 理学研究科 数物系専攻
素励起物理学的研究室

湯井 悟志

要旨

本論文では、超流動 ^4He における空間的に非一様な量子乱流の理論および数値的研究を報告する。本論文の主題は 2 つある。1 つは非一様熱対向流であり、もう 1 つは量子乱流における対数型速度分布である。非一様熱対向流の研究では、今までの研究とは違い、管壁の効果および非一様な速度場を取り入れ、非一様な量子乱流の構造とダイナミクスを明らかにした。対数型速度分布の研究では、壁面量子乱流の平均速度場が対数型分布に従うことを示した。以下は、本論文の概要である。

第 1 章では、量子乱流に関する基本的な知識を導入する。2 流体モデルによると、超流動 ^4He は非粘性の超流体と粘性をもつ常流体の混合流体として理解できる。超流体中の渦は、量子化された循環を持つ量子渦である。量子渦の渦芯半径は非常に小さく、超流体中では渦芯にのみ渦度が局在する。量子乱流とは、量子渦が複雑に絡み合った状態を構成し、超流動が乱流になった状態である。温度勾配によって駆動される超流体と常流体の巨視的な対向流を、熱対向流とよぶ。熱対向流は量子乱流を生む典型的な系として、半世紀以上にわたって研究されてきた。対向流速が臨界値を超えると、量子乱流が現れる。熱対向流量子乱流は、2 流体の相互作用がもたらす超流動固有の現象であり、物理的興味は大きい。

量子乱流は、古典的な乱流の原型としても期待されている。量子渦の循環は離散値しかとらない。また、量子渦は粘性による拡散を受けない。さらに、渦芯が小さいために量子渦の存在する座標は明確に判別される。これらの特徴によって、量子乱流は要素還元的な見方が可能である。したがって、量子乱流を理解すれば、その知見を活かして古典乱流を理解できるかもしれない。

続いて、渦糸モデルおよびその数値計算方法を説明する。上記の著しい特徴により、量子渦を決まった循環を持つ渦糸とする渦糸モデルが非常に有効である。歴史的に見て、量子乱流の理解において渦糸モデルの果たした役割は大きい。本論文でも、渦糸モデルを用いて研究を行っている。

第 2 章では、非一様熱対向流に関する我々の研究について説明する。今までの多くの理論および数値的研究は量子乱流が一様であるとして行われてきた。これは、量子乱流の空間的非一様性を観測する実験がなかったためである。量子乱流の非一様性は、量子乱流の未解決問題である T1-T2 遷移にも関係していると予想されている。T1-T2 遷移とは、熱対向流量子乱流が 2 つの乱流状態をもち、対向流速の大きさによって 2 つの状態を遷移することである。この遷移では、常流動が層流から乱流に遷移していると予想されている。この予想は、今までの一様系の数値的研究では解明することができない。

そのような背景のもと、最近の可視化実験が熱対向流の非一様性を直接観測した。熱対向流中の常流動速度場が可視化され、常流動流が Poiseuille 層流, tail-flattened 層流, および乱流となることが明らかになった。Tail-flattened 流は古典流体の分野でも知られておらず、2 流体力学に固有の物理である。このような実験により、我々は非一様量子乱流に取り組む段階にきたのである。

そこで、我々は常流動速度場を Poiseuille 層流および tail-flattened 層流として、熱対向流量子乱流の数値的研究を行った。数値計算領域は正方形管を再現しているので、今まで考慮されてこなかった壁面量子乱流の物理が探索される。その結果非一様な量子乱流が得られ、その構造とダイナミクスが調べられた。そこに古典乱流との類似が現れるなど興味深い物理が明らかとなった。その1つが、量子渦が管壁付近に集まる構造である。これは古典乱流において壁近傍に渦度が集中する境界層構造と類似しているので、超流動境界層と名付けられた。

第3章では、壁面量子乱流において対数型速度分布が現れることを示した我々の研究について説明する。乱流においては、統計量にこそ普遍的な物理が現れる。古典乱流において重要な統計則は、Kolmogorov 則と対数型速度分布則である。Kolmogorov 則は境界層の外部に現れ、対数型速度分布則は境界層の内部に現れる。量子乱流において Kolmogorov 則が現れることは、すでに数値的研究により明らかになっている。

対数型速度分布は、平均速度が壁からの距離の対数で変化する領域があるという法則である。我々は第2章の研究で超流動境界層に動機付けられ、量子乱流の平均速度分布を研究した。数値的研究の結果、量子乱流においても対数型速度分布が現れることが初めて明らかになった。考察では、対数型速度分布を引き起こす量子乱流の構造が調べられる。

目次

第 1 章	導入	9
1.1	量子乱流の研究意義	9
1.1.1	量子統計もたらす物理	9
1.1.2	古典乱流のプロトタイプ	11
1.1.3	量子乱流に特有の物理	14
1.2	超流動 ^4He における量子乱流	14
1.2.1	2 流体モデル	14
1.2.2	量子渦	16
1.2.3	熱対向流と量子乱流	18
1.3	渦糸モデル	21
1.3.1	0 K における渦糸の運動	21
1.3.2	固体境界が誘起する速度場	23
1.3.3	有限温度における渦糸の運動	24
1.3.4	量子渦の再結合	26
1.3.5	2 流体結合ダイナミクス	26
1.4	渦糸モデルの数値計算方法	28
1.4.1	Biot-Savart 積分と局所項の計算	28
1.4.2	計算点の挿入と除去	29
1.4.3	小さい渦輪の除去	30
1.4.4	渦糸の再結合	31
1.4.5	境界条件	31
第 2 章	非一様熱対向流	33
2.1	序論	33
2.2	研究背景	34
2.2.1	一様熱対向流の数値計算	34
2.2.2	量子乱流の T1-T2 遷移	42
2.2.3	熱対向流の可視化実験	45
2.2.4	非一様熱対向流の数値計算	46

2.3	数値計算モデル	48
2.3.1	熱対向流	49
2.3.2	常流動速度場	50
2.3.3	数値計算の設定	52
2.4	常流動 Hagen-Poiseuille 流	53
2.4.1	量子渦タングルのダイナミクス	53
2.4.2	時間空間的に平均された物理量	55
2.4.3	量子渦タングルの非一様性	57
2.4.4	超流動速度場	61
2.5	常流動 tail-flattened 流	63
2.5.1	量子渦タングルのダイナミクス	63
2.5.2	時間空間的に平均された物理量	64
2.5.3	量子渦タングルの非一様性	67
2.5.4	超流動速度場	69
2.6	議論	70
2.6.1	対向流速の修正	70
2.6.2	正方形管の形状の効果	72
2.6.3	管断面アスペクト比	73
2.6.4	T1-T2 遷移	74
2.7	結論	74
第 3 章	量子乱流の対数型速度分布	75
3.1	序論	75
3.2	古典乱流の対数型速度分布	75
3.2.1	理論	75
3.2.2	実験	79
3.2.3	数値計算	79
3.3	数値計算モデル	80
3.3.1	Pure normal flow	80
3.3.2	Pure superflow	81
3.3.3	数値計算の設定	81
3.4	Pure normal flow	82
3.4.1	統計的定常状態	82
3.4.2	対数型速度分布	83
3.4.3	量子渦タングルの構造とダイナミクス	85
3.5	Pure superflow	88
3.5.1	統計的定常状態	88
3.5.2	超流動速度場	90

	<u>7</u>
3.6 結論	91
第 4 章 結び	93
参考文献	95

第 1 章

導入

1.1 量子乱流の研究意義

具体的な内容に入る前に、そもそもこの研究にどのような意義があるのかを説明しておく必要があると思う。この論文では、超流動流の乱流、すなわち量子乱流 (quantum turbulence) について私が行った研究を説明する。量子乱流の研究意義として大きなものは、量子力学的効果がマクロに現れるというおもしろさ、古典乱流のプロトタイプとしての重要性、そして量子乱流が生み出す特有の物理であると思う。以下では、これらについて説明する。ここでは研究意義に焦点をあてるため、超流動や量子乱流などの詳しい説明はここでは行わず、1.2 節で行う。

1.1.1 量子統計のもたらす物理

ここでは、量子統計のもたらす物理として量子乱流を考える [1]。超流動はミクロな量子力学的性質がマクロに現れたもの、いわゆる巨視的量子現象であり、非常に興味深い。また、超流動の乱流状態すなわち量子乱流は、非線形・非平衡の系として研究意義がある。以下では、そのことについて説明する。

量子力学はミクロな世界について非常によい説明を与えてくれるが、そこから私たちの身の周りの現象を直接理解することはできない。身の回りのマクロな現象は単純に粒子がたくさん集まったものではなく、そこには本質的に新しい物理が現れる。これが凝縮系物理あるいは物性物理を研究する面白さの一つであると思う。

多粒子系において、量子力学的効果がマクロに現れると興味深い現象がおこる。高温では粒子の de Broglie 波長 $\lambda = h/\sqrt{3mk_B T}$ は平均粒子間距離より小さく、粒子は古典統計に従う。温度が下がるにつれて de Broglie 波長が大きくなり、量子力学的性質が現れてくる。このとき、Bose 粒子は Bose-Einstein 統計、Fermi 粒子は Fermi-Dirac 統計に従う。このように、低温では Bose 粒子か Fermi 粒子かによって統計的性質は根本的にことなる。そしてさらに温度を下げると、Fermi 粒子系は Fermi 縮退、Bose 粒子系は Bose-Einstein 凝縮を起こす場合がある。これらの量子統計的性質が超伝導や超流動といった著しい現象を引き起こすのである。

超流動性が最初に発見されたのは、液体 ^4He においてであった。1908 年、Kamerling-Onnes は ^4He の液化に初めて成功した。その沸点は 4.2 K である。続いて液体 ^4He の物性が研究され、その比熱がラ

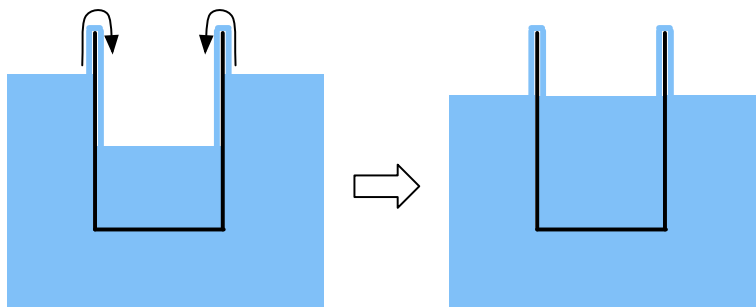


図 1.1 フィルムフローの模式図. 容器内の液面が外部の液面より低ければ容器内にヘリウム II が侵入し, 逆に高ければ容器内のヘリウム II が外部に出て行く. 最終的に内外の液面の高さが等しくなる.

ムダ温度 $T_\lambda \sim 2.17$ K で鋭いピークを持つことが明らかになった^{*1}. このことは, 何らかの相転移が起きていることを示しているが, この温度の前後で ^4He は液体のままであった. そこで, これら 2 つの相を区別して, T_λ 以上の ^4He をヘリウム I, T_λ 以下をヘリウム II とよぶようになった. その後の研究によりヘリウム II は超流動性を示すことがわかった. 超流動とは非粘性の流れのことである. 例えば, 粘性流体の場合は毛細管 (管径 $\sim 10^{-5}$ cm) を流れることはできないが, 超流動は容易に流れることができる. 超流動によって引き起こされる特異な現象として, 図 1.1 に示されるようなフィルムフローがある. ヘリウム II の入った容器をヘリウム II の中につけると, 容器内の液面が外部の液面より低ければ容器内にヘリウム II が侵入する. 逆に, 容器内の液面が外部より高ければ, 容器内のヘリウム II が外部に出て行く. 最終的に, 内部と外部の液面の高さが等しくなるのである.

超流動において速度場の循環 $\Gamma = \oint_C \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ は離散値 $\Gamma = hn/m$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) をとる. ここで h はプランク定数, m は ^4He の原子質量である. その積分路 C が囲む曲面 S が多重連結領域のときのみ, 循環はゼロでない値をとる. 多重連結領域とは, 例えば, S の内部を針金や渦芯 (vortex core) が貫いているような場合の領域である. このような渦を量子渦 (quantized vortex) といい, その特徴は次のようなものである.

1. 循環は離散的であり, その値は h/m の整数倍である.
2. 渦芯の大きさは 0.1 nm 程度であり, 非常に小さい.
3. 粘性による渦度の拡散は起こらない.

超流動流はこの安定かつ画一的な量子渦によって構成されているので, いわば量子渦は超流動流の“原子”である. したがって, 超流動流は要素還元的な見方が可能であり, これは通常の粘性流体とはきわめて異なる点である.

量子乱流とは, 超流動流の乱流状態であり, そこでは量子渦が複雑に絡みあったタングルを形成している. 図 1.2 は, 渦糸モデルの数値計算によって得られた量子渦タングルのスナップショットである. このことを最初に提唱したのは Feynman であり, その後 Vinen が熱対向流の実験によって実証した. 量子乱流は強い非線形・非平衡の系である. そのような系は一般的にいて扱いが困難であり, 依然として未解明の領域である. しかし, 量子乱流の場合は, その要素還元的な性質のおかげで, 他の非線形・非平衡系

*1 ラムダ温度という名前は, T_λ 付近の ^4He の比熱の振る舞いがギリシャ文字の λ (ラムダ) に似ていることから来ている.

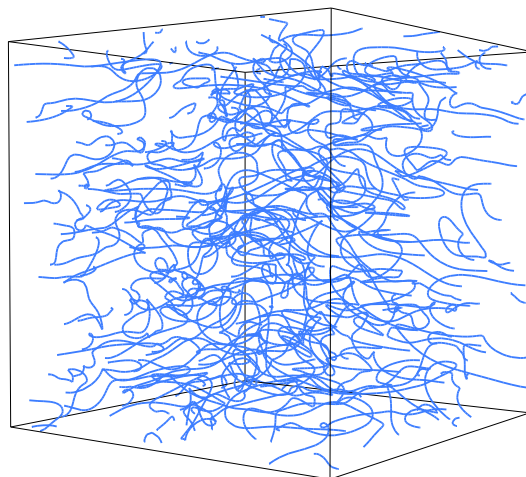


図 1.2 渦糸モデルの数値計算によって得られた量子渦タングルのスナップショット．青い線が量子渦を表している．

よりも扱いが容易になる．それゆえ，量子乱流は非線形・非平衡系の代表的なモデルとなるかもしれない．とくに，次節で述べる古典乱流のプロトタイプとしての役割が重要であると思う．

このように，超流動は量子力学的性質がマクロに現れた非常に興味深いものである．そして，その乱流状態である量子乱流は，低温物理学や流体力学のみならず，非線形・非平衡の物理の観点からも大きな意義がある．

1.1.2 古典乱流のプロトタイプ

ここでは，量子乱流が通常の粘性流体の乱流（以下では古典乱流とよぶ）の理解にどのように役立つかを説明する．まず古典乱流の基本的な理解を説明し，つぎに古典乱流のプロトタイプとしての量子乱流の役割を説明する．

乱流とは速度場が無秩序に乱れた流れである [2, 3, 4]．日常で我々が目にする流れのほとんどが乱流であり，乱流を理解することは理学的にも工学的にも重要である．乱流の研究の歴史は古く，およそ 500 年前の Leonardo da Vinci も図 1.3 に示される乱流のスケッチを示している．しかしながら，乱流の理解は未だに十分だとはいえず，現在でも研究が盛んに行われている．

非圧縮粘性流体の物理は，無次元量である Reynolds 数

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1.1)$$

によって特徴づけられる．ここで， U は特徴的な速さ， L は特徴的な長さ， ν は動粘性係数である．非圧縮粘性流体の運動は Navier-Stokes 方程式によって良く説明される．無次元化された Navier-Stokes 方程



図 1.3 Leonardo da Vinci の乱流のスケッチ．プールに水が注がれる様子を表す．カスケードを示唆する異なる運動のスケールが見られる．(OIST の [WEB サイト](#)より転載された図．Copyright (2014) 沖縄科学技術大学院大学 (OIST))

式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' = -\nabla P' + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \mathbf{v}' \quad (1.2)$$

である．ここで， $'$ は無次元化された変数を表す．この方程式は無次元量 Re によってのみ特徴付けられることがわかる．すなわち，Reynolds 数が同じであれば流れは相似である．これは Reynolds の相似則とよばれる．Reynolds は乱流を系統的に扱った実験をおこなった．彼は，円管に水を流して流れが乱流になる条件を調べた．その結果， Re を上げていくと，層流が乱流になる臨界 Reynolds 数がおよそ 2300 であることがわかった^{*2}．

その強い非線形・非平衡性からくる著しい複雑さによって，乱流に再現性をもった法則を探すことは困難に思える．しかし，その統計量に注目すれば，乱流に驚くべき再現性があることがわかる．このことは，一見無秩序に見える乱流が何らかの法則にしたがって運動していることを意味する．その重要な例が，古典乱流でもっとも有名な統計則の一つである Kolmogorov 則である．十分発達した一様かつ等方な乱流において，エネルギー・スペクトルは図 1.4 のような形をもつことが知られている．このエネルギー・スペクトルが意味することはつぎのことである．外部からスケール l_0 にエネルギーが注入され，そのエネルギーはより高波数に向かって流れていく．そして，Kolmogorov 波数 $k_K = (\epsilon/\nu^3)^{1/4}$ に達するとエネルギーは粘性によって散逸される．こういった特徴から， $0 < k < k_0 = 2\pi/l_0$ をエネルギー保有領域， $2\pi/l_0 < k < k_K$ を慣性領域， $k_K < k$ をエネルギー散逸領域とよぶ．十分発達した乱流では，エネルギー輸送率 ϵ は慣性領域で波数に依存しない値をもつ．慣性領域では，粘性が有効でなく，エネルギーが ϵ で輸送されるだけである．したがって，この領域で重要な物理量は波数 k とエネルギー輸送率 ϵ だけ

^{*2} 現在の線形安定性解析によると，管断面アスペクト比が小さい円管の臨界 Reynolds 数は無限大である [5]．

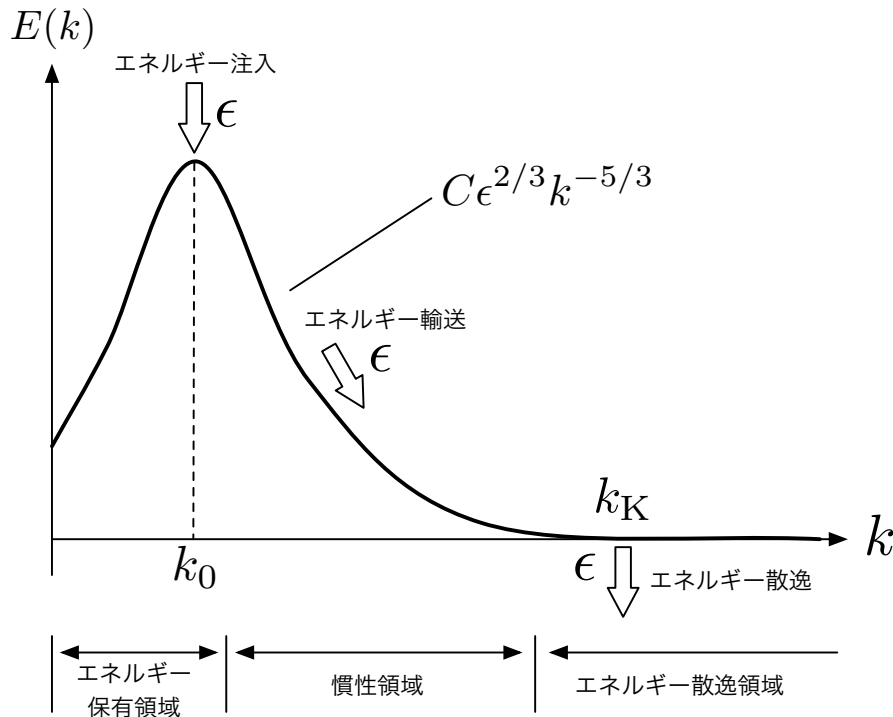


図 1.4 十分に発達した乱流のエネルギー・スペクトル.

だと仮定しても良さそうである．そこで，これらの物理量を用いて次元解析を行うと Kolmogorov 則

$$E(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (1.3)$$

が得られる．

Kolmogorov 則を起こすメカニズムとして予想されているのが，図 1.5 で示される Richardson カスケードである [6]．エネルギー保有領域でスケール l_0 の渦が生成される．生成された渦は乱流の非線形性によってより小さな渦へと自己相似的に分裂していく．最終的には渦はエネルギー散逸領域で消滅する．しかしながら，古典乱流における渦は不明瞭な存在であり，渦度が比較的集中している領域を渦とよぶことはできるが，どこからどこまでが渦かという明確な基準はない．したがって，古典乱流においてこのカスケードモデルは模式的なものに過ぎない．

一方で，量子乱流においては，このようなモデルが明確な意味をもつ．前節で述べたように，量子乱流における渦は量子渦であり，超流体中に安定に存在する．古典的な渦とは違い，非常に小さい渦半径内に渦度が局所的に存在するので，量子渦の存在する座標は明確に判別することができる．したがって，もし量子乱流においても Richardson カスケードが起こるなら，量子乱流は Richardson カスケードを理解するためのプロトタイプとなりうる．ここでのプロトタイプという言葉の意味は，つぎのようなものである．上で述べたように，量子乱流は要素還元的な見方が可能であり，粘性による複雑な効果が無視できる．したがって，量子乱流を理解することで，それに肉付けする形で古典乱流を理解できる．

このような古典乱流のプロトタイプとしての量子乱流の研究が，近年盛んに行われている．Araki 達は，渦糸モデルの数値計算を用いて超流動 ^4He の量子乱流を研究した [7]．彼らは，Taylor-Green 渦とい

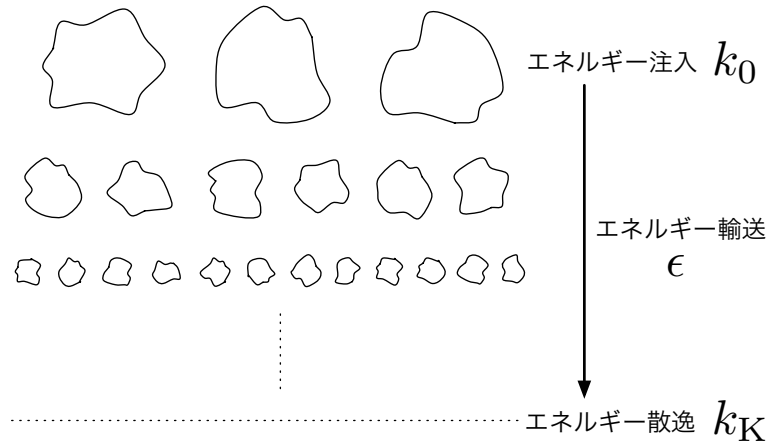


図 1.5 Richardson カスケードの模式図. 渦の分裂によって小スケールへとエネルギーが輸送される.

う量子渦の初期状態を用意し，そこからの減衰をみた．数値計算の空間分解能より小さな渦を人工的に消し，これにより高波数でのエネルギー散逸を起こしている．結果として，Kolmogorov 則をもったエネルギー・スペクトルが得られた．このように，古典乱流と量子乱流は類似性を示すことがわかってきた．この結果は，量子乱流が古典乱流のプロトタイプとなりうることを示唆している．

1.1.3 量子乱流に特有の物理

前節で古典乱流のプロトタイプとしての量子乱流の研究意義を述べてきたが，最後に量子乱流そのものの研究意義についても述べておきたい．次節でくわしく説明するが，超流動 ^4He は粘性をもつ常流体と非粘性の超流体によって構成されている．このことによって，超流動特有の物理が生まれる．その重要な例が，本論文の主題の一つである，熱対向流 (thermal counterflow) である．熱対向流とは，2 流体の対向流である．対向流速がある臨界値を超えたとき，量子乱流が現れる．熱対向流における量子乱流は，対向流を駆動する外力からのエネルギー注入によって駆動されている．一方で，2 流体の間には摩擦力が働き，これがエネルギー散逸をもたらす．エネルギーの注入と散逸がつりあったところで，量子乱流は統計的に定常となる．このように，量子乱流特有の性質が興味深い物理を生むことがわかる．

1.2 超流動 ^4He における量子乱流

この節では超流動 ^4He およびその乱流である量子乱流に関する基本的な知識を導入する．基本的な知識については文献 [1, 8, 9] が参考になる．より専門的な内容については，文献 [10] が参考になる．以下の多くの記述は，大阪市立大学素励起物理学研究室の過去の修士論文 [11, 12, 13] を参考にした．

1.2.1 2 流体モデル

超流動 ^4He は，Tisza と Landau によって提唱された 2 流体モデル (two-fluid model) を用いて現象論的に理解することができる [14, 15]．2 流体モデルでは，超流動 ^4He が常流体 (normal fluid) と超流体

1.2 超流動 ^4He における量子乱流

15

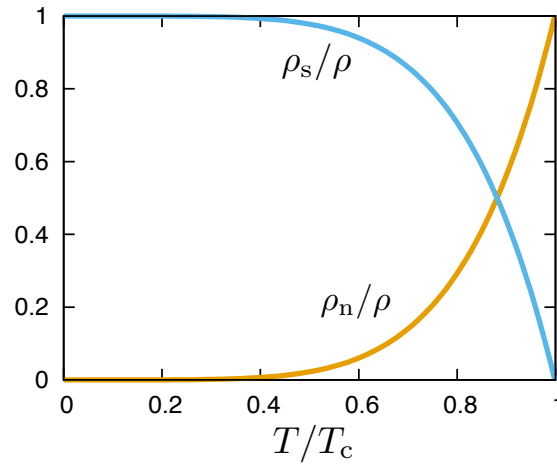


図 1.6 常流体密度 ρ_n/ρ と超流体密度 ρ_s/ρ の温度依存性. 転移温度 $T_c = 2.17\text{ K}$ を下回ると超流体が現れる.

(superfluid) の 2 成分によって構成されたと考える. 常流体はエントロピーと粘性をもつが, 一方で超流体はエントロピーと粘性をもたない. 常流体と超流体の密度をそれぞれ ρ_n および ρ_s と書くと, 全流体の密度 ρ は

$$\rho = \rho_n + \rho_s \quad (1.4)$$

となる. 図 1.6 は 2 流体の密度の温度依存性を表す. ラムダ温度以上において超流体は存在せず, 超流動 ^4He は常流体のみによって構成される. 温度を下げていくと, ラムダ温度 ($\sim 2.17\text{ K}$) において超流体が現れ, その後超流体密度が上昇していき, 1 K 以下では超流体が支配的になる.

常流体と超流体はそれぞれ別の速度場 $\mathbf{v}_n$ および $\mathbf{v}_s$ に従って運動する. 全流体の運動量密度 $\mathbf{j}$ は

$$\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s \quad (1.5)$$

となる. 2 流体が共に層流であるとき, 運動方程式は次のように表される^{*3}.

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_n (\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_n = -\frac{\rho_n}{\rho} \nabla P - \rho_n S \nabla T + \eta \nabla^2 \mathbf{v}_n, \quad (1.6)$$

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \rho_s (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla P + \rho_s S \nabla T. \quad (1.7)$$

ここで, P は圧力, T は温度, S は単位質量あたりのエントロピー, η は常流体の粘性係数である. 式 (1.6) および式 (1.7) は, 2 流体の速度場がそれぞれ独立であることを示している. しかし, 量子渦が存在するとき 2 流体の間には摩擦力が働くことがわかっている. したがって, これらの運動方程式は量子渦が存在しないときにのみ成立するものである. この摩擦力は相互摩擦力 (mutual friction forces) と呼ばれ, 1.2.3 項で説明される.

^{*3} 遅い流れの場合, さらに, 上下それぞれの式の右辺に $\mp(\rho_n \rho_s / 2\rho) \nabla (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)^2$ という項がつく [8].

1.2.2 量子渦

超流動速度場の循環の量子化という概念は、1949 年に Onsager によって初めて提唱された [16]. 彼は、超流動速度場の循環は量子化され、その循環の量子は $\kappa = h/m$ であると考えた. ここで、 h はプランク定数、 m は ^4He 原子の質量であり、 $\kappa = 0.998 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$ である. 超流体が占める領域を半径が異なる一連の同心円筒領域に分割する. 彼は、全系の角運動量が与えられているとき、エネルギーが最小になるような構造が実現すると考えた. 単連結な各円筒領域内では非回転の条件を課すが、領域の表面においては速度場が不連続になってもよいとする. ここで、中心にある領域では速度場がゼロでなければならない.

Feynman も同様の問題を考えていたが、Onsager とは少し異なる結論に達した [17]. 彼は、超流体中の渦は原子サイズ程度の渦芯をもち、したがって渦糸 (vortex filament) 構造を形成しているだろうと考えた. この描像によると、超流体は渦芯から排除され、量子化された動きによって渦芯の周りをまわることになる. 彼は、渦芯が細いとき何が渦芯サイズを決めるのかを考え、流体の表面張力を用いて渦芯サイズを決定した. その結果、超流動 ^4He 中の量子渦の渦芯半径 a_0 はおよそ $a_0 \sim 0.05 \text{ nm}$ と見積もられた. 実際、後に実験によって観測された渦芯半径は $a_0 \sim 0.13 \text{ nm}$ であり、Feynman の予想とよい一致を示した [18].

1961 年、Vinen は超流動 ^4He 中の循環の量子化を観測した [19]. 彼は、液体 ^4He を満たした半径 0.2 cm の円筒容器内に、中心軸にそって半径 $0.15 \text{ }\mu\text{m}$ の導線を配置した. この系は多重連結領域となっている. 中心軸にそって静磁場を印加し、導線に交流電流を流すと、導線はローレンツ力によって振動する. 導線の周りに回転流がない場合、互いに直交する 2 つの振動モードは縮退している. 導線の周りに回転流があるとマグナス力によって振動モードの縮退が解け、うなりが生じる. うなりを生じる振動数の差を観測することで、導線周りの循環が測定できる. Vinen は、まずラムダ温度以上の液体 ^4He を容器内で回転させ、続けてラムダ温度以下まで冷却した. その結果、実際に超流動 ^4He の循環 κ が h/m に量子化されていることが観測された.

超流動速度場の循環の量子化は、系の秩序変数 (order parameter) を考えることによって以下のように理解できる [20]. 超流動 ^4He は Bose-Einstein 凝縮を起こしており、その系は秩序変数である巨視的波動関数 $\Psi \equiv \Psi(\mathbf{r}, t)$ によって記述される^{*4}. 巨視的波動関数 Ψ は Gross-Pitaevskii 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \mu \right) \Psi + g |\Psi|^2 \Psi \quad (1.8)$$

に従う^{*5} [22, 23]. ここで、 $\hbar$ はプランク定数、 m は原子の質量、 μ は化学ポテンシャル、 g は s 波散乱長 a によって決まる粒子間相互作用定数で、 $g \equiv 4\pi\hbar^2/m$ である. 凝縮体の速度場は巨視的波動関数 Ψ を凝縮体密度 $n_0 \equiv n_0(\mathbf{r}, t)$ と位相 $\phi \equiv \phi(\mathbf{r}, t)$ の部分に分け、 $\Psi = \sqrt{n_0} e^{i\phi}$ と表記する. これを式 (1.8) へ

^{*4} 超流動 ^4He は液体であり、粒子間相互作用は無視できない. そのため、基底状態にいる粒子は全体の 1 割程度でしかない [21].

^{*5} じつをいうと式 (1.8) は超流動 ^4He に対しては妥当ではない. なぜなら、式 (1.8) の相互作用項 $g |\Psi|^2 \Psi$ は相互作用が弱いときの近似であるため、液体である超流動 ^4He にはそのまま使えないからである. この Gross-Pitaevskii 方程式は、原子気体 Bose-Einstein 凝縮体の場合に定量的に良いモデルである.

1.2 超流動 ^4He における量子乱流

17

代入し、実部と虚部分けると

$$\text{(実部)} \quad \frac{\partial \sqrt{n_0}}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} [2(\nabla \sqrt{n_0}) \cdot (\nabla \phi) + \sqrt{n_0} \nabla^2 \phi] \quad (1.9)$$

$$\text{(虚部)} \quad \hbar \frac{\partial \sqrt{\phi}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{m} \left[(\nabla \phi)^2 - \frac{\nabla^2 \sqrt{n_0}}{\sqrt{n_0}} \right] + \mu - g n_0 \quad (1.10)$$

という形式を得る事ができる [20]. ここで、確率密度の流れ $\mathbf{j} \equiv \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{\hbar}{2im} \{ \Psi^* \nabla \Psi - (\nabla \Psi^*) \Psi \} \\ &= \frac{\hbar}{m} n_0 \nabla \phi \end{aligned} \quad (1.11)$$

と書ける. 式 (1.9) を変形し、この式を用いると、

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = -\frac{\hbar}{m} \nabla \cdot (n_0 \nabla \phi) = -\nabla \cdot \mathbf{j} \quad (1.12)$$

となる. これは密度に関する連続の式になっており、 $\mathbf{j}/n_0$ は超流動速度場であると解釈できる. したがって、

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi \quad (1.13)$$

となる.

この式から、超流動流は渦なしの流れ ($\nabla \times \mathbf{v}_s = 0$) である事がわかる. 対象領域が単連結であるならば、速度場の循環 $\Gamma \equiv \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{r}$ は常に 0 である. しかし、対象領域が多重連結領域であるならば、循環 Γ は有限の値を持つことができる. 巨視的波動関数 Ψ が空間座標 $\mathbf{r}$ に関する一価関数でなければならないので、循環は

$$\begin{aligned} \Gamma &= \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{r} \\ &= \oint \frac{\hbar}{m} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} \\ &= \kappa \ell \quad (\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\kappa \equiv h/m \quad (1.15)$$

である. したがって、循環 Γ は κ の整数倍でなければならない. すなわち、超流動流の循環は量子化される.

半径 R の円筒容器の中心軸上に直線量子渦がある状況を考える [1]. 渦のエネルギーは渦が作る速度場の運動エネルギーであるので、量子渦の単位長さ当たりのエネルギー ϵ は

$$\epsilon = \int \frac{1}{2} \rho_s \mathbf{v}_s^2 d\mathbf{r} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \rho_s \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\phi \int_{a_0}^R \left(\frac{\kappa \ell}{2\pi r} \right)^2 r dr \\ &= \frac{\rho_s}{4\pi} (\kappa \ell)^2 \ln \left(\frac{R}{a_0} \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

である。直線量子渦の単位長さ当たりのエネルギー $(\kappa\ell)^2$ に比例していることから、 $\ell = \ell_1$ の量子渦が1本存在するよりも $\ell = 1$ の量子渦が ℓ_1 本存在する方がエネルギー的に安定である事がわかる。実際、特殊な場合を除いて、超流動 ^4He 中では $\ell = 1$ の渦のみが観測される。

古典的な渦は粘性によって生成と消滅を絶え間なく繰り返す、循環は任意の連続的な値を取ることができる。また、渦は粘性によって拡散する。これに対して、量子渦は粘性による減衰の機構が働かず、位相欠陥であるため安定に存在し、循環の値は κ に限定されている。超流体中には量子渦という明確な対象があり、それによって系が完全に特徴付けられる。

1.2.3 熱対向流と量子乱流

超流動 ^4He の系で、非常によく研究された系が熱対向流である。ここで、熱対向流とは常流体と超流体の対向流である。熱対向流の実験において、相互摩擦力と超流動乱流という重要な発見がなされた。以下では、そのことについて説明する。

まず、熱対向流について説明する [24]。熱対向流の模式図を図 1.7 に示す。超流動 ^4He の槽に断面積 A の菅をつながれている。菅のもう一方の端は閉じていて、ここにヒーターが取り付けられる。ヒーターを熱して単位時間あたり $\dot{Q}$ の熱量を加えると、菅に温度差 ΔT および圧力差 ΔP が生まれる*6。そうすると、式 (1.6) からわかるように、常流体は低温側（ヘリウム槽）に向かって流れる。それに応じて、超流体は

$$\int_A \mathbf{j} dA = \int_A (\rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s) dA = \mathbf{0} \quad (1.18)$$

を満たすように逆向きに流れる。なぜなら、菅は閉じているので全運動量はゼロになるからである。ここで、積分は菅断面にわたる面積分を表す。こうして、2流体の対向流が得られる。

常流動および超流動速度の菅断面にわたる平均値をそれぞれ V_n および V_s と書く。注入された熱流 $W \equiv \dot{Q}/A$ は、すべて常流体によってヘリウム槽に運ばれる。ゆえに、

$$V_n = W/\rho_s T. \quad (1.19)$$

一方、式 (1.18) と式 (1.19) より平均超流動速度は

$$V_s = \rho_n V_n / \rho_s \quad (1.20)$$

となる。したがって、2流体の平均相対速度は、

$$V \equiv V_n + V_s = W/\rho_s T \quad (1.21)$$

となる。

熱流 W が小さいときには、流れは層流であると仮定しても良さそうである。もしこの仮定が正しいなら、粘性を持つ常流体は Poiseuille(ポアズイユ) の法則に従う [25, 26]。すなわち、半径 d の円菅を考えると圧力勾配は

$$\nabla P = 8\eta V_n / d^2 \quad (1.22)$$

*6 典型的な実験では $\Delta T \sim 1 \text{ mK}$ であり、系の温度 T よりはるかに小さい。したがって、式 (1.19) などの導出ではこの温度変化を無視している。

1.2 超流動 ^4He における量子乱流

19

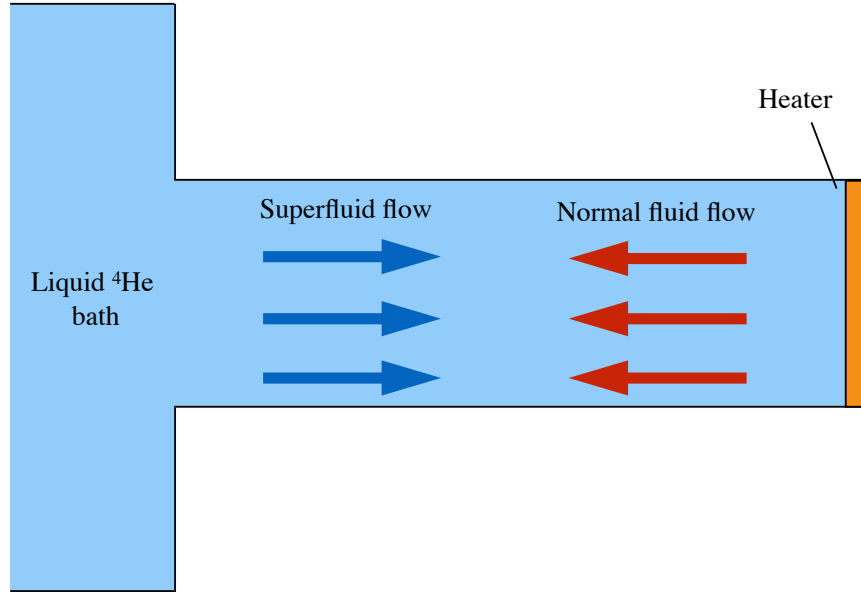


図 1.7 熱対向流の模式図. 常流体と超流体が互いに逆向きに流れる.

と書ける. さらに, 温度勾配は

$$\nabla T = \nabla P / \rho S = 8\eta V_n / \rho S d^2 \quad (1.23)$$

で与えられる. 実際, 熱流 W がある臨界値 W_{C1} より小さいとき, これらの式は実験とよい一致を示すことが知られている [27, 28, 29, 30, 31, 32]. したがって, $W < W_{C1}$ において流れは層流である.

熱流がある値 W_{C1} より大きいとき, 圧力勾配はこれらの層流状態の圧力勾配よりも大きいことが観測された [33, 34, 35]. $W < W_{C1}$ の層流においては, 式 (1.19) および式 (1.22) からわかるように圧力勾配は W に比例した. 一方で, $W > W_{C1}$ においては, 圧力勾配が W^3 に比例することが観測された [36, 37]. 2 流体の運動方程式 (1.6) と (1.7) は粘性項を除いて対称である. したがって, このことを何か新しい力を導入することで説明しようとするなら, その力はおそらく 2 流体に同じ大きさで逆方向に作用するだろう [38]. その力を $\mathbf{f}_{sn}$ と書くと, 2 流体の運動方程式は

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho_n (\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_n = -\frac{\rho_n}{\rho} \nabla P - \rho_n S \nabla T + \eta \nabla^2 \mathbf{v}_n + \mathbf{f}_{sn}, \quad (1.24)$$

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \rho_s (\mathbf{v}_s \cdot \nabla) \mathbf{v}_s = -\frac{\rho_s}{\rho} \nabla P + \rho_s S \nabla T - \mathbf{f}_{sn} \quad (1.25)$$

に修正される. このとき, 温度勾配は

$$\nabla T = \nabla T_L + \mathbf{f}_{sn} / \rho_s S \quad (1.26)$$

で与えられる. ここで, ∇T_L は式 (1.23) によって与えられる温度勾配である. 式 (1.26) を実験結果に用いることにより,

$$F_{sn} = A \rho_s \rho_n (V - V_0)^3 \quad (1.27)$$

であることがわかった。ただし、 F_{sn} は $|\mathbf{f}_{sh}|$ の空間平均、 V_0 は実験の状況に依存する定数であり、 A は Gorter-Melink の定数と呼ばれる。

2 流体の相互摩擦力は、超流動が乱流状態になっていることを示す。これを最初に実験的に示したのが Vinen であった [39, 40, 41, 42]。Vinen は、熱対向流の実験において、流れに垂直な方向に第 2 音波を入射させてその減衰を調べた。結果として、相互摩擦力が生じると、管を横切った第 2 音波が大きく減衰することがわかった。これは、熱対向流中に第 2 音波を減衰させる何かが存在することを示す。彼は実験を詳しく解析し、確かに相互摩擦力が式 (1.27) の形で書けることを示した。最終的に、超流動乱流は量子渦が複雑に絡みあったタングルであり^{*7}、相互摩擦力とは超流動の量子渦タングルと常流動との相互作用であると結論づけられた。

超流動乱流における量子渦の線長密度

$$L = \frac{1}{\Omega} \int_{\mathcal{L}} d\xi \quad (1.28)$$

の時間変化を記述する方程式が Vinen 方程式である [37, 39, 45, 46]。ここで、 ξ は渦糸に沿った 1 次元座標、 Ω は系の中のある体積、積分範囲 $\mathcal{L}$ は Ω 内部の全渦糸を表す。一様・等方な超流動乱流を考えると、量子渦間の平均距離は $l = L^{-1/2}$ となる。このとき、量子渦の循環を κ と書くと、量子渦が周囲につくる超流動速度場は $v_s \sim \kappa/2\pi l$ である。よって、次元解析より単位時間あたりの L の増加は

$$\frac{\chi_1 B \rho_n}{2\rho} V L^{3/2} \quad (1.29)$$

で書けることがわかる。ここで χ_1 は現象論的パラメータ、 B は温度に依存する相互摩擦係数である。一方、 L の減衰は、再結合に起因する素励起の放出により起こる [17]。量子渦の単位質量あたりのエネルギーは v_s^2 に比例する値である。量子渦は時間 $\tau = l/v_s$ ごとに再結合を起こし、そのエネルギーが失われる。したがって、単位時間あたりのエネルギー減衰は

$$-\chi_2 \frac{v_s^2}{\tau} = -\chi_2 \frac{v_s^3}{l} = -\chi_2 \frac{\kappa}{2\pi} L^2 \quad (1.30)$$

となる。ここで χ_2 は現象論的パラメータである。よって、増加と減衰をまとめると、

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\chi_1 B \rho_n}{2\rho} V L^{3/2} - \chi_2 \frac{\kappa}{2\pi} L^2 \quad (1.31)$$

となる。これを Vinen 方程式という。もし初期状態が $L = 0$ であるならば、それ以降の時間に対して $L(t) = 0$ という解が得られる。すなわち、この方程式は渦の生成は記述していない。実際には、管壁などに残留した量子渦が存在し、それが外部から印加される速度場によって増幅されると予想されている。もし対向流速が $V = 0$ であり初期状態が $L = L_0$ であるならば、解は

$$\frac{1}{L} = \chi_2 \frac{\kappa}{2\pi} t + \frac{1}{L_0} \quad (1.32)$$

となる。このような量子乱流の減衰が実際に観測されている [46]。初期に残留渦が存在し、対向流速がゼロでない場合の定常解は

$$L^{1/2} = \gamma V, \quad \gamma \equiv \frac{\pi B \rho_n \chi_1}{\kappa \rho \chi_2} \quad (1.33)$$

である。実際、この結果は熱対向流の実験結果をよく説明する [24]。

^{*7} これとは独立に、Feynman も超流動乱流は量子渦のタングルであるという予想をしていた [17]。

1.3 渦糸モデル

渦芯のスケールよりも十分大きいスケールの流体现象を扱う場合、渦を太さの無い糸として近似できる。この近似は渦糸近似あるいは渦糸モデルと呼ばれている。量子渦は安定に存在し、さらにその渦芯半径 a_0 はおよそ 0.1 nm と非常に細い。それゆえ、渦糸モデルは量子乱流の研究において非常に有効な手法である。渦糸モデルは、量子乱流をその基本的な構成要素である量子渦から理解するのに大きな貢献を果たしてきた [49, 50]。本論文の研究でも、基本的にこの手法を用いる。この章では、渦糸モデルについて説明する [51]。

1.3.1 0 K における渦糸の運動

渦糸が作る速度場について考える。渦糸を三次元空間中の曲線とみなし、微分幾何に習ってその性質を表現する。パラメータ ξ を曲線に沿った一次元座標とし、ある時刻 t における渦糸上の点を位置ベクトル $\mathbf{s}(\xi, t)$ によって表す。この曲線に沿った微分は $\mathbf{s}' \equiv \partial \mathbf{s} / \partial \xi$ と書き、これは渦度 $\boldsymbol{\omega}$ の方向を向く単位ベクトルである。また、 $\mathbf{s}'' \equiv \partial^2 \mathbf{s} / \partial \xi^2$ は $\mathbf{s}'$ に垂直なベクトルで、その大きさは局所的な曲率半径 R の逆数である。図 1.8 はこれらを模式的描いている。いま、非圧縮条件

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_s = 0 \quad (1.34)$$

が満たされていると考える。渦糸近似においては、渦度は渦糸上に特異的に局在しているので、

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla \times \mathbf{v}_s = \kappa \int_{\mathcal{L}} d\xi \mathbf{s}'(\xi, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{s}(\xi, t)) \quad (1.35)$$

と書ける。ここで、積分経路 $\mathcal{L}$ は全ての渦糸にそった曲線である。式 (1.34) と式 (1.35) は電磁気学における Maxwell 方程式 ($\mathbf{H}$: 磁場, $\mathbf{j}$: 電流密度)

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (1.36)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (1.37)$$

と同じ形をしている。磁場が超流動速度に対応し、電流密度が渦度に対応する。電磁気学の Biot-Savart の法則を導いたときを同様の方法で、流体力学の Biot-Savart の法則

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|^3} d\mathbf{x} \quad (1.38)$$

が導かれる [9, 26]。これに、式 (1.35) を代入すると

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{(\mathbf{s}_1(\xi, t) - \mathbf{r}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1(\xi, t) - \mathbf{r}|^3} \quad (1.39)$$

を得る。この表現からわかるように、渦糸の配置のみによって超流動速度場が決定される。

相互摩擦力と固体境界の影響が無視できるとき、渦糸は流体の運動を完全に追従する [25]。これは、超流体が完全流体であり、Helmholtz の渦定理が成り立つためである。そこで、上の結果を用いて渦糸上の

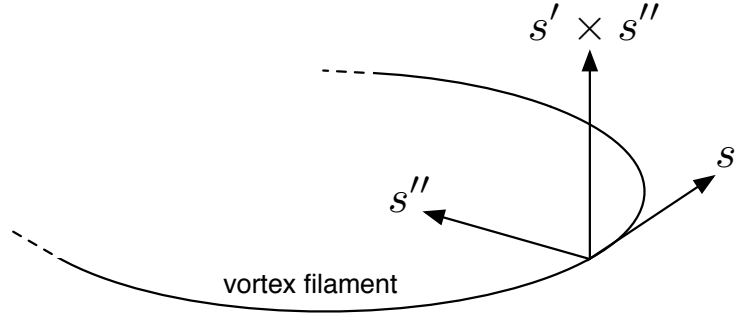


図 1.8 渦糸とその構造を特徴付ける 3 つ組ベクトル.

超流動速度場を求めることで、渦糸の運動を考える。渦糸上の点 $\mathbf{r} = \mathbf{s}(\xi_0, t)$ における速度場 $\mathbf{v}_{s,\omega}(\mathbf{s}, t)$ は式 (1.39) から

$$\mathbf{v}_{s,\omega}(\mathbf{s}, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3} \quad (1.40)$$

$$= \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{(\mathbf{s}_1(\xi, t) - \mathbf{s}(\xi_0, t)) \times \mathbf{s}'_1(\xi, t)}{|\mathbf{s}_1(\xi, t) - \mathbf{s}(\xi_0, t)|^3} d\xi \quad (1.41)$$

となる。ここで、 $\partial \mathbf{s}_1 / \partial \xi \equiv \mathbf{s}'_1(\xi, t)$ である。この積分は $\mathbf{s}_1 \rightarrow \mathbf{s}$ (あるいは $\xi \rightarrow \xi_0$) の極限において発散してしまう*8。この積分の発散を回避するため、式 (1.41) の積分経路を点 $\mathbf{s}$ 近傍と点 $\mathbf{s}$ 近傍以外の寄与に分ける。その Taylor 展開は

$$\mathbf{s}(\xi) \approx \mathbf{s}(\xi_0) + (\xi - \xi_0)\mathbf{s}'(\xi_0) + \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2}\mathbf{s}''(\xi_0) \quad (1.42)$$

で与えられる。この式を用いると、 $\xi - \xi_0$ を改めて ξ として、式 (1.41) は

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{s,\omega}(\mathbf{s}, t) &= \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3} \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \int_a^{R_1} \frac{(\mathbf{s}(\xi, t) - \mathbf{s}) \times \mathbf{s}'(\xi, t)}{|\mathbf{s}(\xi, t) - \mathbf{s}|^3} d\xi + \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{L}'} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3} \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \int_a^{R_1} \frac{d\xi}{\xi} \mathbf{s}'(\xi_0, t) \times \mathbf{s}''(\xi_0, t) + \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{L}'} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3} \\ &= \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' + \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{L}'} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3} \\ &= \mathbf{v}_{s,\text{local}} + \mathbf{v}_{s,\text{nonlocal}} \end{aligned} \quad (1.43)$$

となる [1, 51]。ここで、 $\mathcal{L}'$ は点 $\mathbf{s}$ の近傍を除いた全渦糸を表す。また、 $\beta \equiv (\kappa/4\pi) \ln(R_1/a)$ であり、 $\mathbf{v}_{s,\text{local}}$ は局所項と呼ばれる。 $|\mathbf{s}''| = R^{-1}$ であるので、局所項は局所的な曲率の大きさに比例する。すなわち、この項は点 $\mathbf{s}$ 近傍の渦糸の形状によって誘起される速度場である。このことから $\mathbf{v}_{s,\text{local}}$ は自己誘導速度場とも呼ばれる。図 1.8 は、渦糸の構造を特徴付ける 3 つ組ベクトルと、自己誘導速度場の方向を

*8 このことは渦糸近似が渦芯の内部構造を無視していることに起因する。 $\mathbf{s}_1 \rightarrow \mathbf{s}$ の極限において、渦芯のスケールが無視できなくなるためである。

1.3 渦糸モデル

23

示している。 $\mathbf{v}_{s,\text{nonlocal}}$ は非局所項と呼ばれ、遠方の渦糸からの寄与による速度場である。なお、渦輪の伝播速度に関する実験により $a = e^{1/2}a_0$ である事がわかっている^{*9}。 R_1 は典型的な渦糸の曲率半径で、数値計算では考えている点の曲率半径を用いている。

Schwarz によると、局所項と非局所項の大きさの比はおおよそ 10 対 1 と局所項の方が大きく [51]、渦糸の運動は主に局所項によって決まっている。このことから、Schwarz の量子乱流に関する 1988 年の論文では、非局所項を無視して渦糸モデルの数値計算が行われた [49]。このように非局所項を無視する近似のことを局所誘導近似と呼ぶ。Schwarz は、局所誘導近似のもとで熱対向流中の量子乱流を数値計算し、その性質を明らかにした。しかし、実際は非局所項が量子乱流において重要な役割を演じていることが、2010 年の Adachi らの研究によりわかった [50]。このことは、第 2 章で詳しく説明する。

1.3.2 固体境界が誘起する速度場

系内に固体境界が存在する場合を考える。超流体は非粘性流体であるため、固体境界において超流体が滑ることは許される。一方で、超流体は固体境界内に入りこまないという境界条件

$$\mathbf{v}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\text{固体境界上}) \quad (1.44)$$

を満たさなければならない。ただし $\hat{\mathbf{n}}$ は固体境界に対して法線方向の単位ベクトルである。そのため、これを満たすような境界誘起場 $\mathbf{v}_{s,b}$ が必要となる。固体境界が存在するときの超流動速度場は $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{s,\omega} + \mathbf{v}_{s,b}$ となる。

境界誘起場を求めるためには、境界条件式 (1.44) の下で式 (1.34) と式 (1.35) を解けばよい。渦糸が存在しない領域では超流動流はポテンシャル流であることを用いると、これらは結果的に

$$\nabla \times \mathbf{v}_{s,b} = 0 \quad (1.45)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_{s,b} = 0 \quad (1.46)$$

$$(\mathbf{v}_{s,\omega} + \mathbf{v}_{s,b}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (\text{固体境界上}) \quad (1.47)$$

という境界値問題に帰着される。

一般的に言うと、この方程式を解析的に解くことは難しい。しかし、固体境界が滑らかな平面である場合、鏡像法を用いることで簡単に境界誘起場を求めることができる。鏡像渦とは、流体中の渦糸について平面境界に対称かつ逆向きの渦糸のことで、この鏡像渦糸が作る速度場が境界誘起場 $\mathbf{v}_{s,b}$ となる (図 1.9)。固体境界が複雑な形状の場合は解析的に境界誘起場を求めることができず、数値的に求める事になる。

最終的に絶対零度で渦糸が従う方程式を示すと

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} = \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' + \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{C}'} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3} + \mathbf{v}_{s,b} + \mathbf{v}_{s,a} \quad (1.48)$$

となる。ここで、 $\mathbf{v}_{s,a}$ は量子渦に起因しない速度場である。量子渦に起因しないので、熱対向流などの管流の $\mathbf{v}_{s,a}$ は一様流となる。

^{*9} $a = e^{1/2}a_0$ となる理由は、文献 [8] の 3 章に書かれている。通常の完全流体の場合は $a = e^{1/4}a_0$ である。Schwarz などの先行研究は、これにもとづいて $a = e^{1/4}a_0$ を採用していた [51]。

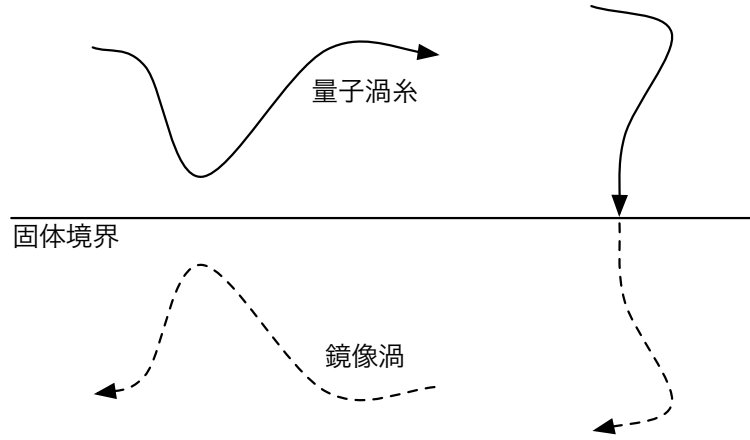


図 1.9 固体境界条件を満たすために配置される鏡像渦。

1.3.3 有限温度における渦糸の運動

量子渦が常流体に対して相対速度をもって運動している場合、相互摩擦力が量子渦に働く。この量子渦の単位長さあたりに働く相互摩擦力を渦の接線方向に垂直な方向と、さらにそれに垂直な方向に分解すると一般的に

$$\mathbf{f}_D = \gamma_0 \kappa \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\dot{\mathbf{s}} - \mathbf{v}_n)] - \gamma'_0 \kappa \mathbf{s}' \times (\dot{\mathbf{s}} - \mathbf{v}_n) \quad (1.49)$$

という形に書ける。ここで $\dot{\mathbf{s}}$ は有限温度での量子渦の速度である。さらに量子渦がこの相互摩擦力を受けて、超流動速度 $\dot{\mathbf{s}}_0$ に対して回転しながら相対的に動くので渦にはマグナス力がかかる。渦の単位長さ当たりにかかるマグナス力は

$$\mathbf{f}_M = \rho_s \kappa \mathbf{s}' \times (\dot{\mathbf{s}} - \dot{\mathbf{s}}_0) \quad (1.50)$$

になる。つぎに、運動方程式の慣性項を考える。完全流体中を運動する物体にはその物体が排除した流体の質量に比例する誘導質量が印加され見かけ上の質量は物体の質量と誘導質量の和となる。量子渦の場合を考えると、渦芯の質量はゼロであり、かつ円筒形状と過程すれば渦芯が排除した流体の単位長さ当たりの質量は $\rho_s \pi a^2$ であるため、みかけの質量も $\rho_s \pi a^2$ となる。渦芯の半径 a は $\text{\AA}$ のオーダーなので質量は非常に小さくなり、上記の力の項に比べ慣性項は無視できる。

$$\mathbf{f}_M + \mathbf{f}_D = 0 \quad (1.51)$$

式 (1.49) と式 (1.50) を用いてこれを $\dot{\mathbf{s}}$ について解くと、有限温度での渦糸の方程式は

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_0 + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \dot{\mathbf{s}}_0) - \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \dot{\mathbf{s}}_0)] \quad (1.52)$$

となる。この α, α' の項が相互摩擦力による寄与であり、 α, α' は無次元の係数

$$\alpha = \frac{\rho_s \kappa \gamma_0}{\gamma_0^2 + (\rho_s \kappa - \gamma')^2}, \quad \alpha' = \frac{\gamma_0^2 - \gamma'_0 (\rho_s \kappa - \gamma'_0)}{\gamma_0^2 + (\rho_s \kappa - \gamma')^2} \quad (1.53)$$

表 1.1 相互摩擦係数 [51].

T (K)	α	α'
1.0	0.006	0.003
1.1	0.012	0.006
1.2	0.023	0.011
1.3	0.036	0.014
1.4	0.052	0.017
1.5	0.073	0.018
1.6	0.098	0.016
1.7	0.127	0.012
1.8	0.161	0.008
1.9	0.21	0.009
2.0	0.29	0.011
2.05	0.36	0.003
2.10	0.50	-0.030
2.15	1.09	-0.27

ある. この相互摩擦係数は温度に依存する定数であることが Hall と Vinen の実験により観測された. 現在, 実験により得られている相互摩擦係数を表 1.1 に示す. $T \rightarrow 0$ で $\alpha, \alpha' \rightarrow 0$ となり, 式 (1.52) は 0 K の運動方程式に帰着する.

ここで, 有限温度における渦糸の運動の特徴を説明する. 簡単化のために半径 R の渦輪を考え, 局所誘導近似を用いる. 基本的に $\alpha > \alpha'$ であるので, 式 (1.52) において α' の項を無視する. 式 (1.48) から式 (1.52) の α の項は

$$\alpha \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{s,a} - \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'') \quad (1.54)$$

となる. $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{s,a}$ が自己誘導速度と同じ方向に働いているとすると, この項の符号を決める臨界半径 R_0 は

$$R_0 \approx \frac{\beta}{|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{s,a}|} \quad (1.55)$$

となる. ここで $|\mathbf{s}' \times \mathbf{s}''| = 1/R$ を用いた. このことから, 渦のある点における曲率半径が R_0 より大きいとき, 渦糸は図 1.10(a) の矢印の方向に膨らみ, 反対に R_0 より小さいときは図 1.10(b) の矢印の方向に縮むことがわかる. すなわち, α の項は渦の長さを変化させ, 曲率半径が R_0 より小さい形状を平滑化する. $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{s,a}$ が自己誘導速度と逆方向に動いている場合は, 式 (1.55) の括弧内の符号は常に負になり, 全ての渦が縮む. また印加速度 $\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{s,a}$ がない場合も全ての渦が縮む.

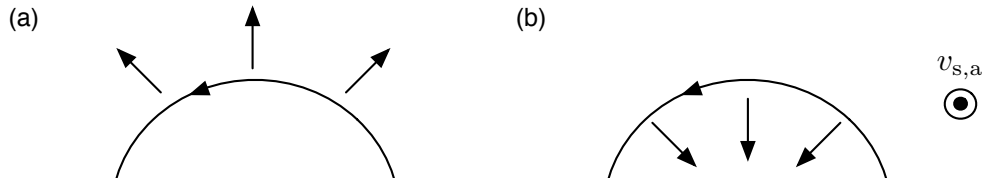


図 1.10 渦糸長の成長と減衰の機構. 紙面垂直手前向きに $\mathbf{v}_{s,a}$ が課されている. (a) $R > R_0$ のとき $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{s,a} - \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}''$ が外側を向き, 渦輪が膨張する. (b) $R < R_0$ のときは内側を向き, 渦輪が収縮する.

1.3.4 量子渦の再結合

量子渦同士が交差するとき, 何が起こるのであろうか. Schwarz は粘性流体中の渦がつなぎ替え (再結合) を起こしていることから, 超流体中の量子渦も繋ぎ替えを起こしていると仮定してこれを数値計算に取り入れた [51]. しかし, 粘性流体における再結合は粘性によって引き起こされるので, 粘性をもたない超流体において再結合が起こるかは不明である. 現在では, 渦糸の再結合を仮定して行った数値計算が実験と一致することと, 希薄ボース気体における Gross-Pitaevskii 方程式の直接数値計算によって量子渦の再結合が示されたことから [43], この仮定は正しいと考えられている. 本研究もこれに従って再結合の仮定を取り入れている.

図 1.11 は渦糸の再結合の様子である. まず二本の渦糸が近づき, 非局所項 (渦間相互作用) が大きくなると, 互いの速度場によって反平行になりながら近づく. 渦芯より小さなスケールで何が起こるかは, 渦糸近似ではわからない. 本論文の渦糸モデルの数値計算では, 空間分解能 $\delta\xi$ 以内に近づいた二本の渦糸をつなぎかえる^{*10}. そして, 繋ぎ替えを起こした二本の渦糸は極めて大きな曲率を持つため (図 1.11-(c)), 局所項 (自己誘導速度場) が大きくなり, 互いに急速に離れていく. 渦糸同士の衝突だけでなく, 固体境界と渦糸の衝突においても再結合は起きる. この場合, 渦糸と鏡像渦糸との再結合として考えれば良い.

1.3.5 2 流体結合ダイナミクス

本論文では 2 流体結合ダイナミクスを扱わない, すなわち量子乱流のダイナミクスは数値計算するが, 常流動のダイナミクスは扱わず時間的に変化しないものとする. しかし, 今後の研究課題として言及するので, ここで簡単に説明する. ここまで説明してきたように, 超流体のダイナミクスは渦糸モデル

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_0 + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \dot{\mathbf{s}}_0) - \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \dot{\mathbf{s}}_0)] \quad (1.56)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_0 = \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' + \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{L}'} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3} + \mathbf{v}_{s,b} + \mathbf{v}_{s,a} \quad (1.57)$$

^{*10} 他にも, 渦糸同士が交差したときにつなぎかえる, という再結合モデルを用いる研究もある.

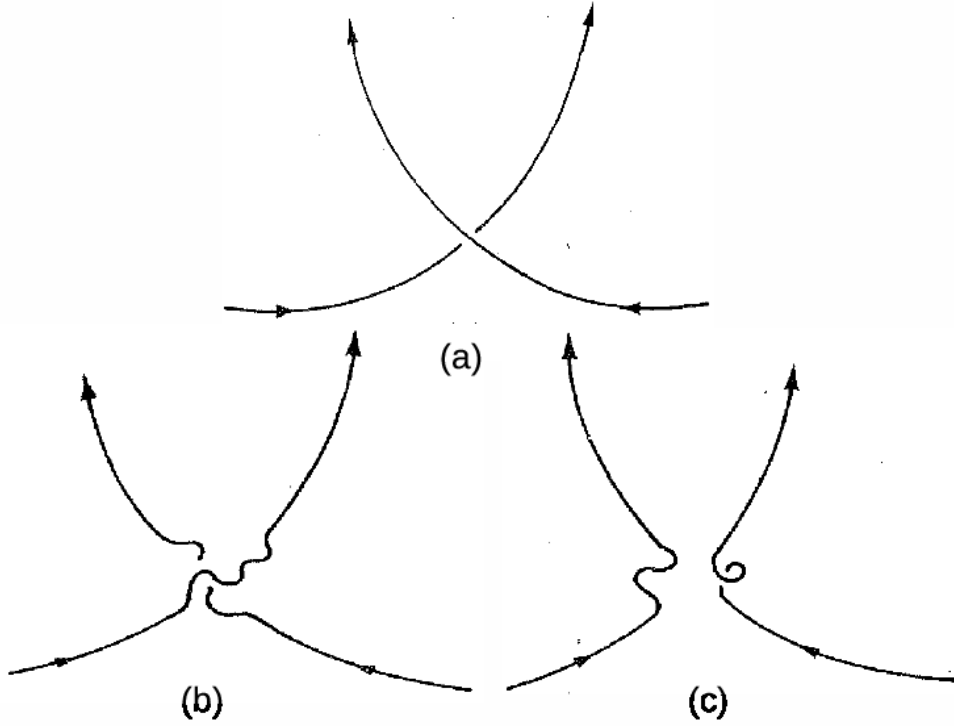


図 1.11 量子渦の再結合. (a) 量子渦同士が接近する. (b) 接触すると量子渦同士がつなぎかわる. (c) 互いに遠ざかる. (Reprinted figure with permission from K. W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **18**, 245 (1978). Copyright (1978) by the American Physical Society.)

で記述できる. ここで, α および α' の項は相互摩擦力が起源であり, この項を通して常流動速度 $\mathbf{v}_n$ の影響が超流体に伝わる. 一方, 常流体のダイナミクスは相互摩擦力 $\mathbf{F}_{sn}$ を含んだ Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} = -(\mathbf{v}_n \cdot \nabla) \mathbf{v}_n - \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu_n \nabla^2 \mathbf{v}_n + \mathbf{F}_{sn} \quad (1.58)$$

$$\mathbf{F}_{sn} = -\frac{\nu_*}{\zeta^3} \int_{\mathcal{L}'(\mathbf{r})} d\xi \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \dot{\mathbf{s}}) + \frac{\nu_{**}}{\zeta^3} \int_{\mathcal{L}'(\mathbf{r})} d\xi \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \dot{\mathbf{s}})] \quad (1.59)$$

で記述できる. この相互摩擦力 $\mathbf{F}_{sn}$ の表現は, Kivotides によって与えられたものである [53, 54]. ここで, ζ は $\mathbf{v}_n$ のゆらぎのカットオフスケールより小さい長さスケールであり, $\mathcal{L}'(\mathbf{r})$ は $\mathbf{r}$ を中心とした体積 ζ^3 の中にある渦糸を表す. また, ν_* および ν_{**} は常流体が受ける相互摩擦力に関する動粘性係数である. 相互摩擦力 $\mathbf{F}_{sn}$ の表式を見ると, 常流体が渦糸から力を受けていることがわかる. すなわち, 常流体は相互摩擦力 $\mathbf{F}_{sn}$ を通して量子渦タングルの影響を受ける. 以上のように, ダイナミクスにおいて超流体と常流体は互いに影響し合う. 数値計算においても, 本来は, 2 流体のダイナミクスを同時に扱い, 相互摩擦力により 2 流体が結合した連立シミュレーションを行うべきである. しかしながら, これは非常に難しく, Kivotides の研究がいくつかあるのみである [53, 54]. その大きな困難の一つが, 常流体が Euler 的な見方である一方, 超流体が Lagrange 的な見方であることである. すなわち, 常流体は空間格子上的速度場を計算するのに対して, 超流体は量子渦の軌跡を計算する. そして, Euler 的な量と Lagrange 的な量を結合させる必要がある. 本論文の研究では常流動のダイナミクスは計算せず, $\mathbf{v}_n$ は外部から与え

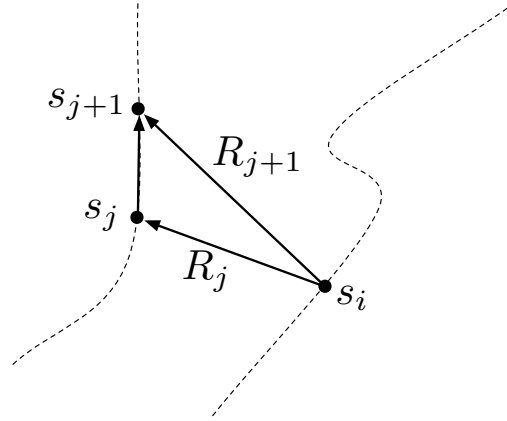


図 1.12 Biot-Savart 積分の模式図. 線素 $(s_{j+1} - s_j)$ が点 s_i につくりだす速度場を計算するとき, 2つのベクトル $\mathbf{R}_j = s_j - s_i$ および $\mathbf{R}_{j+1} = s_{j+1} - s_i$ を用いる.

るパラメータとして扱っている. 2 流体結合ダイナミクスの研究は, 今後の課題としたい.

1.4 渦糸モデルの数値計算方法

ここでは, 渦糸モデルの数値計算方法について説明する [11, 12, 13]. 渦糸は連続な線であるが, 数値計算で扱うためには離散的な点の集合と考えなければならない. 数値計算上の渦糸の議論をする上で, これ以後渦糸は点と点を結ぶことによって構成された線であるとする. 渦糸自身と渦糸を構成する点に番号を付け, 渦糸上の点の番号を $i = 0, 1, 2, \dots$ とする.

1.4.1 Biot-Savart 積分と局所項の計算

数値計算において Biot-Savart 積分をどう計算するかについて述べる. まず, 非局所項の速度場を考える. 任意の渦糸上の隣り合う二点 s_j, s_{j+1} の線素が, ある渦糸上の点 s_i に作る速度場の非局所項 $\delta \mathbf{v}_{s, \text{nonlocal}}^j$ は式 (1.43) より

$$\delta \mathbf{v}_{s, \text{nonlocal}}^j(s_i) = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{(|\mathbf{R}_j| + |\mathbf{R}_{j+1}|) \mathbf{R}_j \times \mathbf{R}_{j+1}}{|\mathbf{R}_j| |\mathbf{R}_{j+1}| (|\mathbf{R}_j| |\mathbf{R}_{j+1}| + \mathbf{R}_j \cdot \mathbf{R}_{j+1})} \quad (1.60)$$

と表せる [51, 10]. ここで, $\mathbf{R}_j = s_j - s_i, \mathbf{R}_{j+1} = s_{j+1} - s_i$ である (図 1.12). そして, 式 (1.60) を, s_i 近傍の線素 $\mathbf{l}_+ = s_{i+1} - s_i$ と線素 $\mathbf{l}_- = s_i - s_{i-1}$ を除いて和を取れば非局所項が計算できる.

次に局所項について考える. 隣接する 3 点 s_{i+1}, s_i, s_{i-1} を考える (図 1.13). 3 点を通る曲線を円周

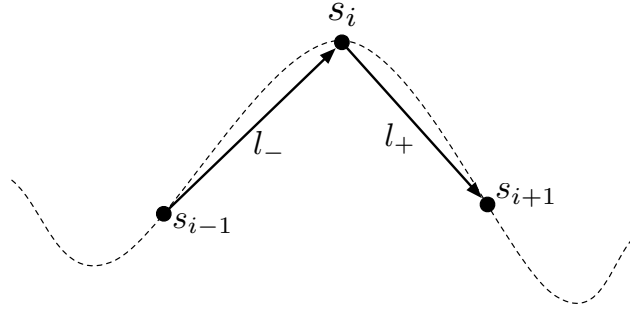


図 1.13 隣接する 3 つ計算点 s_{i-1} , s_i , s_{i+1} とその間のベクトル l_- , l_+ の模式図. これらを用いて局所項を計算する.

で近似し, その円周に沿った微係数を求めると, s'_i および s''_i は

$$\begin{aligned} s'_i &= d_i^+ l_+ + d_i^- l_-, \\ s''_i &= c_i^+ l_+ - c_i^- l_-, \\ d_i^\pm &= \frac{l_\mp^2}{|l_+ l_-^2 + l_- l_+^2|}, \\ c_i^\pm &= \frac{a_\pm}{|a_+ l_+ - a_- l_-|^2}, \\ a^\pm &= \frac{1}{2} \frac{l_+^2 l_-^2 + l_\mp^2 l_+ \cdot l_-}{l_+^2 l_-^2 - (l_+ \cdot l_-)^2}, \end{aligned}$$

となるので [51], 局所項 $\delta v_{s, \text{local}}(s_i)$ は

$$\begin{aligned} \delta v_{s, \text{local}}(s_i) &= \beta_i s'_i \times s''_i \\ &= -\beta_i (d_i^+ c_i^- + d_i^- c_i^+) (l_+ \times l_-) \end{aligned} \quad (1.61)$$

$$\beta_i \equiv \frac{\kappa}{4\pi} \ln \left[\frac{2(l_+ l_-)^{1/2}}{e^{1/2} a_0} \right] \quad (1.62)$$

と表せる.

1.4.2 計算点の挿入と除去

非局所項を計算するとき, 線素を直線として計算した. 曲率の大きい部分の計算をするには, 点の数を増やして点間隔を狭くしなければ十分な精度を得られない. しかし, 全体的に点の数を増やすと計算に膨大な時間がかかってしまう. そこで, 十分な計算精度を得て計算時間を短縮するために, 各計算ステップ毎に曲率半径 R を計算し, R が大きいところのみ多くの点を配置する. 具体的には, ある基準 $h_{\max}$ よりも広がった二点 s_i, s_{i+1} の間に, $(s''_i + s''_{i+1})/2$ の主法線ベクトルを持つような点 s を, 二点 s_i, s_{i+1} が張る平面上に弧を描くように挿入する (図 1.14). また点を取り除く場合, もう一つの基準 $h_{\min}$ よりも狭くなった三点 s_{i-1}, s_i, s_{i+1} に対して, その真ん中の点 s_i を取り除く.

ここで基準 $h_{\max}$ は $2\pi R/30$ あるいは点間隔の最大値 $\delta \xi_{\max}$ であり, 考えている渦糸上の点に隣接する一方の線素 (図 1.14 において, 線素 $s_i - s_{i-1}$ あるいは $s_{i+1} - s_i$) の長さが, この基準よりも長くなったときに点を挿入している. またもう一つの基準 $h_{\min}$ は $2\pi R/60$ あるいは点間隔の最小値 $\delta \xi_{\min}$ であり,

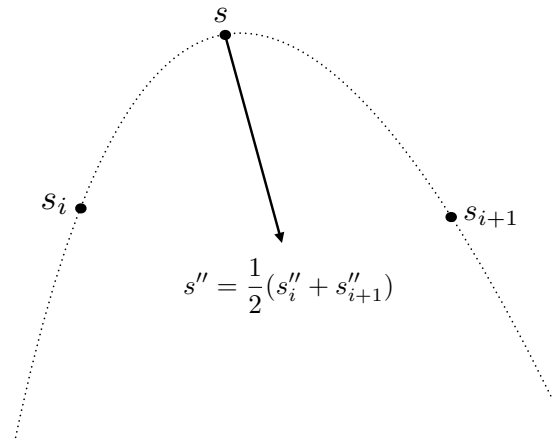


図 1.14 計算点の挿入. 隣接する 2 点 s_i と s_{i+1} の間に新たな計算点 s を加える. 新たな計算点 s は, $s'' = (s''_i + s''_{i+1})/2$ を満たすようにする.

考えている渦糸上の点に隣接する両方線素 (図 1.14 において, 線素 $s_i - s_{i-1}$ と $s_{i+1} - s_i$ の両方) の長さが, この基準よりも短くなったときに考えている点を除去して点 (線素) の数を減らしている. このようにして, 計算精度を保ちつつ計算時間を短縮している.

点間隔の最大値は $\delta\xi_{\max} \sim 3\delta\xi_{\min}$ であり, 点間隔の最小値 $\delta\xi_{\min}$ は渦芯よりも 10 倍以上大きく, 考える系の最小スケールの現象が表現できるように設定する. 時間ステップ δt は, この点間隔で数値的破綻が起きないように適切に決める.

1.4.3 小さい渦輪の除去

数値計算において, 点間隔の最小値 $\delta\xi_{\min}$ の 5 倍より全長が短い渦輪, および構成している点の数が 3 個より少ない渦輪を, 人工的に除去している. このような操作をするのは, 渦を構成する点の数があまりにも少ない場合, その運動を正確に計算することができないという, 数値的な理由からである. しかしながら, この操作に対して物理的な意味づけをすることもできる. 粘性流体の乱流との類推から, 量子渦が再結合を通してより小さな渦輪へと分裂していくカスケード過程があると仮定する. この過程によって徐々に小さくなっていった渦は, 渦芯半径程度の大きさで音波へ変化すると予想できる. この音波への変化は小スケールでのエネルギーの散逸である. 一方, 数値計算において系から小さな渦を除去することも, 小スケールのエネルギーを散逸させることに対応している. したがって, この操作は小スケールにおいて量子渦が音波へと変化することに対応しているだろう. ただし, 音波への変化が起こるスケールと我々が渦を除去しているスケールには大きな開きがある. その正当性については参考文献 [44] において, 数値計算によって詳しく議論し, 正当性があると結論づけられている.

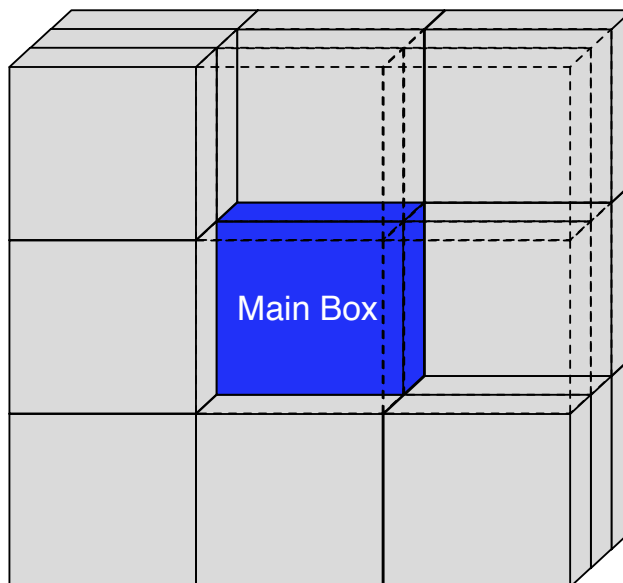


図 1.15 数値計算において計算領域 (main box) の周囲につくられる箱. 周囲の箱には, 境界条件に対応した渦が置かれる.

1.4.4 渦糸の再結合

Navier-Stokes 方程式や Gross-Pitaevskii 方程式の直接数値計算では, 渦同士の再結合が自動的に起こる. 一方で, 渦糸近似を用いた数値計算では渦糸同士の再結合は自動的に起こらない. そこで, 本論文の研究では, ある距離 $\delta\zeta_{\min}$ 内に渦糸同士または渦糸と固体境界が近づいたときに人工的につなぎかえる.

1.4.5 境界条件

数値計算では計算領域となる箱の外側にも渦糸を配置し, Biot-Savart 積分を計算する必要がある. 計算領域の外側に周期的に渦を配置する境界条件を周期境界条件と呼ぶ. 例えば, 空間の 3 次元すべてが周期境界条件である場合には, 本論文では図 1.15 のように考える計算領域 (main box) の周囲に 26 個の箱の渦を配置し非局所項を計算する. Biot-Savart 積分の寄与を正しく計算するためには, 周囲の箱にある渦だけでなく無限遠にある渦も考慮する必要がある. しかし, 実際にそのような計算をすることはできないので, 計算領域からある程度離れたところで Biot-Savart 積分を打ち切る必要がある. そこで, 計算によって得られる物理量に大きな変化がないとき非局所項の計算は十分であるとした. 本論文の研究では, 上記のように周囲に 26 個の箱を配置することで十分であった.

本論文の研究では管壁の効果を取り入れたいので, さらに固体境界条件を組みあわせて用いる. 固体境界条件は, 1.3.2 項で説明したように, 鏡像渦を配置することによって実現する. したがって, 周囲の箱の一部を周期的なものではなく鏡像的なものに置き換える. 例えば, 流れ方向が x の矩形管を再現したい場合は, x 方向に周期的境界条件, y および z 方向には鏡像的境界条件を課すことになる. 図 1.16 はこの

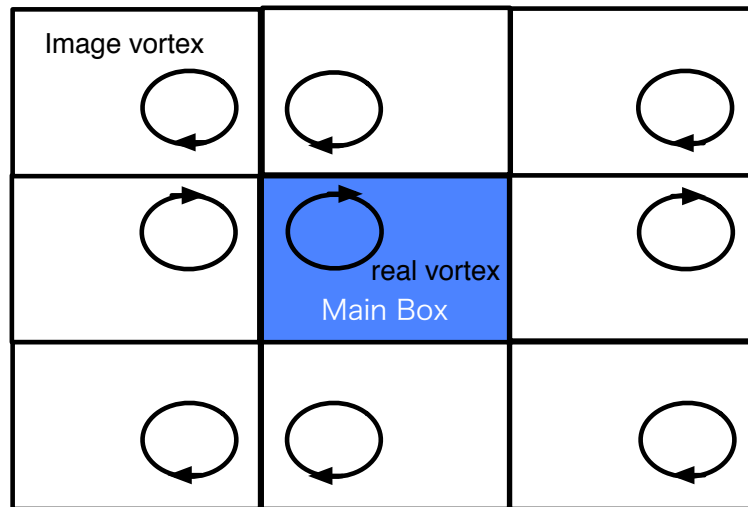


図 1.16 数値計算における流れ方向から見た矩形管の固体境界条件. 中心の箱が実在する量子乱流に対応していて, 周囲の箱は鏡像的な箱である. 図中の輪は量子渦の輪を表していて, 矢印は循環の向きを表している.

ときの鏡像的境界条件を流れ方向から見たときの模式図である. 中心の箱が数値計算の領域であり, これが実在する量子乱流に対応している. 周囲の箱は, 鏡像的境界条件によるものである. 図中の輪は量子渦の輪を表していて, 矢印は循環の向きを表している.

第2章

非一様熱対向流

2.1 序論

熱対向流における量子乱流は、理論的にも実験的にもよく研究されてきた。しかしながら、これまでの研究のほとんどでは量子乱流が空間的に一様であるとして議論が行われてきた。熱対向流量子乱流の実験では、管の横から第2音波を通過させてその減衰を見る。その結果として、単位体積あたりの量子渦の長さなどの物理量が得られるが、それは管を横切る積分量となる。実験が量子乱流の非一様性を観測できないので、理論および数値的研究も非一様量子乱流に踏み込むことが難しかった。

量子乱流の非一様性は、量子乱流の未解決問題である T1-T2 遷移にも関係していると予想されている。T1-T2 遷移とは、熱対向流量子乱流が2つの乱流状態をもち、対向流速によって2つの状態を遷移することである。この遷移において、常流動が層流から乱流に遷移していると予想されている。この予想は、いままでの一様系の数値的研究では扱うことができない。

そのような状況のもと、最近の可視化実験が熱対向流の空間的非一様性を直接観測した。熱対向流中の常流動速度場が可視化され、流速を上げると常流動速度場が層流 Poiseuille 流^{*1}、層流 tail-flattened 流、および乱流へと遷移することが明らかになった。Tail-flattened 流は古典流体の分野でも知られておらず、2流体力学のもたらす物理として興味深いものであると予想されている。この可視化実験に代表される最近の量子乱流の理解の発展によって、非一様熱対向流の研究の必要性が高まっている。そこで、我々は常流動速度場として層流 Hagen-Poiseuille 流および層流 tail-flattened 流を用いて、渦糸モデルの数値計算を行った。結果として、非一様な量子乱流が得られ、そこに古典乱流との驚く類似が現れるなど興味深い物理が明らかとなった。

この章は、以下のような構成となっている。2.2 節では、熱対向流量子乱流に関する背景を説明する。そこでは、一様熱対向流の数値的研究が説明され、つづいて非一様量子乱流を研究する必要性を述べる。2.3 節では、我々の研究の数値計算モデルを説明する。2.4 節では、常流動に層流 Hagen-Poiseuille 流を適用したときの結果を示す。2.5 節では、常流動に層流 tail-flattened 流を適用したときの結果を示す。2.6 節では、これまでの結果を用いて、いくつかの主題に関して議論を行う。なお、この章で説明する我々の

^{*1} 管における粘性流体の層流 [25, 26]。円管の場合は放物線 $u(r) = u_0(a^2 - r^2)$ である； u_0 は規格化因子、 a は管半径。Hagen と Poiseuille がそれぞれ同時に独立に発見したので Hagen-Poiseuille 流と呼ばれるが、省略して Poiseuille 流と呼ばれることもある。

研究は、文献 [47] および [48] として発表されている。

2.2 研究背景

熱対向流における量子乱流は、最も代表的な量子乱流として、半世紀以上にわたり膨大な研究が行われてきた。一様熱対向流における量子乱流の数値的研究は、量子乱流を量子渦の運動から理解するうえで重要な役割をはたした。しかしながら、量子乱流の T1-T2 遷移など、未だに解決されていない問題もある。これらは、量子乱流の非一様性を考慮しなければ理解できないと予想されている。近年の革新的な可視化研究が、我々が乱流の非一様性に取り組むことを可能にさせた。この可視化実験は熱対向流量子乱流における常流動速度場を直接観測するものである。これを受けて、最近、非一様系での研究が行われるようになってきている。本研究はこのような研究背景をもつので、以下ではこれらについて説明する。

2.2.1 一様熱対向流の数値計算

ここでは、熱対向流における量子乱流の数値的研究を説明する。熱対向流の数値的研究における重要な仕事は、1988 年の Schwarz, そして 2010 年の Adachi らの一様系での研究であると思う。熱対向流の渦糸モデルを用いた数値計算を始めて行ったのは Schwarz である。彼は、この分野の先駆者であり、渦糸モデルに関する多くの研究を残している。Schwarz は、まず、単純な渦糸の運動を徹底的に調べ、その振る舞いを明らかにした [51]。1988 年、Schwarz は熱対向流に渦糸モデルの数値計算を適用し、統計的定常状態の量子渦タングルを再現することに成功した [49]。この数値計算によって得られた物理量を実験結果と比較するとよい一致を示した。この研究は量子乱流を量子渦の運動から理解することに成功したのである。しかしながら、Schwarz の数値計算モデルは渦間相互作用を無視する近似を用いていた。このような近似を局所誘導近似とよぶ。局所誘導近似を用いた場合、量子渦タングルは統計的定常状態には達せず、渦が 1 方向にそろい 2 層に分離する縮退状態に達する。この縮退状態を回避するために、ある周期ごとに全体の半分の渦を 90° だけ回転させる不自然な操作 (ミキシング操作とよばれる) を含んでいた。2010 年、Adachi らは Schwarz の研究の問題点を指摘し、渦間相互作用を取り入れ、ミキシング操作なしの数値計算を行った [50]。このような渦間相互作用を取り入れた数値計算方法を Full Biot-Savart 積分という。Adachi らが得た量子乱流は、ミキシング操作なしでも統計的定常状態に達した。これは渦間相互作用が量子乱流にとって必要不可欠であることを意味し、この研究は量子乱流の理解に大きな貢献を果たした。本研究も、これらの研究の延長線上にある。以下では、これらの研究について簡単に説明する。

局所誘導近似による研究

ここでは、Schwarz の行った局所誘導近似を用いた研究を説明する [49]。彼は、一様な超流動および常流動の駆動速度を課し、そのときの量子渦タングルの運動を調べた。彼は、局所誘導近似された量子渦の運動方程式が用いて数値計算を行った。計算領域は空間 3 方向が周期的境界条件であり、ミキシング操作を取り入れないと量子渦タングルは異常な状態に達する。ミキシング操作を取り入れて数値計算を行い、典型的な実験結果とある程度の一致を示す量子渦タングルを得た。

渦糸にそった曲線は $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\xi, t)$ のようにパラメータ表示される。ここで、 ξ は渦糸にそった 1 次元座

2.2 研究背景

35

標である. Schwarz の用いた局所誘導近似では, 0 K での量子渦の速度を $\dot{\mathbf{s}}_0$ を

$$\dot{\mathbf{s}}_0 = \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' \quad (2.1)$$

とする. ここで,

$$\beta = \frac{\kappa}{4\pi} \log \left(\frac{c}{|\mathbf{s}''|a_0} \right) \quad (2.2)$$

であり, κ は循環の量子, c は 1 のオーダーのパラメータ, a_0 は渦芯半径である. また, $|\mathbf{s}''|$ は全渦糸の平均曲率 R^{-1} に等しい. 式 (2.1) は, 曲率 $|\mathbf{s}''| = R^{-1}$ があるために近傍の量子渦に誘起される速度場によって, 点 $\mathbf{s}$ の量子渦が動くことを意味する. その方向は渦糸の陪法線方向であり, 大きさは β/R である. このとき, 式 (1.52) より, 有限温度での渦糸の運動方程式は

$$\dot{\mathbf{s}} = \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' + \mathbf{v}_{s,a} + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_{ns} - \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'') - \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_{ns} - \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'')] \quad (2.3)$$

となる. ここで, $\mathbf{v}_{ns} = \mathbf{v}_{s,a} - \mathbf{v}_n$ である. さらに, 因子 β を時間と速度のスケールに吸収させ, $t_0 = \beta t$ および $v_0 = v/\beta$ とすると,

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t_0} = \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' + \mathbf{v}_{s,a,0} + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_{ns,0} - \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'') - \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_{ns,0} - \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'')] \quad (2.4)$$

となる.

式 (2.4) は, 渦間相互作用からくるダイナミクスを無視している. Schwarz の研究 [51] によると, 2 本の量子渦を考えたとき, 渦同士の距離が $\Delta \approx 2R/\log(cR/a_0)$ 以上のときは, 10% のオーダーの誤差しか生じず, よい近似である. 反対に, 渦同士が Δ 以内に近づくと, 渦間相互作用が支配的になる. このとき, 古典的な渦との類推から, お互いの速度によって渦がねじれて再結合を起こすであろうと予想した. そこで, Schwarz は Δ 以内に近づいた渦同士を人工的につなぎかえるという再結合モデルを取り入れた^{*2}.

Schwarz の典型的な数値計算結果が, 図 2.1 である. 初期状態は 6 つの渦輪であり, 矩形管において超流動成分のみが駆動されている^{*3}. 図 2.1 では, 渦糸の発達が見られている. この図から, 量子渦タングルが再結合を繰り返して成長していくことがわかる. 初期状態から発達し, カオス的な振る舞いをしめす自己保持 (self-sustaining) 定常状態に達し, その状態は初期状態に依存しないことがわかった. 図 2.2 は, 図 2.1 の計算に対応する渦糸長密度

$$L = \frac{1}{\Omega} \int_{\mathcal{L}} d\xi \quad (2.5)$$

の時間変化を示している. ここで, Ω は数値計算領域の体積, 積分範囲は全渦糸上である. 初期状態から渦糸長密度が上昇していき, 途中から一定値の周りをゆらいている. これは, 量子渦タングルが統計的定常状態にあることを示している. この系では, 相互摩擦力を介して印加速度場が量子渦にエネルギーを注入し続けており, 量子渦が成長する. その一方で, 量子渦同士の再結合によりできる曲率半径の小さな構

^{*2} Schwarz の用いた再結合モデルは, 1.3 節で説明した我々の再結合モデルとは違う. この議論は 2 本の渦の場合であり, 渦タングルの場合に適用できるかは不明である. もし渦タングルが一様等方であれば, 遠方の渦タングルが Biot Savart 積分によりつくりだす速度はキャンセルされる消えるであろう.

^{*3} Schwarz は管壁は荒いとして量子渦が壁に引きずられる効果を取り入れているが, その具体的な方法は書いていない.

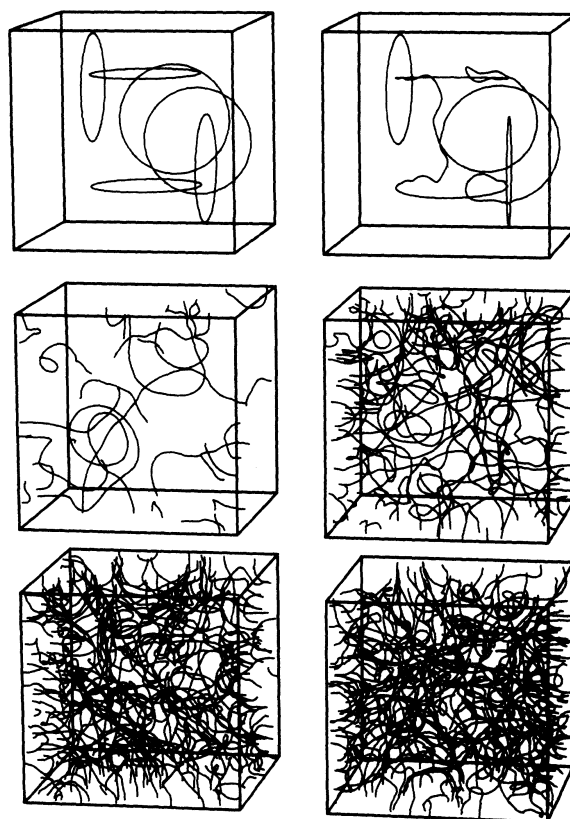


図 2.1 渦タングルの成長. 温度は $T = 1.6$ K に対応し, 速度場 $v_{s,0}$ が手前の面から奥に印加されている. 左上: $t_0 = 0$, 再結合はおこっていない; 右上: $t_0 = 0.0028$, 3 回の再結合がおこった; 中間左: $t_0 = 0.05$, 18 回の再結合がおこった; 中間右: $t_0 = 0.20$, 844 回の再結合がおこった; 左下: $t_0 = 0.55$, 12 128 回の再結合がおこった; 右下: $t_0 = 2.75$, 123 781 回の再結合がおこった. (Reprinted figure with permission from K. W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **38**, 2398 (1988). Copyright (1988) by the American Physical Society.)

造は, 相互摩擦力により収縮して散逸する. 統計的定常状態においては, これらの励起と散逸がつり合っている^{*4}. これは, 1.2.3 項で説明した Vinen の理論と整合性がある.

この研究の目的は, 高密度で一様な量子渦タングルの性質を調べることである. その方法の一つは, 図 2.1 に示されるような矩形管の数値計算を行い, その中心部だけを取り出すことである^{*5}. しかしながら, 計算にかかる時間が大きくなるので, これは有効ではない方法である. そこで, Schwarz は一様系の極限として, 計算箱の全方向に周期境界条件を用いることにした. このような数値計算は, 渦糸長密度が大きいときには, 一様系の物理を再現できるであろう.

全方向に周期境界条件を用いるときの問題点として, 渦が自分自身と周期境界をはさんで再結合すると, 無限に長い渦ができるということがある. 簡単な例が図 2.3 に示されている. 局所誘導近似を用いて

^{*4} この系は平衡状態ではなく, 非平衡状態であることを注意しておく.

^{*5} 図 2.1 の計算は熱対向流ではなく, 超流動成分だけを印加する pure superflow である. したがって, Schwarz はこのように主張しているが, この方法では熱対向流の研究はできないと思う. 矩形管において熱対向流の数値計算を行うには常流動に非一様な流れを適用する必要がある, これはすなわち, 今回の我々の研究である.

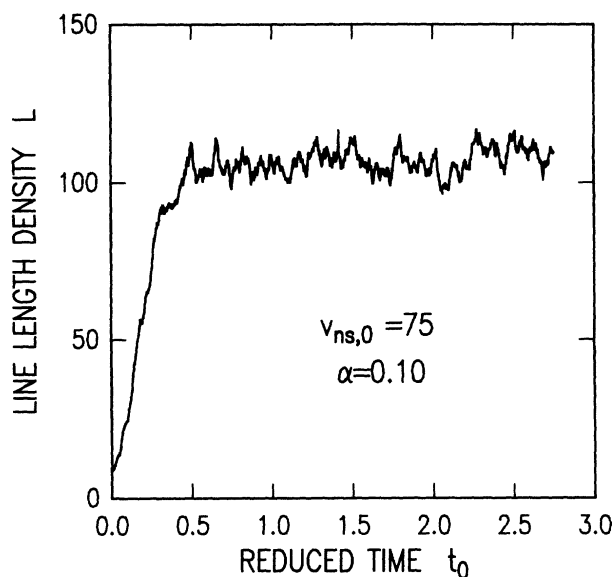


図 2.2 時間の関数としての単位体積あたりの渦糸長 $L(t_0)$. (Reprinted figure with permission from K. W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **38**, 2398 (1988). Copyright (1988) by the American Physical Society.)

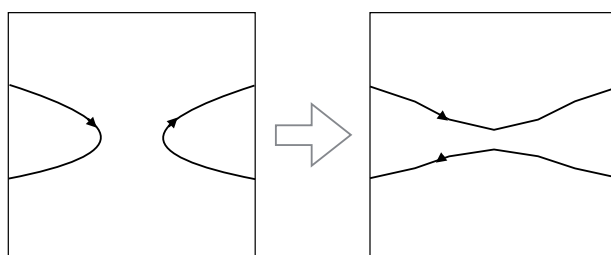


図 2.3 渦輪が周期境界をはさんで自分自身と再結合することによって、無限に長い渦ができる。

周期境界条件における熱対向流の数値計算を行うと、最終的にこのような無限に長い渦が支配的になる。そうすると量子渦タングルは 1 方向にそろった異方的に縮退した状態となり、再び 3 次元的な振る舞いが現れることはない。このことは、Adachi らの full Biot-Savart 積分の研究を説明するときに詳しく述べる。

このような周期的境界条件が起こす非物理的な困難を解消するために、Schwarz はミキシング操作を数値計算にとりいれた^{*6}。ミキシング操作は、一定の周期ごとに行われる。ミキシング操作を行う各ステップでは、無限に長い渦の半分をランダムにえらび、流れ方向を軸として 90° 回転させる。これにより渦糸同士の再結合を強制的におこし、縮退状態を脱することができる。この操作を取り入れることで、Schwarz は局所誘導近似を用いて周期的計算箱のもとで統計的定常状態を手に入れた。統計的定常状態における渦糸長密度は、ミキシング操作を行う周期に依存する。Schwarz は、周期を徐々に短くしていった

^{*6} 1988 年当時の計算機の性能は今とくらべるとはるかに悪く、ミキシング操作という不自然な操作をとりいれてでも、局所誘導近似を行うしか選択肢がなかったのであろう。

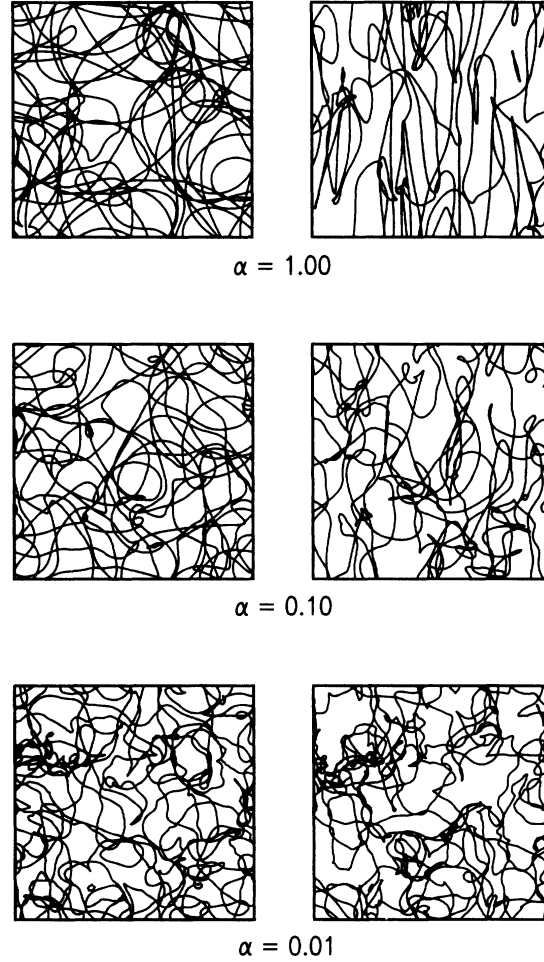


図 2.4 相互摩擦係数 α を変化させたときの渦タングルの変化. 左 (右) の列は, 流れ (横) 方向からみたスナップショットである. それぞれの印加速度場は, 渦糸長密度が同程度の値を持つように調節されている. (Reprinted figure with permission from K. W. Schwarz, *Phys. Rev. B* **38**, 2398 (1988). Copyright (1988) by the American Physical Society.)

ときに渦糸長密度が変化しなくなるときの周期を採用した.

以上のような考察の後, Schwarz は数値計算を実行し, 得られた結果を理論および実験と比較した. 例えば, 異方性パラメータ

$$I_{\parallel} = \frac{1}{\Omega L} \int [1 - (\mathbf{s}' \cdot \hat{\mathbf{r}}_{\parallel})^2] d\xi, \quad (2.6)$$

$$I_{\perp} = \frac{1}{\Omega L} \int [1 - (\mathbf{s}' \cdot \hat{\mathbf{r}}_{\perp})^2] d\xi \quad (2.7)$$

が比較された. ここで, $\hat{\mathbf{r}}_{\parallel}$ (および $\hat{\mathbf{r}}_{\perp}$) は流れ方向に平行 (および垂直) な単位ベクトルである. 等方的な渦タングルは $I_{\perp}/I_{\parallel} = 1$ を与え, $\mathbf{v}_{\text{ns}}$ に垂直な面に寝ている渦タングルは $I_{\perp}/I_{\parallel} = 1/2$ を与える. 異方性パラメータは, 対向流速に依存しないことが知られている. 結果として, Schwarz の得た量子渦タングルの異方性パラメータは実験とある程度一致していることがわかった.

量子渦タングルの内部構造の温度依存性は, 図 2.4 に示されている. このスナップショットから, 次の

2.2 研究背景

39

表 2.1 Vinen の関係式の係数 γ の比較, および異方性パラメータ [50]. γ_{num} が Adachi らの数値計算結果であり [50], γ_{exp} が Childers と Tough による実験結果である [24, 29].

T (K)	γ_{num} (s/cm ²)	γ_{exp} (s/cm ²)	$I_{ }$ —
1.3	53.5	59	0.738
1.6	109.6	93	0.771
1.9	140.1	133	0.820
2.1	157.3	—	0.901

ようなことがわかる. 相互摩擦係数 α の上昇, すなわち温度の上昇とともに

1. 量子渦タングルは異方的になり,
2. 小さな構造が均される.

これら 2 つの特徴は, 互いに関係している. 渦タングルが等方的になるためには, ランダムな 3 次元的運動が必要である. このような運動は, 小さな構造が大きな自己誘導速度場を作ることで生まれる. したがって, 相互摩擦力が強くなり, 小さな構造が均されると, 量子渦タングルは異方的になる.

以上が Schwarz による局所誘導近似を用いた研究の概略である. この数値モデルは, ミキシングという非物理的な操作を取り入れなければ渦タングルの定常状態を得ることはできない. しかしながら, この研究は, 量子乱流を個々の量子渦の運動から理解するという, 革新的な研究であったと言える.

Full Biot-Savart 積分による研究

つぎに, Adachi らの行った full Biot-Savart 積分による研究 [50] を簡単に説明する. 彼らは, 渦間相互作用をとり入れた渦糸モデルを熱対向流に適用して, 数値計算をおこなった. 結果として, ミキシングを用いずに統計的定常状態を得た. Vinen の関係式 $L^{1/2} = \gamma(v_{\text{ns}} - v_0)$, また異方性パラメータを調べ, 数値計算結果が実験とよく一致することがわかった. 彼らは, 数値計算結果をもとに, 局所誘導近似の問題点を議論した.

彼らの数値計算モデルはつぎのようなものである. 0 K における渦糸の速度は, 非局所項を取り入れた形

$$\dot{\mathbf{s}}_0 = \beta \mathbf{s}' \times \mathbf{s}'' + \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{L}}' \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}|^3} + \mathbf{v}_{\text{s,a}} \quad (2.8)$$

である. 積分範囲は, 局所項に相当する部分を除いた全渦糸上である. 相互摩擦力を考慮した運動方程式は,

$$\dot{\mathbf{s}} = \dot{\mathbf{s}}_0 + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_{\text{n}} - \dot{\mathbf{s}}_0) - \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_{\text{n}} - \dot{\mathbf{s}}_0)] \quad (2.9)$$

である. また, 渦糸の空間分解能 $\delta\xi$ より近づいた渦糸同士を人工的につなぎかえるという再結合モデルを採用した. 数値計算領域は, 全方向周期境界条件である.

Full Biot-Savart 積分による計算は, ミキシング操作なしで量子渦タングルの統計的定常状態を得た. そして, そのときの平均渦糸長密度が式 (1.33) の Vinen の関係式 $L^{1/2} = \gamma(v_{\text{ns}} - v_0)$ を満たすかどうか

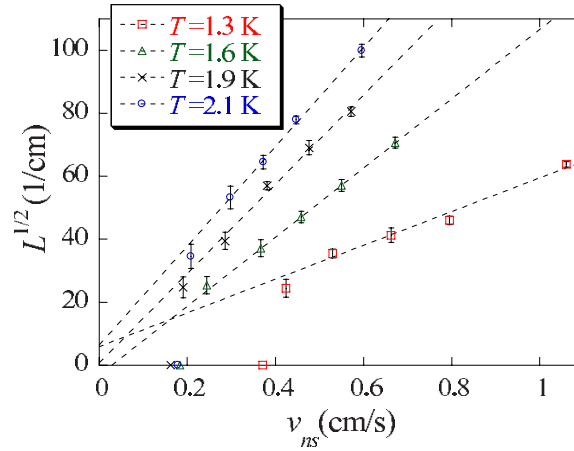


図 2.5 対向流速 v_{ns} の関数としての統計的定常状態の渦糸長密度 L . (Reprinted figure with permission from H. Adachi *et al.*, *Phys. Rev. B* **81**, 104511 (2010). Copyright (2010) by the American Physical Society.)

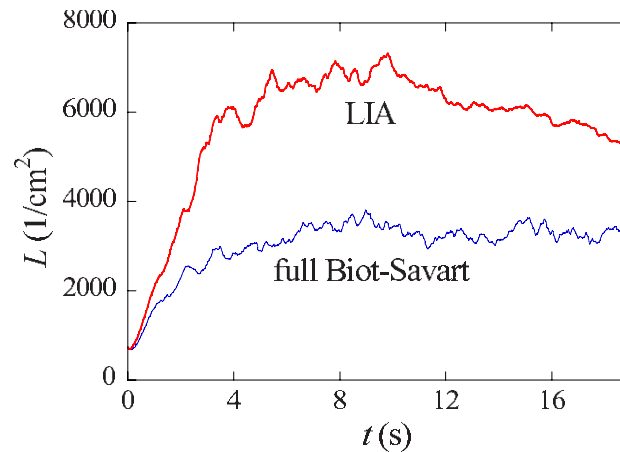


図 2.6 「ミキシング操作なしの局所誘導近似 (LIA)」および「full Biot-Savart 積分」により得られる渦糸長密度の比較. 対向流速は $v_{ns} = 0.55$ cm/s である. (Reprinted figure with permission from H. Adachi *et al.*, *Phys. Rev. B* **81**, 104511 (2010). Copyright (2010) by the American Physical Society.)

を調べた. 図 2.5 は, 平均渦糸長密度 L を対向流速 v_{ns} の関数として示したものである. Adachi らの結果は確かに Vinen の関係式を満たしている. さらに, 係数 γ が Childers と Tough の実験値 [24, 29] と比較された. 図 2.1 は, その結果である. Adachi らの得た γ の値は, 実験値とよい一致を示している.

Adachi らの得た異方性パラメータは対向流速に依存せず, 実験と整合性があった. 彼らは, 異方性パラメータを Wang らの実験および Schwarz の数値計算と比較した. Adachi らの得た $I_{\perp}/I_{\parallel}$ は Schwarz の得たものよりわずかに高かった. このことは, 渦間相互作用が異方性を減少させることを意味する. これは, 下でも説明するが, 渦間相互作用が互いに平行な量子渦の再結合を抑制するためである. Adachi らの結果は, 実験結果とよく一致していた.

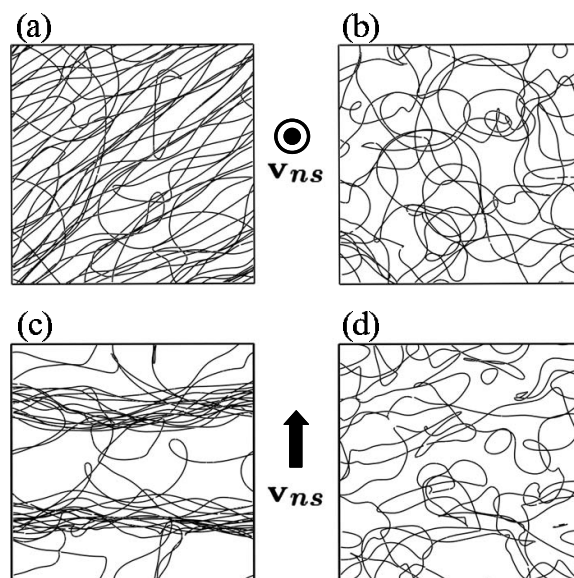


図 2.7 「ミキシング操作なしの局所誘導近似」および「full Biot-Savart 積分」により得られる定常状態の比較. 図 2.6 の $t = 18.6$ s に対応する. 左列が局所誘導近似, 右列が full Biot-Savart 積分の結果である. (Reprinted figure with permission from H. Adachi *et al.*, *Phys. Rev. B* **81**, 104511 (2010). Copyright (2010) by the American Physical Society.)

Adachi らは、局所誘導近似の問題点を以下のように指摘している。彼らは、図 2.6 に示すように、「ミキシング操作なしの局所誘導近似」と「full Biot-Savart 積分」を用いた数値計算により得られる量子渦タングルの成長過程を直接比較した。発達の初期段階においては両者は同様の振る舞いを見せる。しかし、full Biot-Savart 積分の $L(t)$ が統計的定常状態に入ったときには、2 倍ほど局所誘導近似の渦糸長密度が大きい。これは、局所誘導近似においては、渦間相互作用がないために本来は起こらないはずの再結合がおり、渦糸長密度が上昇したためと考察されている。再結合はより小さな渦を生み、それが相互摩擦力により膨張するので、渦糸長密度が上昇するのである。渦間相互作用を考慮した Full Biot-Savart 積分においては、渦間相互作用のために平行な渦同士はお互いを遠ざけ、反平行な渦同士は近づく傾向がある。平行な渦同士も再結合できる局所誘導近似のもとでは、最終的にほとんどの渦が平行になり、異方的で縮退した状態になる。図 2.7 は、両者の定常状態を示したものである。局所誘導近似による定常状態は、渦が層構造を形成しており、不自然な状態となっている。以上のような考察をもとに、Adachi らは局所誘導近似は熱対向流量量子乱流を数値計算するのに適切でないと結論づけた。

Adachi らの研究は、量子乱流における渦間相互作用の重要性を示した重要な研究である。一様熱対向流の数値的研究としては、これによって一つの局面が完遂された。彼らは、熱対向流量量子乱流を個々の量子渦の運動から再現した。そこでは、量子渦同士の再結合とエネルギー注入がつり合って、統計的定常状態が支えられていた。そして、このような流れを受けて、量子乱流の理解はつぎの局面へと進もうとしている。それが、本論文の主題である非一様量子乱流や、T1-T2 遷移といった未解決問題である。

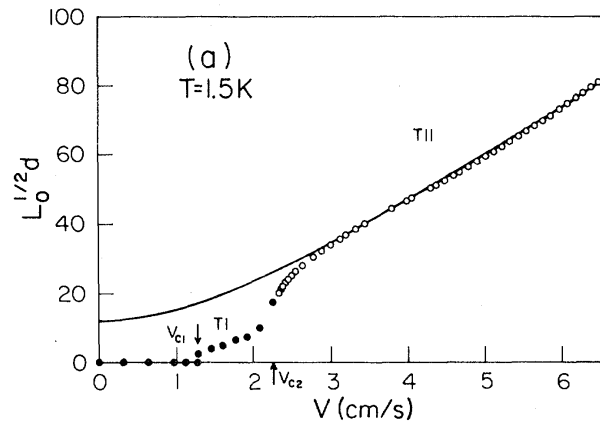


図 2.8 対向流速 V の関数としての管直径 d で無次元化された渦糸長密度 $L_0^{1/2}d$. (Reprinted figure with permission from K. P. Martin and J. T. Tough, *Phys. Rev. B* **27**, 2788 (1982). Copyright (1982) by the American Physical Society.)

2.2.2 量子乱流の T1-T2 遷移

熱対向流における量子乱流はいくつかの異なる状態をもつことが、実験的に知られている [24]. それらの状態は, Vinen の関係式 $L^{1/2} = \gamma(V - v_0)$ の係数 γ によって区別される. 対向流速 V を徐々に上げていくと, まず $V_{c1} < V < V_{c2}$ において $\gamma = \gamma_1$ を示す T1 状態が現れ, さらに対向流速を上げると $V_{c2} < V$ において $\gamma = \gamma_2 (> \gamma_1)$ を示す T2 状態が現れる. ただし, T1 および T2 状態は管断面アスペクト比 (長辺/短辺) が小さい時にしか見られない. 管断面アスペクト比が大きいときは, 別の T3 状態のみが現れる. この T1-T2 遷移は, 常流動の層流-乱流遷移に起因しているのではないかという仮説がある [57]. このような仮説は, 前節で説明した一様熱対向流の研究では検証できない. もし 2 流体の相互作用が原因であるなら, T1-T2 遷移は 2 流体力学として非常に興味深い現象である. もしこの仮説が正しいなら, 本論文の研究はこの仮説の T1 状態に対応しているかもしれない. なぜなら, 本論文では常流動を層流, 超流動を乱流として数値計算を行うからである. 我々は, 本研究を T1-T2 遷移への取り組みの第 1 歩として, 将来的には T1-T2 遷移を解明したいと考えている^{*7}. 以下では, T1-T2 遷移の実験と, T1-T2 遷移に常流動層流の安定性解析で取り組んだ研究を紹介する.

実験

$V < V_{c2}$ においても乱流が存在することは熱対向流の研究の初期の 1960 年頃から知られていたが [45, 46, 41], 実験的困難から, T1 の構造が調べられるようになったのは 1970 年頃であった [29]. T1 の現れる V の範囲は狭く, その領域での温度勾配 ∇T も小さい. 結果として, T1 のパラメータを決定するときには, T2 のときよりも正確性が下がってしまうのである.

図 2.8 は, 実験によって観測された対向流速 V の関数としての渦糸長密度である [56]. この実験は, 第

^{*7} そのためには, 量子渦糸の数値計算と同時に, 常流動 Navier-Stokes 方程式の数値計算を行い, これらを結合させる必要がある. そのような数値計算は非常に難しく, 現在のところ Kivotides の研究がいくつかあるのみである [53, 54].

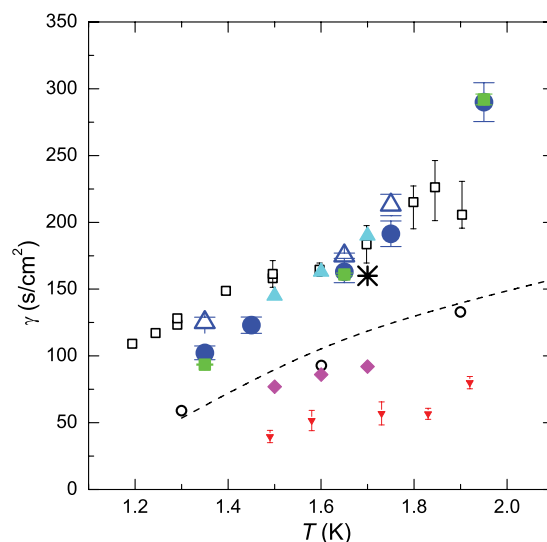


図 2.9 Vinen の関係式 $L^{1/2} = \gamma(v_{\text{ns}} - v_0)$ の係数の温度依存性. 図は文献 [58] から引用した. マゼンタの菱形, アスタリスク, 水色の三角は Childers と Tough の熱対向流の実験結果 [59] である. マゼンタの菱形は T1 状態, アスタリスクおよび水色の三角は T2 状態である. また, 開いた丸は Childers と Tough の熱対向流の実験結果 [29] であり, T1 状態である. 破線は Adachi らの一樣熱対向流の数値計算結果 [50] であり, これは T1 状態に対応するであろう. (その他: 青の丸, 緑の四角, 開いた青の三角, および赤の三角は, babuin らの pure superflow の実験結果である [58].) (Reprinted figure with permission from S. Babuin *et al.*, *Phys. Rev. B* **86**, 134515 (2012). Copyright (2012) by the American Physical Society.)

2 音波の減衰および熱抵抗 $R = d\Delta T/d\dot{Q}$ を測定して、渦糸長密度を観測している。ここで、注入熱流 $\dot{Q}$ がつくる温度差が ΔT である。この結果から、T1-T2 遷移が存在することがわかる。2 つの臨界速度 V_{c1} および V_{c2} があり、T1 状態と T2 状態が明確に区別できる。

Childers と Tough の実験 [29] によって得られた係数 γ_1 は, Schwarz の一様等方量子乱流の理論値 [52] の 1/2 程度であった. このことは, T1 状態が非一様あるいは異方的であることを示唆している.

図 2.9 は、実験および数値計算によって得られた Vinen の関係式 $L^{1/2} = \gamma(v_{\text{ns}} - v_0)$ の係数をまとめている。マゼンタの菱形、アスタリスク、水色の三角は Martin と Tough の熱対向流の実験結果 [59] である。マゼンタの菱形は T1 状態、アスタリスクおよび水色の三角は T2 状態である。また、開いた丸は Childers と Tough の熱対向流の実験結果 [29] であり、T1 状態である。破線は Adachi らの一樣熱対向流の数値計算結果 [50] であり、これは T1 状態の実験値に近いことがわかる。

常流動層流の安定性解析

1997 年, Melotte と Barenghi は, T1-T2 遷移が常流動層流の乱流遷移であるという仮説のもとに, 円管において常流動層流の安定性解析をおこなった [57]. すなわち, 常流動層流が不安定になり乱流に遷移する条件を求め, その条件が T1-T2 遷移の実験と一致するかどうかを調べるのである. 詳細は省略するが, 以下でこの研究について説明する. 彼らは常流動 Navier-Stokes 方程式を

$$\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_n^0 + \epsilon \mathbf{v}_n' \quad (2.10)$$

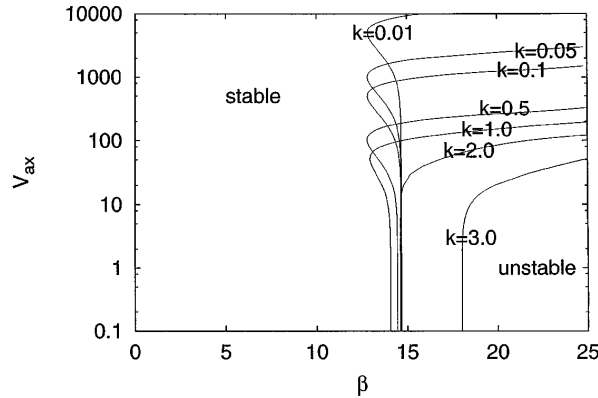


図 2.10 $m = 1$ に対する安定性の境界. (Reprinted figure with permission from [D. J. Melotte and C. F. Barenghi, Phys. Rev. Lett. 80, 4181 \(1998\)](#). Copyright (1998) by the American Physical Society.)

によって線形化した. ここで, $\mathbf{v}_n^0$ は平均流に対応し, $\epsilon \mathbf{v}'_n$ は摂動である. これにより

$$\frac{\partial \mathbf{v}'_n}{\partial t} + \mathbf{v}'_n \cdot \nabla \mathbf{v}_n^0 + \mathbf{v}_n^0 \cdot \nabla \mathbf{v}'_n = -\nabla p' + \nabla^2 \mathbf{v}'_n - \beta \mathbf{v}'_n \quad (2.11)$$

を得た. ここで

$$\beta = \frac{B \rho_s \Gamma}{3 \rho \nu_n} L R^2 \quad (2.12)$$

であり, B は相互摩擦係数, Γ は循環の量子, ν_n は常流体の動粘性係数, L は単位体積あたりの渦糸長, R は管の半径である. この方程式に解くために, 摂動が $\exp(\sigma t + im\phi + ikz)$ の依存性をもつと仮定した. そして, 摂動の成長率 σ に関する固有値問題を求めた. このようにして, 常流動層流の安定性を調べると, 図 2.10 のようになった. ここで, V_{ax} は軸方向の流れの速度に対応する. この結果から $\beta \approx 13$ 以下では摂動が成長しないので, $\beta_{c2} = 13$ を安定性の境界とした. これより, 常流動層流が不安定になる臨界の渦タングルの強度

$$\Delta = L^{-1/2} R^{-1} \quad (2.13)$$

が見積もられた. この解析結果と様々な実験結果を比較し, この論文の著者は臨界の Δ がよい一致を示すと主張している. 最終的に, T1 状態においては超流動は乱流であるが常流動層流を大きく変化させるほど渦糸長密度 L が十分大きくなく, T2 状態においては 2 流体ともに乱流である, と結論づけられている.

この研究によって T1-T2 遷移に対するある程度の理解は得られた. しかしながら, 2 流体の結合ダイナミクスを解いていないので, T1 および T2 状態における速度場の変化などは不明のままである. そのような背景のもとで, 次節で説明するように, 最近の可視化実験が熱対向流における常流動速度場を直接観測した.

2.2 研究背景

45

2.2.3 熱対向流の可視化実験

近年の熱対向流の可視化実験が、量子乱流の非一様性に関する理解について革新的な発展をもたらした。熱対向流量子乱流の可視化実験として顕著な業績は以下の通りである。Bewley らは固体水素粒子を用いて量子渦の可視化 [60] を行い、さらに Paoletti らはこれを熱対向流に適用した [61]。Zhang らは、熱対向流中に円筒をおき、そのときの流れを観測した [62]。結果として、彼らは常流動成分および超流動成分両方の下流に大きな渦ができることを見出した。La Mantia らは、熱対向流において固体微粒子の運動をしらべ、その速度および加速度の確率分布関数が通常の古典乱流とはことなることを示した [63]。そして、特に大きな発展をもたらしたのは、以下で説明する、Guo らの可視化実験であると思う。この実験は、この章で説明する我々の研究に直接関係している。

2009 年、Guo らはレーザー誘起蛍光技術 (laser-induced-fluorescence technique) を用いて He_2^* 分子を可視化し、熱対向流を研究した [64]。超流動 ^4He 中にある鋭いタングステン・チップにレーザー・パルスを与えることによって、 He_2^* の雲がつくられる。 He_2^* 分子は、大きさ数 Å の中性分子である。タングステン・チップの近くでは、スピン 1 重項および 3 重項状態の He_2^* 分子がつくられる。1 重項分子は数 ns で放射性崩壊を起こすが、3 重項状態の He_2^* は液体 ^4He 中で約 13 s の比較的長い寿命をもつ。1 K 以上で、準安定な 3 重項 He_2^* 分子は量子渦の影響を受けず、常流体の運動を追随する。彼らは、 He_2^* の雲の位置を追うことで、熱対向流における常流動速度を観測することに成功した。2010 年、Guo らはこの実験をさらに発展させ、対向流速が大きい熱対向流において常流動成分が確かに乱流状態となることを示した [65]。彼らは、熱対向流中の He_2^* 分子の動きを CCD カメラで観測し、常流動成分の速度を測定した。さらに、この実験では常流動成分のおおまかな速度場も知ることができる。

2015 年、Marakov らはこの技術をさらに発展させることで、熱対向流における常流動速度場を明らかにし、常流動成分の層流および乱流状態を直接観測した [66]。この研究において、常流動の層流および乱流状態は明確に観測されている。図 2.11(a) は、彼らの実験の模式図である。正方形管 (断面積 9.5 mm^2 、長さ 300 mm) が、温度 1.83 K の He II 槽に繋がっている。閉じた端にヒーターが取り付けられ、熱対向流が駆動されている。フェムト秒レーザー (800 nm) によって追跡線が生成され、イメージングレーザー (905 nm) で追跡線を可視化する。図 2.11(b) は、可視化された追跡線を示している。図 2.12 は、これによって可視化された熱対向流における常流動速度場である。熱流 (heat flux) q によって常流動速度場の分布は変化する。 $q < \sim 50 \text{ mW/cm}^2$ において、初期に直線であった He_2^* 分子の追跡輝線は、ドリフト時間後に放物線の形に歪む。すなわち、常流動成分は層流 Poiseuille (ポアズイユ) 速度場に従っている。これは、量子渦がほとんど存在しないので、常流動層流が相互摩擦力による変形を受けていないと理解できる。 $q > \sim 80 \text{ mW/cm}^2$ において、試行ごとに異なるランダムな速度分布が得られる。これは、常流動成分が乱流になっていることをしめす。 $50 \text{ mW/cm}^2 < q < 80 \text{ mW/cm}^2$ において、常流動速度場は Poiseuille 速度場の端部を平坦化した形になっている。このような流れは古典流体においても知られておらず、2 流体力学のもたらす興味深い物理であると予想できる。彼らは、この流れを tail-flattened 流と名付けた。

図 2.13 は、図 2.12 に対応した渦糸長密度 L の熱流 q 依存性を示している。ここで、1.2.3 項で説明したように $q \propto v_{\text{ns}}$ である。常流動が乱流である $80 \text{ mW/cm}^2 < q$ において Vinen の関係式

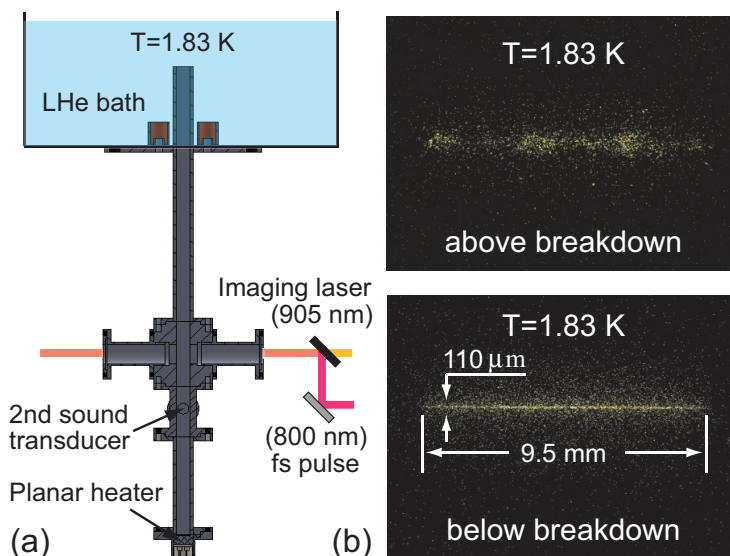


図 2.11 (a) Marakov らの実験の模式図. 正方形管 (断面積 9.5 mm^2 , 長さ 300 mm) が, 温度 1.83 K の He II 槽に繋がっている. 閉じた端にヒーターが取り付けられ, 熱対向流が駆動されている. フェムト秒レーザー (800 nm) が追跡線を生成し, イメージングレーザー (905 nm) が追跡線を可視化する. (b) 追跡線の蛍光画像. フェムト秒レーザーのエネルギーが $60 \mu\text{J}$ 以下のときは, 鋭い追跡線が形成される. (Reprinted figure with permission from A. Marakov *et al.*, *Phys. Rev. B* **91**, 094503 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

$L^{1/2} = \gamma(v_{\text{ns}} - v_0)$ が成立していて, 係数は $\gamma = 162 \text{ s/cm}^2$ である. この係数 γ の値は, 図 2.9 に示される T2 状態の値と近い. したがって, この結果は T2 状態は常流動が乱流であるという Melotte と Barenghi の仮説と整合性がある^{*8}. 常流動が Poiseuille 層流である $q < 50 \text{ mW/cm}^2$ においては, 観測できないほど L が小さい. したがって, もし常流動が乱流である $80 \text{ mW/cm}^2 < q$ が T2 状態であるとする, 常流動が tail-flattened 層流である $50 \text{ mW/cm}^2 < q < 80 \text{ mW/cm}^2$ が T1 状態であるだろう^{*9}.

このような革新的な研究に動機づけられて, 我々は非一様熱対向流の数値的研究を行った. この章で説明する我々の研究は, 彼らが観測した常流動 Hagen-Poiseuille 層流および常流動 tail-flattened 層流を数値計算に適用したものであり, そこでの量子乱流のふるまいを明らかにする.

2.2.4 非一様熱対向流の数値計算

T1-T2 遷移に代表される非一様量子乱流の研究の必要性, および実験的研究の発展により, 最近, 量子乱流の非一様性に関する研究が行われるようになってきている. Baggaley らは, 3次元系において平行2平板間の非一様熱対向流に渦糸モデルの数値計算を適用し, 量子渦タングルのふるまいを調べた [69, 70]. Khomenko らは, 3次元系において平行2平板間の非一様熱対向流に渦糸モデルの数値計算を適用し, 渦糸長密度の空間分布に関する理論的洞察をおこなった [67]. Galantucci らは, 2次元系において固体境界間の熱対向流に量子渦糸モデルと常流動ダイナミクスを同時に数値計算した [68]. これらの研究は, 非一

^{*8} これは私の考えであって, この論文 [66] はそれぞれがどの乱流状態であるかについては言及していない.

^{*9} この論文 [66] には, 常流動が tail-flattened 層流のときの γ は示されていない.

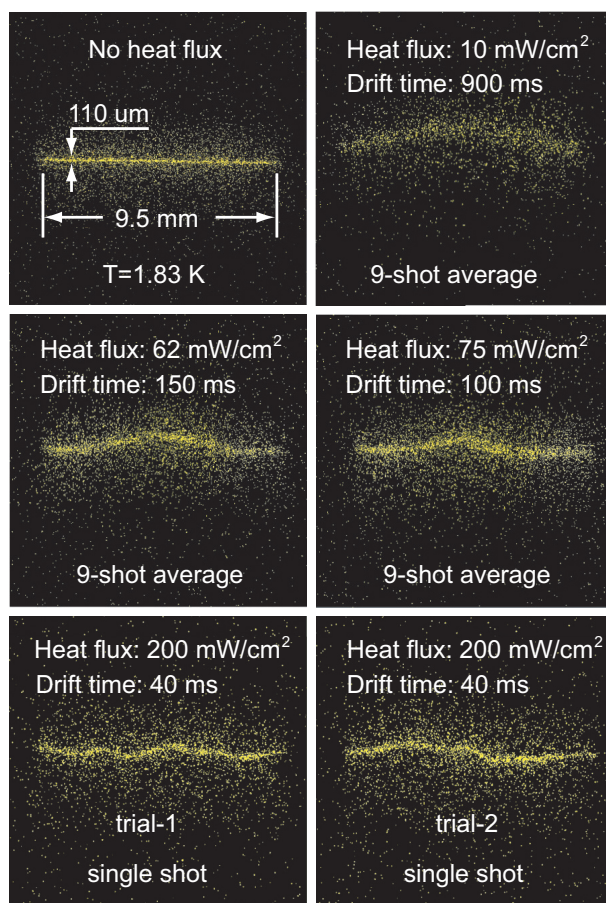


図 2.12 熱対向流における He_2^* 分子の動きをしめす典型的な蛍光画像。図は文献 [66] から引用した。下から上に向かって常流動成分が流れ、逆向きに超流動成分が流れている。管を横切るように He_2^* 分子を励起し、ドリフト時間後に再度観測することで、常流動成分の速度場が得られる。(Reprinted figure with permission from A. Marakov *et al.*, *Phys. Rev. B* **91**, 094503 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

様量子乱流の性質を理解するために重要な結果を示している。

しかしながら、T1-T2 遷移を理解するという目的にはこれらの研究は不適である。なぜなら、T1-T2 遷移は管断面アスペクト比が小さいときにのみ現れるので、平行 2 平板間という間断面アスペクト比が無量大に対応する系では T1 および T2 状態を再現できないからである。我々の研究では、管断面アスペクト比が最小値 1 となる正方形管を用いる。したがって、T1-T2 遷移への取り組みとしては、我々の研究はこれらの研究より適していると考えている。

以下では、我々の研究ともっとも関連性のある Baggaley らの 2013 年および 2015 年の研究を簡単に説明する [69, 70]。Baggaley らは、空間 3 次元のうち 1 方向にだけ固体境界条件を課し、平行 2 平板間の熱対向流を数値計算した。常流動は層流 Poiseuille 流に固定され、平均常流動速度 v_n と温度 T を変化させたときの量子乱流のふるまいが調べられた。数値計算により得られたタングルの様子は、文献 [70] を参照されたい。彼らの数値計算により、管壁付近に量子渦が集まることがわかった。これは、古典流体力学との類推から境界層 (boundary layer) と呼ばれるようになった。我々の研究結果においても同様の構造

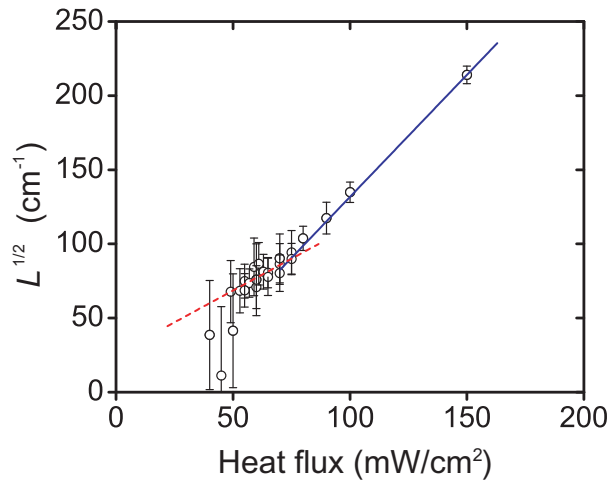


図 2.13 図 2.12 に対応した渦糸長密度 L の熱流 q 依存性. $80 \text{ mW/cm}^2 < q$ において Vinen の関係式 $L^{1/2} = \gamma(v_{\text{ns}} - v_0)$ が成立していて, 係数は $\gamma = 162 \text{ s/cm}^2$ である. (Reprinted figure with permission from A. Marakov *et al.*, *Phys. Rev. B* **91**, 094503 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

が見出されるので, そのとき再度議論する.

Baggaley らは, さらに量子渦タングルの物理量を粗視化 (coarse-graining) することによって, 物理量の空間分布を調べた. 計算領域を小さな体積 V_B で分割し, そこでの局所的な渦糸長密度を

$$l(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V_B} \int_{\mathcal{L}_B} d\xi \quad (2.14)$$

と定義する. ここで, $\mathcal{L}_B$ は, V_B の内部の渦糸を表す. 数値計算によって得られた $l(\mathbf{r}, t)$ は, 文献 [70] を参照されたい. 彼らは, 局所的な渦糸長密度 l が最大値をとる管壁からの距離を調べた. また, 管中心部と管壁付近における量子渦の成長率を調べ考察を行った. ある一定の時間の乱流速度分布を常流動に適用し^{*10}, 常流動が Poiseuille 流から乱流になると量子渦タングルの渦糸長密度が上昇することを示した. 最終的に, この研究が常流動流の層流-乱流遷移が量子渦タングルの一様性を著しく上昇させることの証拠を提供しており, 一様性の上昇は常流動成分の乱流遷移の間接的測定として利用できるだろう, と結論づけている. この研究の結果は, 非一様量子乱流の性質を明らかにする非常に興味深いものであるが, T1-T2 遷移などの研究には適さない.

2.3 数値計算モデル

ここでは, 我々の研究の数値計算モデルを説明する. 本研究では, 正方形管における熱対向量子乱流を渦糸モデルの数値計算を用いて研究する. 図 2.14 は数値計算の模式図である. 常流動速度場には, 実験 [66] によって観測された非一様な速度場, すなわち Hagen-Poiseuille 層流および tail-flattened 層流を適用する. 一方で, 超流動流には一様な印加速度を与え, 渦糸の運動を数値計算する.

^{*10} 常流動の渦の典型的時間スケールが超流動のものより十分大きいので, このような操作が妥当だと Baggaley らは主張している.

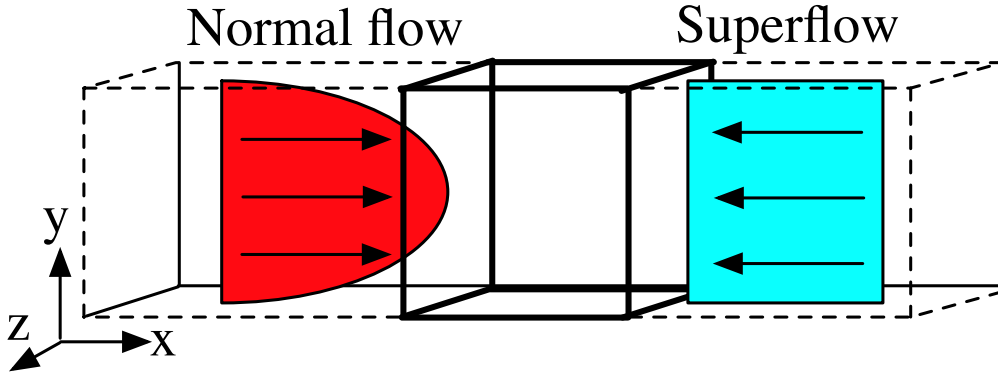


図 2.14 熱対向流の数値計算の模式図．常流体には空間的に非一様な速度を与え，超流体には一様な印加速度を与える．正方形管の固体境界条件を課す．このような状況で渦糸の運動を数値的にシミュレーションする．

渦糸モデルおよびその数値計算方法は，第 1 章で説明した．簡単にまとめると，以下の通りである．量子渦は非常に小さい渦芯半径を持ち，定まった循環 κ をもつ．そこで，量子渦を循環 κ をもった糸で近似する．このような近似を渦糸近似とよび，この糸を渦糸とよぶ． $T = 0$ K において，渦糸は超流動速度場

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{s,\omega} + \mathbf{v}_{s,b} + \mathbf{v}_{s,a} \quad (2.15)$$

と同じ速度で移動する．ここで， $\mathbf{v}_{s,\omega}$ は渦糸がつくりだす速度場， $\mathbf{v}_{s,b}$ は固体壁によって誘起される速度場，そして $\mathbf{v}_{s,a}$ は量子渦に起因しないポテンシャル流である．速度場 $\mathbf{v}_{s,\omega}$ は Biot-Savart の法則

$$\mathbf{v}_{s,\omega}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{(\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}) \times d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{s}_1 - \mathbf{r}|^3} \quad (2.16)$$

で与えられる．ここで， $\mathbf{s}_1$ は渦糸上の座標を表し，積分路 $\mathcal{L}$ は全渦糸を表す．速度場 $\mathbf{v}_{s,b}$ は鏡像渦を置くことによって計算される．速度場 $\mathbf{v}_{s,a}$ は，数値計算を行う状況に応じて決定される．温度がゼロでない場合，量子渦は常流体との相互摩擦を受ける．これを考慮すると，渦糸上の点 $\mathbf{s}$ の速度場は

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{v}_s + \alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) - \alpha' \mathbf{s}' \times [\mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)] \quad (2.17)$$

で与えられる．ここで， $\mathbf{v}_n$ は常流動速度場， α と α' は温度に依存する係数である．また， $\mathbf{s}'$ は渦糸にそった単位ベクトルである．まだ決定されていない量は， $\mathbf{v}_{s,a}$ と $\mathbf{v}_n$ である．これらは，数値計算が想定する状況に応じて，以下のように決定する．

2.3.1 熱対向流

この章では正方形管内の熱対向流の数値計算を行う．熱対向流は閉じた管における対流であるので，全運動量保存

$$\int_A (\rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s) dA = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

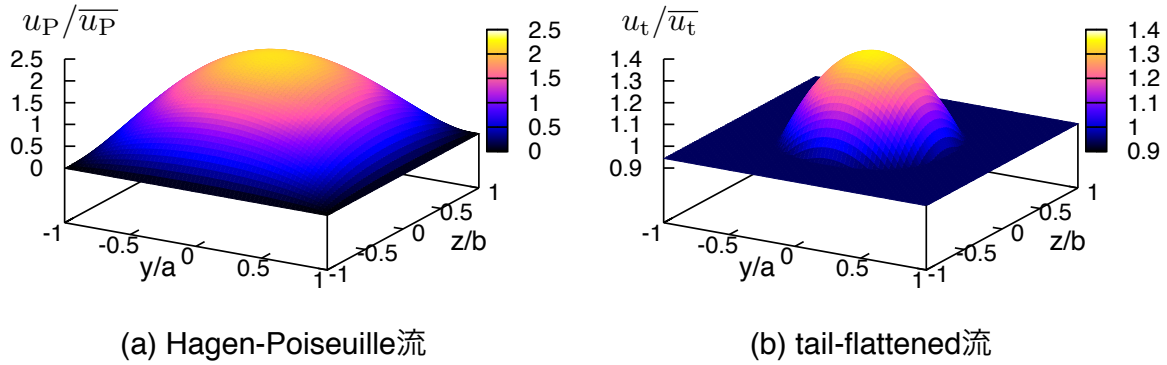


図 2.15 (a) 矩形管における Hagen-Poiseuille 流の空間分布. 空間平均値 $\overline{u_P}$ でスケールされている. (b) 矩形管における tail-flattened 流の空間分布. $h = 0.7$ としている. 管壁付近では一様流, 中心部では Hagen-Poiseuille 流となっている.

をみたす必要がある^{*11}. ここで, A は管断面を表す. したがって,

$$\overline{\mathbf{v}}_s = -\frac{\rho_n}{\rho_s} \overline{\mathbf{v}}_n \quad (2.19)$$

が成り立つ. ここで, $\overline{\mathbf{v}} = \int_A \mathbf{v} dA$ である. しかしながら, 簡単のために, 数値計算においては熱対向流の条件を

$$\mathbf{v}_{s,a} = -\frac{\rho_n}{\rho_s} \overline{\mathbf{v}}_n \quad (2.20)$$

として計算を実行する. このような近似は,

$$\mathbf{v}_{s,a} = \overline{\mathbf{v}}_s \quad (2.21)$$

であれば妥当である. この近似の影響は, 2.6 節で議論される. よって, 熱対向流の数値計算において外部から与えるパラメータは $\overline{\mathbf{v}}_n$ であり, それに応じて式 (2.20) から $\mathbf{v}_{s,a}$ が決定される. そして, $\mathbf{v}_n$ の分布は次項のように決定する.

2.3.2 常流動速度場

今回, 常流動速度場 $\mathbf{v}_n$ は, 可視化実験 [66] によって観測された層流 Hagen-Poiseuille 流と層流 Tail-flattened 流に固定する. 正方形管の境界条件を課し, 流れ方向を x 方向, 管壁の方向を y および z 方向とする. このとき, $\mathbf{v}_n = u(y, z)\hat{\mathbf{x}}$ と書ける. ただし, 管の中心点を $(y, z) = (0, 0)$ とする.

矩形管における Hagen-Poiseuille 流は

$$u_P(y, z) = u_0 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \left[1 - \frac{\cosh(m\pi z/2a)}{\cosh(m\pi b/2a)} \right] \frac{\cos(m\pi y/2a)}{m^3} \quad (2.22)$$

で与えられる [71]. ここで, a および b はそれぞれ y および z 方向の矩形管の半幅であり, u_0 は規格化因子である. この式は無限級数になっているが, 数値計算においては $m = 99$ で打ち切っている. 図

^{*11} 局所的に運動量保存が成り立つ必要はない.

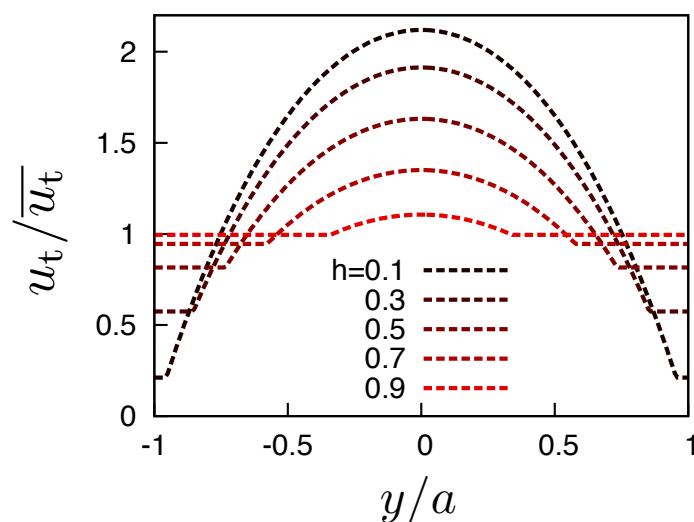


図 2.16 平坦化パラメータ h を変化させたときの tail-flattened 流の空間分布. 管中心 $z/b = 0$ にそった分布を示している.

2.15(a) は, Hagen-Poiseuille 流の管断面分布を示している. カラーバーは u_P の値を示している. 管壁において速度はゼロであり, 管中心において速くなることがわかる.

Tail-flattened 流は, 通常の粘性流体の分野でも知られていない未知の流れである. この流れを表す解析解は現在のところ存在しない. 可視化実験 [66] の著者と議論した結果, 我々はこの流れを次のようにモデル化することにした. Tail-flattened 流の可視化のようすを見ると, おおよそ, 中心部が Hagen-Poiseuille 流であり, 管壁付近は一様流であることがわかる. そこで, 式 (2.22) の u_P を用いて, tail-flattened 速度場を

$$u_t(y, z) = u_0 \max[u_P(y, z), hu_P(0, 0)] \quad (2.23)$$

と書く. ここで, $\max[A, B]$ という関数は, 2つの因数 A と B のうち大きい方の値を返す関数である. また, パラメータ h は, $0 < h < 1$ をみたすパラメータであり, 平坦部面積の割合を決定する. $h = 0$ のとき u_t は u_P に帰着し, $h = 1$ のとき u_t は一様流に帰着する. 図 2.15(b) は tail-flattened 流の管断面分布を表している^{*12}. カラーバーは $u_t(y, z)$ の値を表している. 管壁付近では一様流, 中心部では流れが速くなっていることがわかる. 図 2.16 は h を変化させたときの $u_t(y, z)$ の空間分布を表していて, 管中心 $z/b = 0$ にそった分布を示している. $h = 0$ から $h = 1$ になるにつれて, u_t は Hagen-Poiseuille 流から一様流に近づいていくことがわかる. 言い換えると, h の上昇は u_t をより一様にする. パラメータ h の値が量子渦タングルに与える影響は 2.5 節で議論する.

^{*12} この分布においては, 固体壁において粘性流体が滑っていることになる. 可視化実験 [66] の著者らは, 実際には観測にかからないほど小さい境界層があり, 固体壁においては速度がゼロになっていると予想している.

表 2.2 常流体密度比 ρ_n/ρ と相互摩擦係数 α および α' .

T (K)	ρ_n/ρ	α	α'
1.9	0.43	0.21	0.009
1.6	0.16	0.098	0.016
1.3	0.05	0.036	0.014

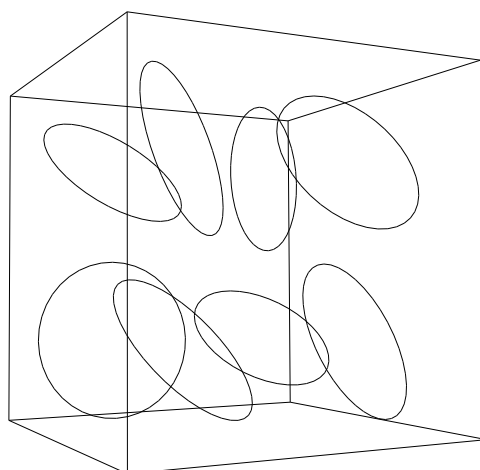


図 2.17 初期状態, 8つのランダムな方向を向いた渦輪を配置する.

2.3.3 数値計算の設定

数値計算は以下の設定で実行される. 渦糸は, 空間分解能 $\delta\xi = 8.0 \times 10^{-4}$ cm を最小の間隔とした離散点によって記述される. 隣接計算点の最大間隔は $3 \times \delta\xi$ とし, これより計算点同士が離れた場合は新たな点を挿入する. 時間方向の積分は4次の Runge-Kutta 法によって実行され, その時間分解能は $\delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ s である. 計算 box は $0.1 \times 0.1 \times 0.1$ cm³ である. 周期境界条件が流れ方向 x に課され, 固体境界条件が $y/a = \pm 0.05$ cm および $z/b = \pm 0.05$ cm に課される. 固体壁は完全に滑らかであるとし, 量子渦の pinning^{*13} や表面による量子渦の引きずりは起きないものとする. 温度は 1.9 K, 1.6 K, および 1.3 K である. それぞれの温度における常流体密度比 ρ_n/ρ と相互摩擦係数 α および α' は, 表 2.2 の通りである. 初期状態は, 図 2.17 のような8つのランダムな方向を向いた半径 0.023 cm の渦輪である.

*13 固体壁に出っ張りがあると, 量子渦がそこに捕獲されることがある [51]. これを量子渦の pinning という.

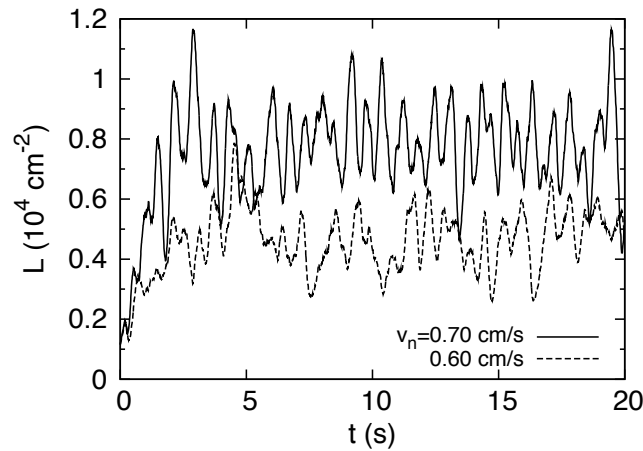


図 2.18 常流動 Hagen-Poiseuille 流のときの渦糸長密度の時間変化. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

2.4 常流動 Hagen-Poiseuille 流

ここでは、式 (2.22) の Hagen-Poiseuille 流を常流動流に適用したときの数値計算の結果を示す。2.4.1 項では、量子渦タングルの時間変化について説明する。2.4.2 項では、空間平均された物理量に注目し、量子渦タングル全体としての性質を調べる。2.4.3 項では、局所的な物理量を解析し、量子渦タングルの空間的非一様性を調べる。2.4.4 項では、量子渦タングルが作りだす超流動速度場を調べる。

2.4.1 量子渦タングルのダイナミクス

ここでは、量子渦タングルの時間変化を調べる。渦糸長密度 L に注目し、量子渦タングルが統計的定常状態に達することを示す。統計的定常状態を解析することによって、そこでの量子渦タングルは空間的に非一様であり、時間空間的に振動することを示す。

図 2.18 は渦糸長密度 $L(t)$ の時間変化を示している。ここで、パラメータは $T = 1.9$ K で $\bar{v}_n = 0.6$ cm/s および 0.7 cm/s である。量子渦タングルは、初期状態から発展し、途中から一定値の周りをゆらいでいることがわかる。これは、量子渦タングルがエネルギーの散逸と注入が釣り合った統計的定常状態に達していることを示している。一様系において量子渦タングルが統計的定常状態に達することは知られていたが、この結果は非一様量子渦タングルにおいても統計的定常状態に達することを示している。一様熱対向流の結果と比べると、 L のゆらぎが大きいことがわかる [50]。ゆらぎの大きさは v_n とともに大きくなる。

このゆらぎが量子渦タングルのどのようなダイナミクスから引き起こされるかを調べる。図 2.19 は、統計的定常状態における量子渦タングルの流れ方向からみたスナップショットを表している。パラメータは、 $T = 1.9$ K で $\bar{v}_n = 0.7$ cm/s である。大きなゆらぎの周期はおよそ 0.7 s であり、図 2.19(a) から (d) はそれぞれ 1/4 周期ごとのスナップショットである。図 2.19(a) は L の極小値に対応し、この図からも量子渦の線長密度は希薄であることがわかる。このとき、量子渦はおもに壁付近に存在している。

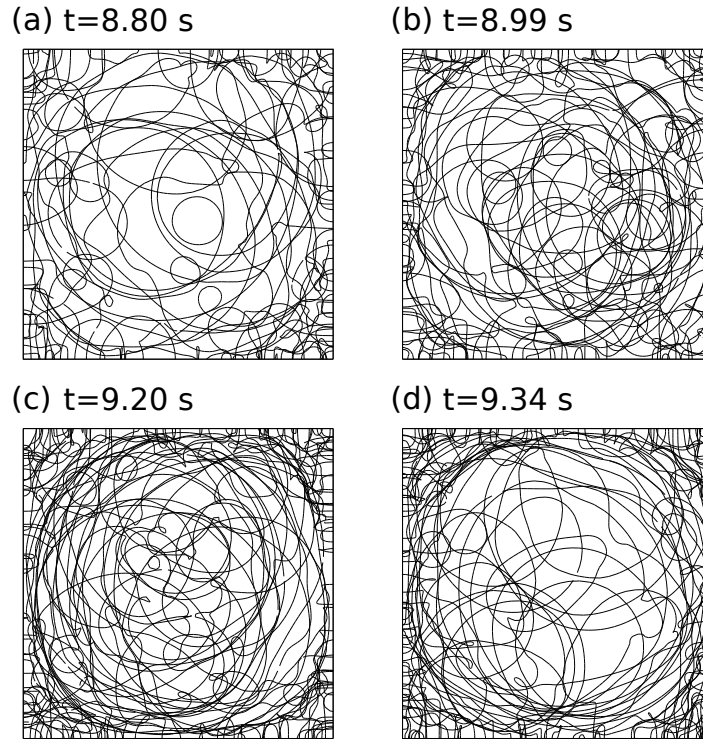


図 2.19 統計的定常状態における量子渦タングルの流れ方向から見たスナップショット. $T = 1.9$ K, $\bar{v}_n = 0.7$ cm/s のときのデータである. (a) から (d) は, 図 2.18 の大きなゆらぎの 1 周期をそれぞれ 1/4 周期ごとに見たものである. (a) L の極小値に対応する量子渦タングルの状態. (b) L が上昇してきて, 極小値と極大値の間であるときの状態. (c) L が極大値のときの状態. 管中心部にも量子渦が侵入している. (d) L が減少してきて, 極大値と極小値の間であるときの状態. 中心部から量子渦が排除されている. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

それから, 図 2.19(b) のように, 量子渦は管の中心部に侵入していく. そして, 中心部に侵入した量子渦は, 大きな対向流速 $|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{s,a}|$ を受ける. 渦糸の運動方程式の α の項は量子渦の長さの成長に寄与し, 対向流速が大きいほどこの項は大きくなる. よって, 中心部では渦がよく成長する. さらに, 図 2.19(c) のように, 中心部の量子渦同士の再結合によって生まれた半径の小さな渦が生まれ, これらが成長することによって L が極大値に達する. その後, 図 2.19(d) のように, 中心部から量子渦が排除されることによって, 再び L は極小値に向かう. 中心部から排除された量子渦は壁に向かい, 壁上で収縮して消えていく. いわば, 固体壁に吸収される. そして, ふたたび図 2.19(a) の状態に戻る. このように, 正方形管の Hagen-Poiseuille 流における量子乱流は時間空間的に振動していることがわかった. そして, この時間空間的振動の結果が L のおおきなゆらぎである.

このような時間空間的振動は, 一様熱対向流のときはおこらない [50]. 一様熱対向流量子乱流を維持するメカニズムは, 第 1 章で説明したように, 局所的なものである. すなわち, 相互摩擦力による渦の成長と再結合による渦密度の減衰の局所的な拮抗である. 一方で, 非一様熱対向流の場合は, この局所的なメカニズムに加えて, 非局所的なメカニズムも重要になることがわかった. すなわち, 上で述べたような量

子渦タングルの管全体にわたる時間空間的な振動である。

2.4.2 時間空間的に平均された物理量

ここでは、量子渦タングル全体としての性質を調べる。この項では、すべての物理量は常に統計的定常状態にわたって時間的に平均され、数値計算領域内で空間的に平均されている。以前の典型的な熱対向流の実験は第2音波を用いて渦糸長密度を測定していた。これは時間空間的に平均された物理量を与える。それゆえ、いままでの多くの実験、数値計算、および理論は時間および空間的に平均された物理量を扱ってきた。したがって、ここでの結果は今までの実験や数値計算などの研究と比較することができる。注目する物理量は渦糸長密度と異方性パラメータである。それぞれの温度および平均対向流速 $v_{\text{ns}} = |\overline{\mathbf{v}_{\text{ns}}}|$ 依存性が調べられる。本来の対向流速 $\mathbf{v}_{\text{ns}}$ は $\mathbf{v}_{\text{n}} - \mathbf{v}_{\text{s}}$ であるが、ここでは対向流速を

$$\mathbf{v}_{\text{ns}} = \mathbf{v}_{\text{n}} - \mathbf{v}_{\text{s,a}} \quad (2.24)$$

としている。これは、多くの数値的先行研究がこれを採用していたためである。もし $|\overline{\mathbf{v}_{\text{n}}} - \overline{\mathbf{v}_{\text{s}}}|$ を計算しようとする、量子渦タングルが作りだす速度場まで考慮する必要がある。この影響は2.4.4項および2.6節で議論される。そこでわかるように、一様系の場合は式(2.24)を採用することは妥当であるが、非一様系の場合は妥当ではない。

渦糸長密度

まずは、渦糸長密度 L について考える。図2.20は L の対向流速 v_{ns} 依存性を示している。温度 T が大きくなると量子渦の膨張に寄与する相互摩擦力が大きくなるので、渦密度 L は T とともに上昇する。また、 v_{ns} とともに L が大きくなる理由も同様である。量子乱流が維持される臨界の対向流速は、本研究では調べていない。臨界点近傍の物理を調べることは興味深い、多くの計算時間を必要とする上に、今回の主題からは少し外れるためである。

統計的定常状態の L は、Vinen の関係式 $L^{1/2} = \gamma(v_{\text{ns}} - v_0)$ をみたとす。したがって、非一様熱対向流の量子乱流が Vinen の関係式をみたとすことがわかった。本研究によって得られた係数 γ_{hp} および切片 v_0 を表2.3にまとめた。温度とともに γ_{hp} が上昇していることがわかる。これは、温度とともに相互摩擦力が大きくなり、エネルギー注入が増えるからである。表2.3には、全方向周期境界条件の数値計算領域における一様熱対向流の数値計算の結果 γ_{uni} も載せて、これと比較している[50]*¹⁴。表2.3から、 γ_{hp} は γ_{uni} よりある程度小さいことがわかる。このことは、常流動 Hagen-Poiseuille 流が量子渦タングルの成長を阻害し、それが v_{ns} とともに大きくなることを示唆する。最後に、切片 v_0 について触れておく。一様熱対向流の数値計算[50]は、 $v_0 \sim 0.1$ cm/s という結果を得ている。一方、本研究の結果は温度に依存し、 $T = 1.3$ K と 1.9 K では $v_0 \sim 0.1$ cm/s から外れている。これは両者の違いであるが、原因はよくわかっていない。

*¹⁴ γ_{uni} の値は、T1の実験とよく一致している[24]。したがって、われわれは γ_{uni} を基準として考える。

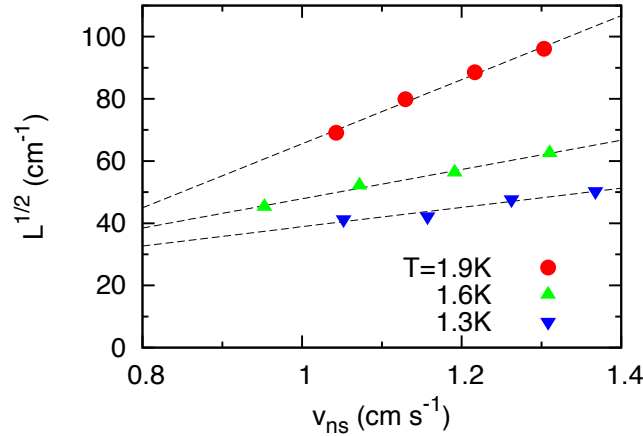


図 2.20 渦糸長密度 L の対向流速 v_{ns} 依存性. 統計的定常状態にわたって時間的に, および数値計算領域にわたって空間的に平均されている. Vinen の関係式 $L^{1/2} = \gamma(v_{ns} - v_0)$ が満たされることがわかる. 破線は, 結果をフィッティングした直線である. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

表 2.3 Vinen の関係式 $L^{1/2} = \gamma(v_{ns} - v_0)$ の係数 γ および切片 v_0 . γ_{hp} は, 常流動 Hagen-Poiseuille 流を適用して得られた γ の値である. γ_{uni} は Adachi らによる結果であり, 全方向周期境界条件の計算 box において一様熱対向流の数値計算を行い得られた γ の値である [50]. 表の v_0 は我々の数値計算結果であり, Adachi らの結果はすべて $v_0 \sim 0.1$ cm/s である.

T (K)	γ_{hp} (s/cm ²)	γ_{uni} (s/cm ²)	v_0
1.3	31	53.5	-0.2
1.6	47	109.6	0.0
1.9	103	140.1	0.4

異方性パラメータ

図 2.21 は, 式 (2.6) の異方性パラメータ $I_{\parallel}$ を対向流速 v_{ns} の関数として示したものである. 以下では, 便宜上 $I_{\parallel}$ を単に I と書く. 異方性パラメータ I は, 対向流速 v_{ns} にほとんど依存しないことがわかる. このことは, 実験とも一致している [55]. 点線は, 各温度において, v_{ns} にわたって平均された I の値である. 異方性パラメータ I は温度 T とともに上昇する. これは運動方程式の α の項で表される相互摩擦力が量子渦の流れに垂直な面に寝かせる働きをし, これが温度の上昇とともに強くなるためである.

表 2.4 において, 本研究の異方性パラメータ I_{hp} と, Adachi らの周期境界における一様熱対向流の数値的研究 [50] の結果 I_{uni} を比較している. この表より, 常流動 Hagen-Poiseuille 流の I は常流動一様流のものよりすこし大きいことがわかる. したがって, 常流動 Hagen-Poiseuille 流は量子渦タングルの異方性を上昇させる. γ_{hp} と γ_{uni} の差は, 温度とともに大きくなる. これは, 温度とともに α が大きくなり, 常流動 Hagen-Poiseuille 流の影響が量子渦に強く伝わるようになるためである.

2.4 常流動 Hagen-Poiseuille 流

57

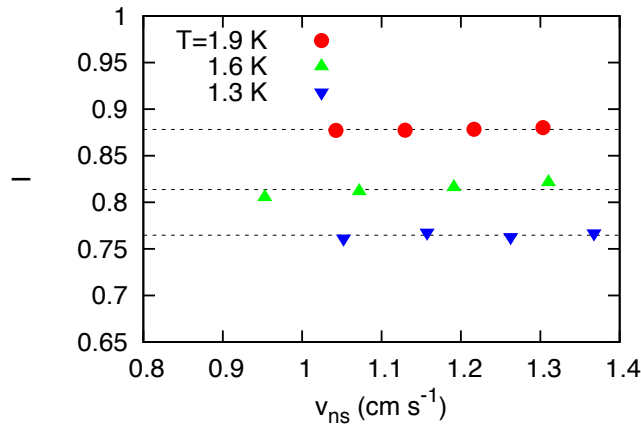


図 2.21 異方性パラメータ I の対向流速 v_{ns} 依存性. 点線は, 各温度において, v_{ns} にわたって平均された I の値である. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

表 2.4 異方性パラメータ I . I_{hp} は, 常流動 Hagen-Poiseuille 流を熱対向流の数値計算に適用して得られた I の値である. I_{uni} は Adachi らによる結果であり, 全方向周期境界条件の計算 box において一様熱対向流の数値計算を行い得られた I の値である [50].

T (K)	I_{hp}	I_{uni}
1.3	0.765	0.738
1.6	0.814	0.771
1.9	0.878	0.820

2.4.3 量子渦タングルの非一様性

ここでは, 量子渦タングルの空間的な非一様性を調べる. 注目する局所的な物理量は渦糸長密度, 異方性パラメータ, および量子渦タングルの輸送速度である. 量子渦タングルの非一様性を評価するため, 計算領域を一樣な $(31)^3$ のデカルト座標の格子で分割する. その分割によってできた小体積 Ω' において, 局所的な渦糸長密度を

$$L' = \frac{1}{\Omega'} \int_{\mathcal{L}'} d\xi, \quad (2.25)$$

と定義する. ここで, $\mathcal{L}'$ は Ω' の内部にある渦糸を示す. また, 局所的な異方性パラメータを

$$I' = \frac{1}{\Omega' L'} \int_{\mathcal{L}'} [1 - (\mathbf{s}' \cdot \hat{\mathbf{r}}_{\parallel})^2] d\xi, \quad (2.26)$$

と定義する. ここで, $\hat{\mathbf{r}}_{\parallel}$ は流れに平行な単位ベクトルである. この節では, 注目する物理量は常に統計的定常状態にわたって時間的に平均されている. 一方で, 空間的には流れ方向 x にわたってのみ平均されているので, 量子渦タングルの空間的非一様性 (y および z 依存性) を調べることができる.

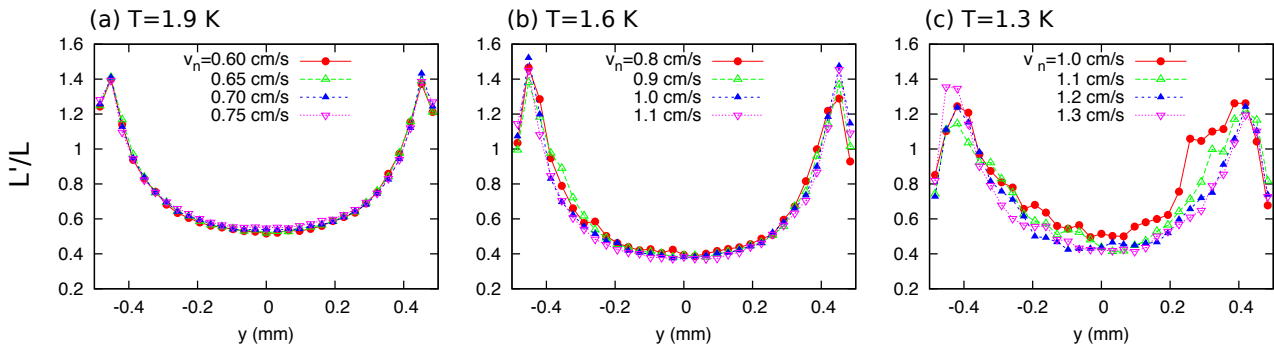


図 2.22 局所的な渦糸長密度 $L'(y, 0)/L$ の空間分布. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015) Copyright (2015) by the American Physical Society.)

渦糸長密度

図 2.22 は、局所的な渦糸長密度 $L'(y, z)/L$ の間断面中心 $z = 0$ mm にそった空間分布である。左から右に、それぞれ $T = 1.9$ K, 1.6 K, および 1.3 K である。それぞれの図において、ことなる 4 つの $\bar{v}_n$ のときの結果を示している。この図から、調べた範囲では、渦糸長密度の分布は $\bar{v}_n$ にあまり依存しないことがわかった。重要な特徴として、量子渦が管壁付近に集中していることがわかる。このように固体壁付近に渦度が集中する構造は、古典乱流でもよく知られていて、境界層 (Boundary layer) とよばれる [4]。この古典乱流との驚くべき類似に着目して、量子渦が集中する固体壁付近の構造を 超流動境界層 (Superfluid boundary layer) とよぶことができる^{*15}。ただし、ここで注意すべきなのは、量子渦の密度が高いからといって渦度が大きいとは限らないことである。例えば、注目する領域の量子渦タングルが等方的であった場合、そこでの平均された渦度は打ち消しあってゼロになる。2.4.4 項で超流動速度場の勾配が確かに大きいことがわかるので、管壁付近で渦度が大きいことが確かめられる。

さらに、渦糸長密度分布 L' の空間構造を見ていく。3 つの温度に共通した構造として、管中心部では L'/L は小さく、管壁に近づくとともに大きくなっていき、管壁近傍で再び少し減少することがわかる。まず、管中心部で L'/L が小さい理由を考える。常流動 Hagen-Poiseuille 流の場合は、管中心部で印加対向流速 $v_{ns,a} = |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{s,a}|$ が大きくなる。このことは、管中心部で量子渦が受ける相互摩擦力が大きくなることを意味する。相互摩擦力の α の項は流れに垂直な方向に量子渦を動かす効果があるから、相互摩擦力の強い管中心部では量子渦が強く排除される。したがって、管中心で L'/L が小さくなり、管壁付近には量子渦が集まるという構造ができる。つぎに、管壁のより近傍では再び L'/L が少し減少する理由を考える。これは量子渦に対する固体境界条件の結果である。もし固体境界近傍において量子渦が境界に対して斜めになると、大きな $\dot{s}$ が生まれる。その結果、固体壁近傍の量子渦は壁に垂直な構造をもつ傾向がある。言い換えると、壁に平行な量子渦は存在できない傾向がある。したがって、壁のごく近傍では L'/L が減少する。

温度依存性は、以下のように理解される。図 2.22 を見ると、温度の変化により境界層の幅および境界

^{*15} 2.2.4 項で説明したように、似たような構造は Baggaley らの研究でも指摘されている [69, 70]。

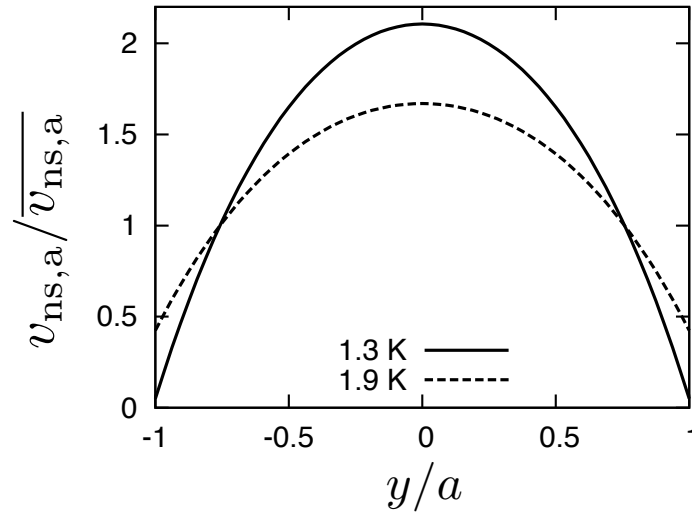


図 2.23 異なる温度における印加対向流速速度場 $v_{ns,a}(y, 0) = |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_{s,a}|$ の空間分布. 値は空間平均値 $\overline{v_{ns,a}}$ でスケールしている. 温度が高くなるとともに対向流速速度場はより一様流に近づくことがわかる.

層の高さが変化していることがわかる. ここで, 境界層の高さとは L'/L の最大値と最小値の差とする. 特に, この 3 つの温度の中では, 1.6 K における境界層の高さがもっとも大きいことがわかる. これらを決定する厳密な理論はまだわかっていないが, 定性的には以下のように考えている. いま, 温度によって変化するの

- 相互摩擦係数 α および α'
- 2 流体の密度比 ρ_n/ρ_s

である. ここで, α' は小さいので無視して考える. したがって, 2 つのパラメータ α および ρ_n/ρ_s が温度とともに大きくなる. 近似的な熱対向流の条件 $\mathbf{v}_{s,a} = -\rho_n \bar{\mathbf{v}}_n / \rho_s$ より, 2 流体の密度比 ρ_n/ρ_s が変化すると 2 流体の速度 $\mathbf{v}_{s,a}$ と $\bar{\mathbf{v}}_n$ の比が変化する. すなわち, 印加対向流速速度場は

$$\mathbf{v}_{ns,a}(y, z) = \mathbf{v}_n(y, z) - \mathbf{v}_{s,a} = \bar{\mathbf{v}}_n \left[\frac{u_P(y, z)}{\bar{u}_P} + \frac{\rho_n}{\rho_s} \right] \quad (2.27)$$

のように ρ_n/ρ_s に依存して変化する. 式 (2.27) の右辺第 1 項は非一様な速度場であり, 第 2 項は一様な速度場であることがわかる. 温度が高いほど ρ_n/ρ_s が大きくなり式 (2.27) の右辺第 2 項が大きくなるので, このとき対向流速速度場は一様流に近づく. 一方で, 温度低いと式 (2.27) の右辺第 1 項が多くなるので, このとき対向流速速度場はより非一様になる. 図 2.23 は, $T = 1.3$ K と $T = 1.9$ K の印加対向流速速度場 $v_{ns,a}$ を示している. 確かに, 高温の対向流速速度場の方がより一様であることがわかる^{*16}. このことが量子渦タングルに与える影響はつぎのようなものである. 量子渦タングルの非一様性を決めているのは, 運動方程式の $\alpha \mathbf{s}' \times \mathbf{v}_{ns,a}$ の項である. ただし, 本来は $\alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$ であるが, ここでは簡単のために

*16 周期境界条件における一様系では, 印加対向流速速度場が温度に依存することは起こらない.

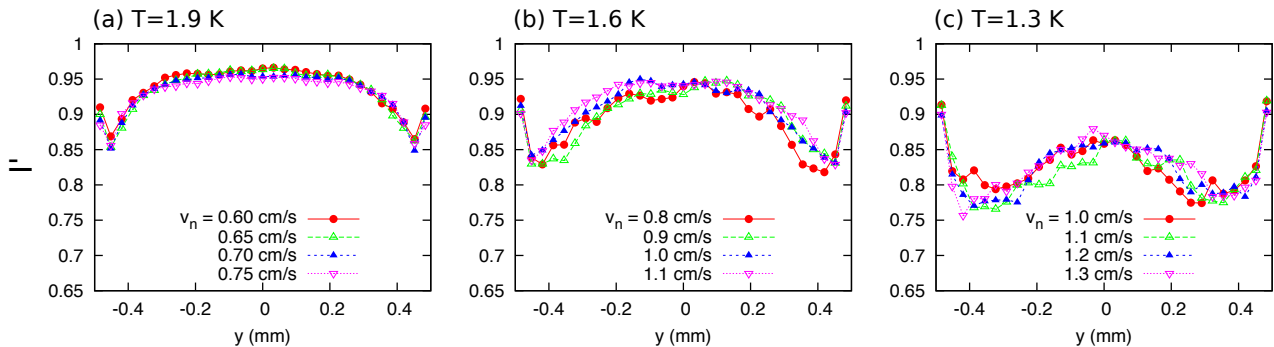


図 2.24 局所的な異方性パラメータ $I'(y, 0)$ の空間分布. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

近似している. すなわち, 基本的にはこの項が非一様になるほど量子渦タングルも非一様になる^{*17}. 上で述べたように, 温度が上がるとともに v_{ns} はより一様になる. しかし, 一方で α は大きくなる. よって, どこか途中の温度でこの項の非一様さが最大になるということがわかる. 我々の数値計算の結果を見ると, おそらく, この温度が 1.6 K 付近にあるということが予想できる. このような観点のもと, 今後の課題として, より厳密な理論的洞察を構築したい.

異方性パラメータ

図 2.24 は, 局所的な異方性パラメータ $I'(y, z)$ の $z = 0$ mm にそった空間分布を表している. 左から順に, それぞれ $T = 1.9$ K, 1.6 K, および 1.3 K である. それぞれの温度に対して, ことなる 4 つの速度 $\bar{v}_n$ のときのデータを示している. 調べた範囲では, 異方性パラメータの分布 $I'(y, z)$ は $\bar{v}_n$ にほとんど依存しないことがわかる.

I' は, 管中心部で大きく, 管壁に近づくとともに減少し, 管壁のごく近傍では再び増加する. 言い換えると, 超流動境界層の量子渦タングルは, 管中心部に比べて等方的になる. 管中心部で異方性が現れるのは, 管中心部での相互摩擦力が強いためである. すなわち, 相互摩擦力は流れに垂直な方向に量子渦を膨張させるので, 相互摩擦力が強い管中心部では量子渦タングルが異方的になる傾向がある.

量子渦タングルの輸送速度

最後に, 量子渦タングルの輸送速度を調べる. 量子渦の速度 $\dot{s}$ の管断面にわたる分布を図 2.25 に示した. 温度が $T = 1.9$ K, 平均常流動速度が $v_n = 0.75$ cm/s のときの結果である. 図 2.25(a) は $\dot{s}_x$ を示している. 値が負であるので, 常流動速度 v_n とは逆向きに, 言い換えると $v_{s,a}$ と同方向に量子渦が動いている. いま, $v_{s,a} = -(\rho_n/\rho_s)\bar{v}_n = -0.57$ cm/s である. したがって, 管中心部において量子渦は $v_{s,a}$ より遅く動いていることがわかる. 一方で, 管壁付近では量子渦は $v_{s,a}$ より速く動いている. 図 2.25(b) は, 管断面にわたる量子渦の速度ベクトル $(\dot{s}_y, \dot{s}_z)$ の空間分布を示している. この図から, 量子渦は管の中心部から管壁に向かって動いていることがわかる. このことは, 固体壁に向かって運動量が輸送されて

*17 ここでは, $\alpha \mathbf{s}' \times \mathbf{v}_{ns,a}$ が非一様になるとはその最大値と最小値の差が大きくなることを指す.

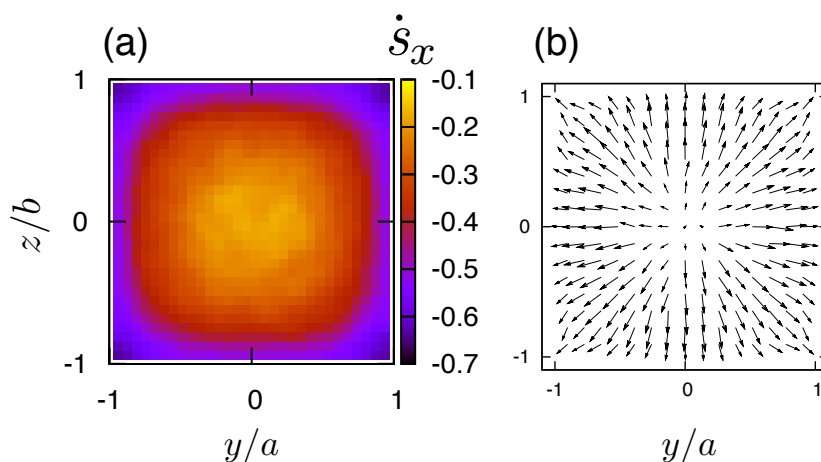


図 2.25 量子渦の速度 $\dot{\mathbf{s}}$ の空間分布. 温度が $T = 1.9$ K, 平均常流動速度が $v_n = 0.75$ cm/s のときの結果である. (a) 流れ方向成分 $\dot{s}_x$ cm/s の空間分布. (b) ベクトル $(\dot{s}_y, \dot{s}_z)$ の空間分布. 計算 box 全体にわたって空間的に平均された $(\dot{s}_y^2 + \dot{s}_z^2)^{1/2}$ の値は 0.13 cm/s である. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

いることを示唆する. もし運動量流束が存在するならば, 平均速度場は非一様になるはずである^{*18}. 実際, 次の項で見ると, 非一様量子乱流においては特徴的な非一様な超流動速度場現れる.

2.4.4 超流動速度場

ここまでの結果で, 非一様な熱対向流中には非一様な量子渦タングルが現れることがわかった. この非一様な渦タングルがつくる速度場はどのようなものであろうか. このような問いは, 以下で説明するように, 量子乱流の研究において非常に重要である.

超流動 ^4He の量子乱流は, その振る舞いから 2 つに分類されることがわかっている. 1 つは, エネルギー・スペクトルが Kolmogorov 則を示す場合である. いわば, 古典的な量子乱流である. このとき, 2 流体の速度場はお互いを模倣していると予想されている. 言い換えると $\mathbf{v}_n(\mathbf{r}) \sim \mathbf{v}_s(\mathbf{r})$ である. 2 流体が強く結合して 1 つの粘性流体のようにふるまうので, この場合の量子乱流は Kolmogorov 則を示すという予想である. もう 1 つは, 非古典的な量子乱流である. 熱対向流の量子乱流もこれに分類される. このとき, エネルギー・スペクトルは Kolmogorov 則を示さない. この場合, 2 流体の速度場はお互いを模倣していないと予想されている.

このように, 量子乱流の分類およびそれらの性質を解明するためには, その速度場を知ることは重要である. しかしながら, 今までそのような数値的な研究はあまり行われてこなかった. この視点に立った先行研究として, Samuels の渦糸モデルを用いた数値的研究がある. Samuels は, 2 流体を同じ方向に流したときの量子渦の発展を渦糸モデルの数値計算により研究した [72]^{*19}. ここで, 常流動速度場は

^{*18} 運動量流束は, 次章の主題である対数型速度分布を起こす原因である.

^{*19} このような $\bar{\mathbf{v}}_n = \bar{\mathbf{v}}_s$ の状況を coflow という. 近年, 新たなふるまいをしめす量子乱流として研究が進んでいるようである

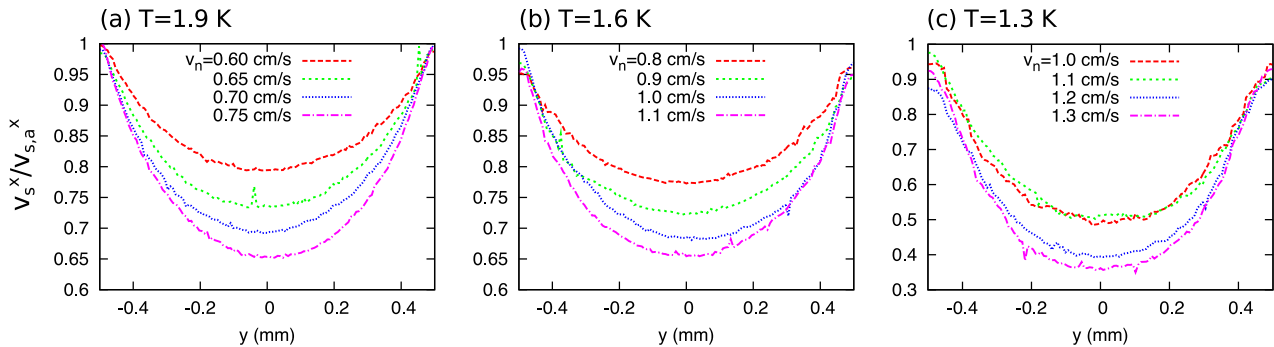


図 2.26 超流動速度場 $\mathbf{v}_s$ の流れ方向成分 $v_s^x(y, 0)$. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

Poiseuille 流である。結果として、量子渦タングルが成長するにつれて、超流動速度場が常流動速度場に一致してくるということが示された。すなわち、上の分類でいうと、常流動が層流である場合、量子乱流は徐々に古典的になっていくということを示している。

一方、本研究は熱対向流であるので、2 流体の間には強制的な相対運動が課されている。おそらく、超流動流 $\mathbf{v}_s$ は常流動流 $\mathbf{v}_n$ を模倣しようとするが、熱対向流の外力によってこれが阻害されるだろう。したがって、熱対向流の場合、超流動速度場がどうなるかは自明ではなく、興味深い。

図 2.26 は、本研究によって得られた超流動速度場 $\mathbf{v}_s(y, z)$ の流れ方向成分を $z = 0$ mm にそって示している。ここで、超流動速度場は渦糸の配置から Biot-Savart 積分によって決定されるものであることを強調しておく。左から、 $T = 1.9$ K, 1.6 K, および 1.3 K の図である。また、超流動速度場は $v_{s,a}$ によってスケールされている。それぞれの温度に対して、4 つの異なる $\bar{v}_n$ のデータを示している。すべてのデータに共通する目立った特徴として、管中心部での平均速度の減少がある。言い換えると、管壁付近での平均速度勾配が大きいということである。このことは、管壁付近の平均渦度が強いということの意味し、前節で説明した管壁付近の量子渦が集中している構造が超流動境界層であるという見方と整合性がある。

管中心部での速度場の減少を量子渦から考える。ここで、再度、超流動速度場の構成を書くと、

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_{s,\omega} + \mathbf{v}_{s,b} + \mathbf{v}_{s,a} \quad (2.28)$$

である。いま、 $\mathbf{v}_{s,a}$ は一様流であり、関係式 $\mathbf{v}_{s,a} = -\rho_n \bar{\mathbf{v}}_n / \rho_s$ から自動的に決定され、時間的に変化しない。したがって、速度場の減少を引き起こすのは、量子渦タングルがつくりだす $\mathbf{v}_{s,\omega}$ および $\mathbf{v}_{s,b}$ である。前節の結果の図 2.19 をみると、管壁付近には曲率半径が小さな渦が多く存在していることがわかる。さらに、これらの量子渦は流れに垂直な面内に寝る傾向がある。量子渦のまわりには Biot-Savart の法則にしたがって速度場がつくられることを思い出すと、このような構造は管壁付近に大きな速度勾配をもたらすことがわかる。

速度減少の $\bar{v}_n$ 依存性について議論する。速度減少は $\bar{v}_n$ とともに大きくなる。図 2.22 を見るとわかるように、このとき渦密度分布 $L'(y, z)/L$ はほとんど変化しない。一方で、全渦糸長密度 L は $\bar{v}_n$ とともに

増加し、このことは速度勾配を大きくする。したがって、速度減少が $\bar{v}_n$ とともに大きくなるのは、全渦糸長密度が増加して超流動境界層における速度勾配が大きくなるためである。

最後に、上で議論した速度場の減少が一様熱対向流の場合も起こるかどうかにについて考える。我々は、これとは別に、全方向周期境界条件の計算 box で一様熱対向流の予備的な数値計算をおこなった。温度は $T = 1.9$ K, 平均常流動速度は $\bar{v}_n = 0.2$ cm/s であり、統計的定常状態における渦糸長密度は $L \approx 0.25 \times 10^4$ cm $^{-2}$ であった。結果として得られた平均超流動速度場 $\bar{v}_s$ は、 $v_{s,a}$ にほとんど等しかった。すなわち、超流動速度場の減少は管壁の効果あるいは非一様な常流動流がなければ実現しない。2.3 節で説明したように、我々は熱対向流の条件を $v_{s,a} = -\rho_n \bar{v}_n / \rho_s$ とした。これは、一様系の場合は妥当であることがわかった。しかし、上で見たように、非一様系ではこれは妥当ではなかった。このことは、2.6 節で議論する。

2.5 常流動 tail-flattened 流

ここでは、式 (2.23) の tail-flattened 流を常流動流に適用したときの数値計算の結果を示す。前節と同じように、量子渦タングルの時間変化、空間平均された物理量、および量子渦タングルの非一様性を解析していく。2.5.1 項では、tail-flattened 流の平坦化パラメータ h を変化させて、量子渦タングルのふるまいをしらべる。2.5.2 項以降では、可視化実験 [66] と一致させるように平坦化パラメータを $h = 0.7$ で $T = 1.9$ K として、より詳細な性質を調べていく。

2.5.1 量子渦タングルのダイナミクス

式 (2.23) の tail-flattened 流のモデルは、調整できるパラメータ h をもつ。図 2.16 に示しているように、 $h = 0$ は Hagen-Poiseuille 流を与え、 $h = 1$ は一様流を与える。最初に、このパラメータを変えたときの量子渦タングルの振る舞いを調べる。図 2.27 は、 h を変えたときの渦糸長密度 L の時間変化を示している。温度は $T = 1.9$ K であり、平均常流動速度は $\bar{v}_n = 0.5$ cm/s である。 $h = 0.1$ の計算も行ったが、量子渦タングルは統計的定常状態に達しなかった。 h が小さいとき、常流動 Hagen-Poiseuille 流の影響が大きく、これが 2.4 節で説明したような L の大きなゆらぎを引き起こしていることがわかる。 h が大きくなるにつれて L の値も大きくなり、 $h \sim 0.7$ 以上で L は飽和する。また、 h の上昇により L のゆらぎは収まっていく。このことは、 h が大きくなるにつれて u_t が一様に近づき、 $h \sim 0.7$ 以上でその非一様性は空間平均量 L に大きな影響を与えるほどは強くないことを意味する。

図 2.28 は 4 つの異なる h のときの量子渦タングルを示している。これらは、図 2.27 の $t = 4.00$ s に対応している。 h を大きくするとともに、量子渦タングルはより密に、より一様になっていることがわかる。視覚的には、 $h = 0.7$ 以上の量子渦タングルはほとんど一様であり、 $h = 0.7$ と $h = 0.9$ の量子渦タングルは同じである。しかし、あとで説明するように、局所的な物理量を見れば、 $h = 0.7$ においても量子渦タングルが非一様であることがわかる。

Marakov らの可視化実験 [66] の結果と図 2.16 を比較すると、 $h = 0.7$ の u_t が実験で得られた $T = 1.83$ K の tail-flattened 流とおよそ一致するように見える。そこで、我々は $T = 1.9$ K で $h = 0.7$

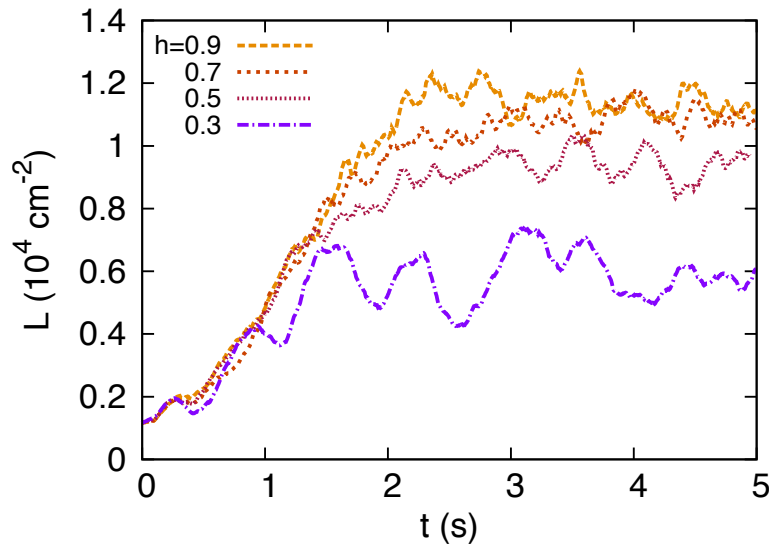


図 2.27 常流動が tail-flattened 流のときの熱対向流における渦糸長密度 L の時間変化. 温度は $T = 1.9$ K であり, 平均常流動速度は $\bar{v}_n = 0.5$ cm/s である. 式 (2.23) の tail-flattened 流のパラメータ h を変化させている. それぞれの tail-flattened 流の形は図 2.16 に示されている. $h = 0.1$ の計算も行ったが, 量子渦タングルは統計的定常状態に達しなかった. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

としてより詳細な数値計算をおこなった^{*20}. その結果を以下で解析する.

2.5.2 時間空間的に平均された物理量

ここでは, 時間空間的に平均された物理量を解析する. この節では, 注目する物理量は常に統計的定常状態にわたって時間的に平均され, 数値計算領域にわたって空間的に平均されている. 注目する物理量は渦糸長密度と異方性パラメータであり, その温度および平均対向流速 v_{ns} 依存性が調べられる. 2.4.2 項でも説明したように, 本来の対向流速は $v_{ns} = v_n - v_s$ であるが, ここでは $v_{ns} = v_n - v_{s,a}$ としている. 温度は $T = 1.9$ K, 平坦化パラメータ $h = 0.7$ で, 5 つの異なる平均常流動速度 $\bar{v}_n$ の計算をおこなった.

渦糸長密度

図 2.29 は平均渦糸長密度 L を示している. 渦糸長密度 L は, Vinen の関係式 $L^{1/2} = \gamma(v_{ns} - v_0)$ をみることがわかる. 破線は, 結果をフィッティングした直線である. Vinen の関係式の係数は $\gamma_{tf} = 176$ s/cm² である. 前節の常流動 Hagen-Poiseuille 流の結果は $\gamma_{hp} = 103$ s/cm² であったから, それよりはかなり大きくなっている. また, Adachi らの全方向周期境界条件の数値計算領域を用いた一様熱対向流の数値計算の結果は $\gamma_{uni} = 140.1$ s/cm² であったから [50], これよりも高い. 常流動

^{*20} この実験とより一致させるためには $T = 1.83$ K とすべきであるが, 他の数値計算と比較できるように $T = 1.90$ K とした. また, $h = 0.7$ という設定も視覚的に決定した粗いものであるため, そこまで一致させる意味はないと判断した.

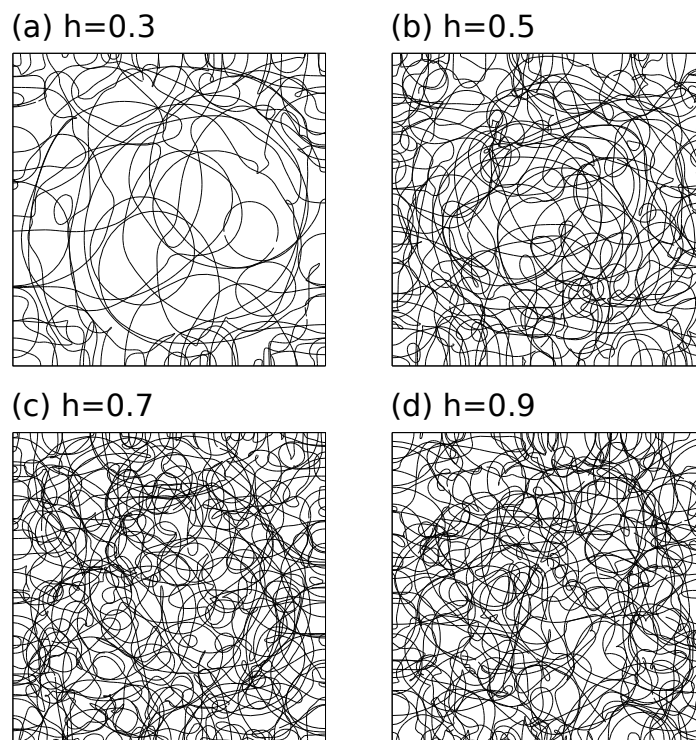


図 2.28 常流動が tail-flattened 流であるときの熱対向流における量子渦タングルのスナップショット. 図 2.27 の $t = 4.00$ s に対応している. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

tail-flattened 流の γ_{tf} が γ_{uni} より大きい理由はよくわかっていない. 管中心部に Hagen-Poiseuille 分布を持つので, 2.4 節で見たように, 常流動 tail-flattened 流は渦糸長密度 L を減少させる傾向があることが予想できる. おそらく, γ_{tf} が大きい原因は, 対向流速 v_{ns} が小さいときにはこの影響が大きく, v_{ns} が大きいときにはこの影響が小さいからであろう.

Vinen の関係式の切片は $v_0 = 0.3$ cm/s であった. これは, 常流動が Hagen-Poiseuille 流の場合の $v_0 = 0.4$ cm/s と一様流の場合の $v_0 \approx 0.1$ cm/s の間の値である. このことは, tail-flattened 流が一様流と Hagen-Poiseuille 流の中間状態であるということと整合性がある. 図 2.8 からわかるように, T1 状態の v_0 は T2 状態のものより大きい. この研究によって得られた v_0 の値は一様熱対向流の数値計算 [50] のものより大きい. したがって, T1 状態では常流動が非一様な層流であるという仮説 [57] と整合性がある.

異方性パラメータ

図 2.30 は, 式 (2.6) の異方性パラメータ $I_{\parallel}$ を対向流速 v_{ns} の関数として示したものである. 以下では, 便宜上 $I_{\parallel}$ を単に I と書く. 異方性は, v_{ns} の増加とともに少しか減少することがわかる. その原因はよくわかっていないが, おそらく上で述べた γ の議論と関連しているだろう. すなわち, tail-flattened 流のもつ Hagen-Poiseuille 分布の影響の大きさは, 対向流速に依存して変化するかもしれない. しかし, その変化分は小さいので, 我々は I は対向流速 v_{ns} によらないという実験結果と一致していると判断した

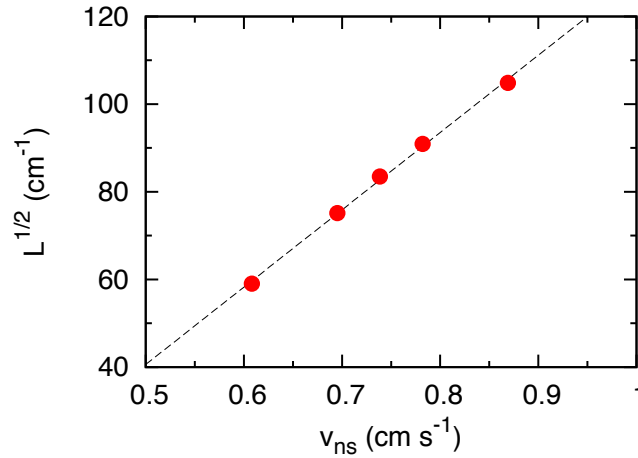


図 2.29 時間および空間的に平均された渦糸長密度 L の対向流速 v_{ns} 依存性. 温度は $T = 1.9$ K, 平坦化パラメータは $h = 0.7$ である. 破線は, 結果をフィッティングした直線である. Vinen の関係式の係数は, $\gamma_{tf} = 176$ s/cm² である. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

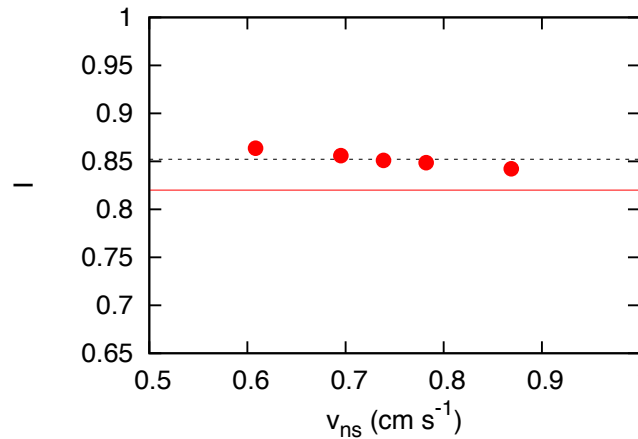


図 2.30 時間および空間的に平均された異方性パラメータの対向流速 v_{ns} 依存性. 温度は $T = 1.9$ K, 平坦化パラメータは $h = 0.7$ である. 破線は, v_{ns} にわたって平均した値である. 赤い直線は, Adachi らによる全方向周期境界条件の数値計算領域において一様熱対向流の数値計算を行った結果である [50]. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

[55]. 破線は, v_{ns} にわたって平均した値である. 赤い直線は, Adachi らが全方向周期境界条件の数値計算領域において一様熱対向流の数値計算を行った結果である [50]. 常流動が tail-flattened 流の場合の I は, 一様熱対向流のものよりわずかに大きいことがわかる. このことは, 常流動 tail-flattened 流が量子渦タングルをより異方的にすることを示している. これは, 2.4 節で説明したように, tail-flattened 流の中心部にある Hagen-Poiseuille 流が量子渦タングルの異方性を上げるためである.

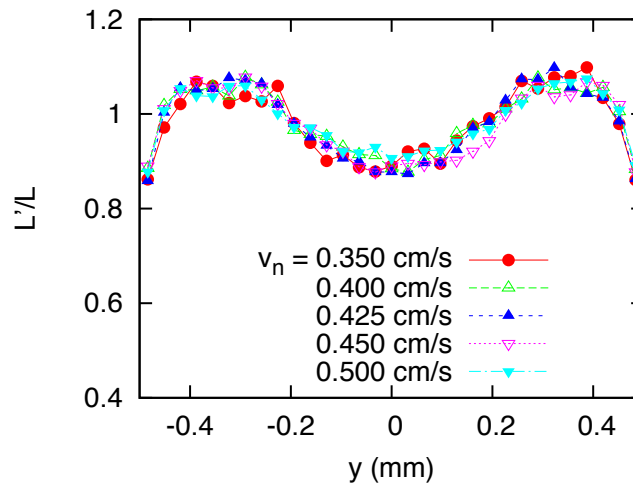


図 2.31 局所的な渦糸長密度 $L'(y, 0)/L$ の空間分布. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

2.5.3 量子渦タングルの非一様性

ここでは、量子渦タングルの空間的非一様性を調べる。この節では、注目する物理量は常に統計的定常状態にわたって時間的に平均されている。一方で、空間的には流れ方向 x にわたってのみ平均されているので、量子渦タングルの空間的非一様を調べることができる。注目する物理量は、渦糸長密度、異方性パラメータ、および量子渦タングルの輸送速度である。上で述べたように、温度 $T = 1.9$ K、平坦化パラメータ $h = 0.7$ で、5 つの異なる平均常流動速度 $\bar{v}_n$ の計算結果を見ていく。

渦糸長密度

図 2.31 は局所的な渦糸長密度 $L'(y, z)/L$ の管断面中心 $z = 0$ mm にそった空間分布である。常流動 Hagen-Poiseuille 流のときと同じように、結果は対向流速 v_{ns} に依存しないことがわかる。 L'/L は、管中心部では小さく、壁に近づくとともに大きくなり、壁近傍で再び減少する。常流動 Hagen-Poiseuille 流のときと同様に、超流動境界層構造が現れていることがわかる。しかしながら、細かい構造は両者で異なり、常流動 tail-flattened 流がつくる超流動境界層の幅は大きく、その高さは低い。中心部で L'/L が減少する理由は、2.4 節で説明したように、tail-flattened 流の中心部にある Hagen-Poiseuille 分布が量子渦タングルを排除する傾向をもつためである。局所的渦密度 L'/L が高い領域は、視覚的に、およそ $0.2 \text{ mm} < |y| < 0.4 \text{ mm}$ であることがわかる。いま、tail-flattened 流の平坦部はおよそ $0.2 \text{ mm} < |y| < 0.5 \text{ mm}$ であるので、この平坦部が L'/L を上昇させていることがわかる。しかし、 $0.4 \text{ mm} < |y| < 0.5 \text{ mm}$ において、再び L'/L が減少する。これは、2.4.3 項でも説明したように、固体壁近傍では量子渦が固体壁と垂直方向に向く傾向があるためであると考えている。

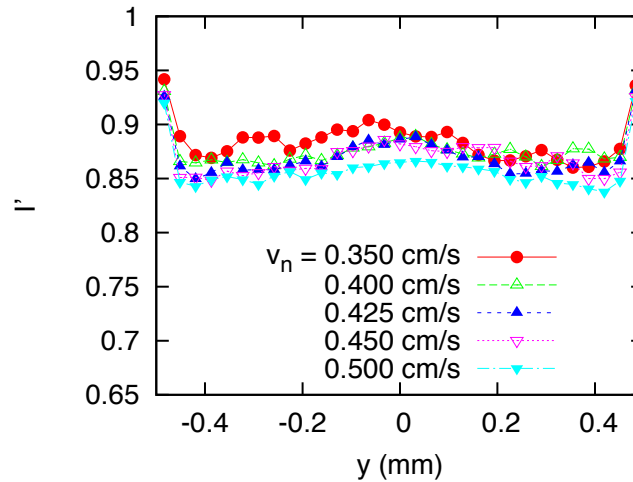


図 2.32 局所的な異方性パラメータ $I'(y, 0)$ の空間分布. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

異方性パラメータ

図 2.32 は、局所的な異方性パラメータ $I'(y, z)$ の管断面中心 $z = 0$ mm にそった空間分布である。 I' の空間分布は、対向流速 v_{ns} にあまり依存しないことがわかる。固体壁近傍を除いて I' はほとんど一様であるが、管中心部ではわずかに異方性が大きくなる。これは、くり返しになるが、tail-flattened 流の中心にある Hagen-Poiseuille 分布のせいである。壁近傍で I' が上昇する理由は、2.4 節で説明したように、固体境界条件のためである。

量子渦タングルの輸送速度

最後に、量子渦タングルの輸送速度を調べる。基本的性質は、Hagen-Poiseuille 流のときと同様である。量子渦の速度 $\dot{s}$ の管断面にわたる分布を図 2.33 に示した。温度が $T = 1.9$ K、平均常流動速度が $\bar{v}_n = 0.5$ cm/s のときの結果である。図 2.33(a) は $\dot{s}_x$ を示している。値が負であるので、常流動速度 $\bar{v}_n$ とは逆向きに、言い換えると $v_{s,a}$ と同方向に流れている。いま、 $v_{s,a} = -(\rho_n/\rho_s)\bar{v}_n = -0.38$ cm/s である。したがって、正方形管の角付近では量子渦は $v_{s,a}$ より速く動いている。それ以外の領域においては量子渦は $v_{s,a}$ より遅く動いている。図 2.33(b) は、管断面にそった量子渦の速度ベクトル $(\dot{s}_y, \dot{s}_z)$ の空間分布を示している。この図から、量子渦は管の中心部から管壁に向かって動いていることがわかる。

Hagen-Poiseuille 流の結果である図 2.25 と比較する。正方形管の角付近において流れ方向成分 $\dot{s}_x$ が $v_{s,a}$ より大きい領域がある。この領域の広さは tail-flattened 流の場合の方が小さいことがわかる。管断面内の速度場 $(\dot{s}_y, \dot{s}_z)$ に関しては、tail-flattened 流の場合の方が小さく、壁方向への量子渦タングルの輸送が弱いことがわかる。このことは、壁への運動量流束が弱いことを示唆する。したがって、超流動速度場の非一様性は小さいと予想できる。実際、次の項で見ると、超流動速度の減少は小さいことがわかる。

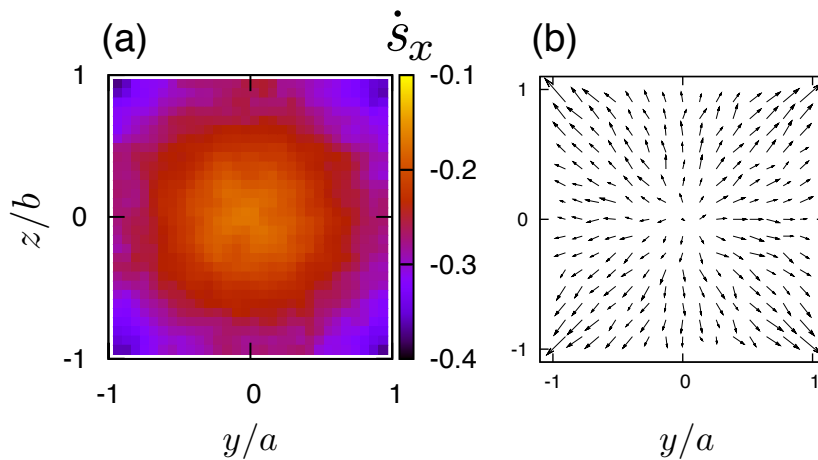


図 2.33 量子渦の速度 $\dot{\mathbf{s}}$ の空間分布. 温度が $T = 1.9$ K, 平均常流動速度が $v_n = 0.5$ cm/s のときの結果である. (a) 流れ方向成分 $\dot{s}_x$ cm/s の空間分布. (b) ベクトル $(\dot{s}_y, \dot{s}_z)$ の空間分布. 計算 box 全体にわたって空間的に平均された $(\dot{s}_y^2 + \dot{s}_z^2)^{1/2}$ の値は 0.05 cm/s である. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

2.5.4 超流動速度場

最後に, この非一様量子渦タングルがつくりだす超流動速度場について調べる. 量子乱流における平均超流動速度場をしらべることは, 2.4.4 項でも説明したように, 重要である. 図 2.34 は, 超流動速度場 $\mathbf{v}_s$ の流れ方向成分 v_s^x を管断面中心の $z = 0$ mm にそって示したものである. 上に引き続いて, 温度は $T = 1.9$ K であり, 平坦化パラメータは $h = 0.7$ であり, 5 つの異なる平均常流動速度 $\bar{v}_n$ についてのデータがある. これらの値は印加超流動速度 $v_{s,a}^x$ でスケールされている. 超流動速度場 $\mathbf{v}_s$ は統計的定常状態にわたって時間的に, 流れ方向にわたって空間的に平均されている. 平均された速度場の流れ方向成分 $v_s^x(y, z)$ は, 管中心部で大きく減少することがわかる. 平均常流動速度 $\bar{v}_n$ の上昇とともに, 管中心部の速度減少はより大きくなる. このような振る舞いは, 2.4.4 項で見たように, 常流動 Hagen-Poiseuille 流の場合も現れる. 管中心部で速度が減少する理由, 言い換えると壁近傍で渦度が大きくなる原因は, 2.4.4 項で説明したように, 超流動境界層場が存在することである. また, L'/L の分布が変化しないのに $\bar{v}_{ns}$ の上昇とともに中心部での超流動速度がより減少する理由は, 全体の渦糸長密度 L が上昇するためであった.

常流動 Hagen-Poiseuille 流の結果と大きく違う点は, およそ $|y| = 0.25$ mm を境に v_s^x の傾向が変化する点である. 図 2.34 を見ると, $\bar{v}_n$ の増加にともない, 壁側の領域 $0.25 < |y| < 0.5$ の v_s^x はあまり変化していない^{*21}. 一方で, 中心部の領域 $|y| > 0.25$ では, $\bar{v}_n$ の変化に対して大きく v_s^x が変化している. このことは, 結局, 図 2.31 および図 2.32 に示される特徴的な量子渦の分布によって引き起こされている

^{*21} $\bar{v}_n = 0.35$ cm/s における値は他の速度の値とは少し異なるように見えるが, これはおそらく量子乱流が十分発達していないためである.

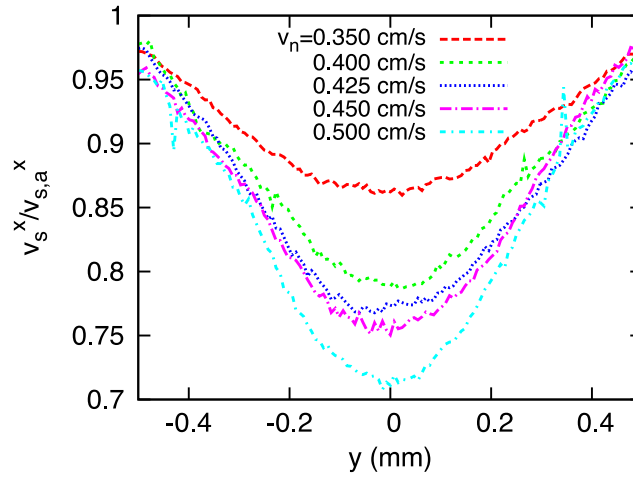


図 2.34 超流動速度場 $\mathbf{v}_s$ の流れ方向成分 v_s^x . (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

ことは確かである。おそらく，中心部の領域 $|y| > 0.25$ では量子渦タングルが非一様であり，壁側の領域 $0.25 < |y| < 0.5$ では量子渦タングルがほとんど一様であることに起因しているのであろう。しかしながら，量子渦タングルの構造と超流動速度場を結びつける理論はまだわかっておらず，これは今後の課題である。

2.6 議論

本研究によって得られた結果を用いて 4 つの事柄について議論する。

2.6.1 対向流速の修正

2.4 節および 2.5 節において，対向流速を

$$v_{\text{ns}} = |\overline{\mathbf{v}_n} - \mathbf{v}_{s,a}| \quad (2.29)$$

として解析を行ってきた。しかし，本来の対向流速は

$$v_{\text{ns}} = |\overline{\mathbf{v}_n} - \overline{\mathbf{v}_s}| \quad (2.30)$$

である。2.4.4 等で見えてきたように，非一様熱対向流においては $\overline{\mathbf{v}_s} \neq \mathbf{v}_{s,a}$ であった。したがって，このことを考慮して Vinen の関係式の係数 γ を再計算すべきである。

まず，非一様量子渦タングルがどの程度の速度場をつくり出しているか，すなわち $\overline{\mathbf{v}_s}$ と $\mathbf{v}_{s,a}$ のずれを調べる。図 2.35 は，超流動速度 $\overline{\mathbf{v}_s}$ の流れ方向成分 v_s^x を表している。 v_s^x の値は数値計算領域にわたって空間的に，統計的定常状態にわたって時間的に平均されている。横軸は平均常流動速度である。図 2.35(a) は Hagen-Poiseuille 流の場合であり，図 2.35(b) は tail-flattened 流の場合である。共通した特徴として， $v_s^x / v_{s,a}^x$ の値は 1 より小さく， v_n の増加とともに減少していく。このことは，非一様量子渦タ

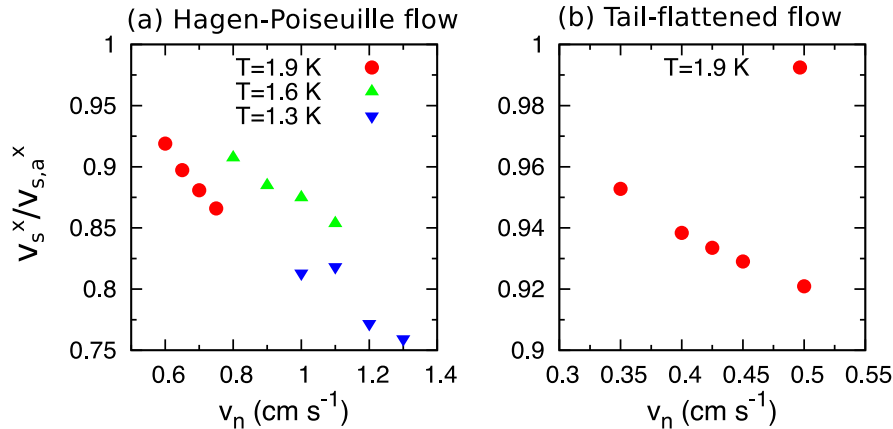


図 2.35 計算 box 全体にわたって空間平均された超流動速度 v_s^x の平均常流動速度 v_n 依存性. (a) は常流動が Hagen-Poiseuille 流のときであり, (b) は常流動が tail-flattened 流のときである. $v_s^x/v_{s,a}$ が 1 より小さくなるほど, 超流動は背景の一樣流 $v_{s,a}$ より減速していることを意味する. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

表 2.5 修正された Vinen の関係式の係数 γ^* . γ_{hp}^* は Hagen-Poiseuille 流の結果であり, γ_{tf}^* は tail-flattened 流の結果である. 参考のために, 修正前の結果 γ_{hp} , γ_{tf} , および一樣系の数値計算 [50] の結果 γ_{uni} も載せてある.

T (K)	γ_{hp}^* (s/cm ²)	γ_{tf}^* (s/cm ²)	γ_{hp} (s/cm ²)	γ_{tf} (s/cm ²)	γ_{uni} (s/cm ²)
1.3	32	—	31	—	53.5
1.6	50	—	47	—	109.6
1.9	123	189	103	176	140.1

ングルが $\mathbf{v}_{s,a}$ とは逆向きの流れをつくりだすことを意味する. 図 2.35 から, その流れの影響は $\mathbf{v}_{s,a}$ に対して無視できないことがわかる.

そこで, 図 2.35 の結果を用いて対向流速 $v_{ns} = |\overline{\mathbf{v}_n} - \overline{\mathbf{v}_s}|$ を計算し, Vinen の関係式の係数 γ を再計算した. 表 2.5 は, 修正された係数 γ を示している. γ_{hp}^* は Hagen-Poiseuille 流の場合であり, γ_{uni}^* は tail-flattened 流の場合である. さらに, 修正前の結果 γ の値も載せている. 修正された係数 γ^* の値は, 修正前の値 γ よりも高い. これは, 常流動速度 v_n が大きくなるとともに超流動速度 v_s の減少が大きくなるためである. また, γ と γ^* の差は, 温度の上昇とともに大きくなることがわかる. 修正された γ^* と T1 状態の実験値と一致する γ_{uni} を比較する. この修正によって, Hagen-Poiseuille 流の結果は γ_{uni} にすこし近づいたが, tail-flattened 流の結果は γ_{uni} からすこし遠ざかった. いずれの結果も γ_{uni} すなわち T1 の実験値との一致はあまり良くなく, 今回の数値計算の枠組みには足りない要素があることを示唆している.

本来の熱対向流の条件は

$$\overline{\mathbf{v}_s} = -\rho_n \overline{\mathbf{v}_n} / \rho_s \quad (2.31)$$

であるが、本研究では

$$\mathbf{v}_{s,a} = -\rho_n \bar{\mathbf{v}}_n / \rho_s \quad (2.32)$$

として数値計算を行っていた。上でみたように、本研究で得られた非一様量子乱流においては $\bar{v}_s < v_{s,a}$ であるから、本研究の数値計算の状況は厳密にいうと熱対向流ではない。本来の熱対向流を再現するためには、数値計算において動的に $\mathbf{v}_{s,a}$ を調節して、熱対向流の条件をみたすようにする必要がある。もしこれを実行すると、量子渦タングルによる超流動速度の減少が起こると $\mathbf{v}_{s,a}$ を上昇させることになる。そうすると全体的に対向流速が上昇し、さらに渦糸長密度が上昇するだろう。これによって、結果が大きく変わることが予想できる。これは、今後の研究としたい。

2.6.2 正方形管の形状の効果

正方形管の固体境界条件が量子乱流にどのような影響を与えるのかを理解することは重要である。T1-T2 遷移のようないくつかの重要な現象は、管の形状に依存することがわかっている。しかしながら、いまだにその機構はわかっていない。2.4 節および 2.5 節において、我々は管断面中心 $z = 0$ mm にそった分布に注目してきた。したがって、正方形管の形状による性質を見逃していたかもしれない。ここでは、管断面にわたる物理量の分布をしらべ、正方形管の形状の効果を考える。

図 2.36 は管断面にわたる物理量の分布を示している。これらの物理量は、統計的定常状態にわたって時間的に、流れ方向にわたって空間的に平均されている。Hagen-Poiseuille 流は $v_n = 0.75$ cm/s の結果であり、tail-flattened 流は $v_n = 0.5$ cm/s の結果であり、温度はどちらの場合も $T = 1.9$ K である。このとき、平均渦糸長密度はおよそ等しく、 $L \approx 1.0 \times 10^4$ cm⁻² となる。

図 2.36 の上段は、局所的な渦密度 $L'(y, z)$ の管断面にわたる分布を示している。図 2.36(a) は Hagen-Poiseuille 流の結果であり、正方形管の角に非常に多くの量子渦が集中していることがわかる。正方形管の角部分是对向流速が小さい領域であり、したがってそこでの相互摩擦力項 $\alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$ は小さい。したがって、量子渦は正方形管の角に留まる傾向にあり、ここでの渦糸長密度が高くなる。一方、図 2.36(b) は tail-flattened 流の結果である。Hagen-Poiseuille 流の場合とは対照的に、正方形管の角では渦糸長密度が減少している。この系においては、印加対向流速が管壁近傍でも減少しないので、相互摩擦項も大きいままである。したがって、量子渦は正方形管の角に留まらない。

さらに、固体壁自体の効果として量子渦を吸収する働きがある。すなわち、固体壁に付着した半円の渦は、自己誘導速度場によって固体壁上を移動し、相互摩擦力によって収縮する。したがって、壁近傍での渦糸長密度が減少するのである。

図 2.36 の下段は、超流動速度場 $\mathbf{v}_s$ の流れ方向成分 v_s^x を示している。共通する特徴として、正方形管の角部分では背景の一樣流 $v_{s,a}$ よりも大きくなる。図 2.36(c) は Hagen-Poiseuille 流の結果である。Hagen-Poiseuille 流の場合、 v_s^x は中心部で小さい値をとり、管壁に近づくとともに大きくなることがわかる。図 2.36(d) は tail-flattened 流の結果である。tail-flattened 流の場合、 v_s^x は中心部での速度場がより小さくなり、外側の領域では $v_{s,a}$ に近い値をとる。

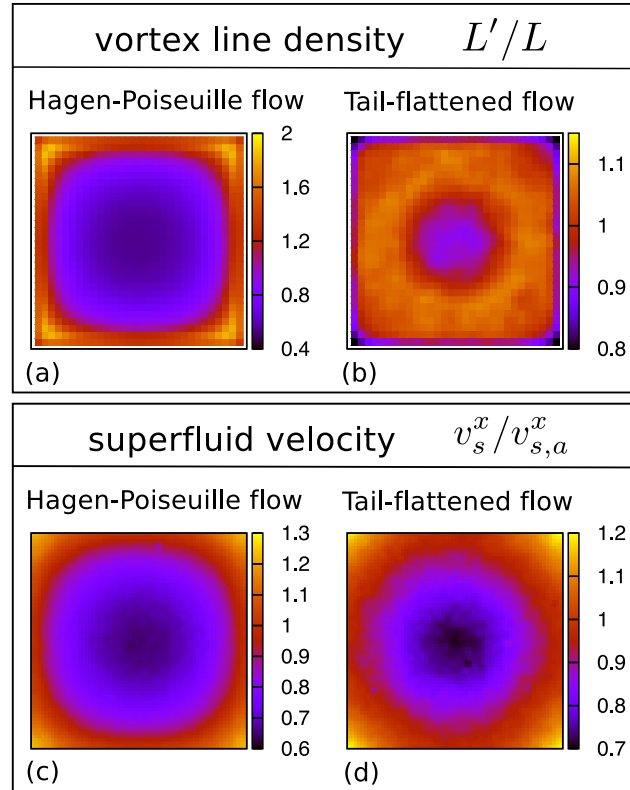


図 2.36 局所的渦糸長密度 $L'(y, z)$ および超流動速度場の流れ方向成分 $v_s^x(y, z)$ の分布. Hagen-Poiseuille 流は $v_n = 0.75$ cm/s の結果であり, tail-flattened 流は $v_n = 0.5$ cm/s の結果であり, 温度はどちらの場合も $T = 1.9$ K である. (Reprinted figure with permission from S. Yui and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **91**, 184504 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

2.6.3 管断面アスペクト比

T1-T2 遷移では管断面アスペクト比が重要であった. 管断面アスペクト比が量子渦タングルに与える影響について考える. 管断面アスペクト比を

$$A \equiv \frac{\text{管断面の長辺}}{\text{管断面の短辺}} \quad (2.33)$$

とする. 正方形管は $A = 1$ に対応し, このとき最小値となる. A を上昇させると, 管断面が長方形になる. A が大きいとき, 長い辺にそった対向流速場の勾配は小さくなる. したがって, 図 2.19 でみたような量子渦タングルの壁方向への排除は弱くなる. このことは, おそらく, 渦糸長密度を上げる効果をもたらす. 将来的に, 管断面アスペクト比を変えたときの非一様量子乱流のふるまいを調べたいと考えている.

つぎに, 常流動層流の安定性から管断面アスペクト比の影響を考える. Navier-Stokes 方程式の線形安定性解析の研究が, A が低いとき臨界 Reynolds 数が無限大であることを示した [26]. このことは, A が低いときの常流動層流は非常に安定であることを示唆している. したがって, おそらく, 超流動が乱流状

態になったとしても、超流動乱流の強度が低いうちは常流動は層流である。これは、超流動乱流と常流動層流の共存状態であり、この共存状態は T1 状態として予想されている。

2.6.4 T1-T2 遷移

2.2 節で説明した Marakov らの可視化実験 [66] を見ると、T1 状態は常流動が tail-flattened 層流、T2 状態は常流動が乱流ではないかと思う。我々の数値計算によると、tail-flattened 流における Vinen の関係式 $L^{1/2} = \gamma(v_{\text{ns}} - v_0)$ の係数は、 $T = 1.9 \text{ K}$ において $\gamma_{\text{tf}}^* = 189 \text{ s/cm}^2$ であった。しかし、表 2.1 にあるように、実験によると T1 状態では $\gamma \sim 130 \text{ s/cm}^2$ である。すなわち、我々の tail-flattened 流の計算と実験の T1 状態は一致しないように見える。これは、常流動 tail-flattened 層流の平坦化パラメータ h を固定していることに起因するかもしれない。すなわち、実際は、tail-flattened 層流の平坦化の度合いは量子渦タングルからの相互摩擦力によって決まるものであり、熱流 q を変えると変化する。平坦化の度合いが変化すると、量子渦タングルの振る舞いも変わってくる。今回の数値計算では、このような減少は考慮できていないのである。このようなことは、常流動 Navier-Stokes 方程式を数値計算に取り入れることによって考慮できるようになる。これは、今後の研究としたい。

2.7 結論

我々は、渦糸モデルの数値計算を用いて、非一様熱対向流における量子乱流の研究を行った。常流動速度場には、2 種類の時間に依存しない速度場を用いた。1 つは Hagen-Poiseuille 層流であり、もう 1 つは tail-flattened 層流であった。正方形管の固体境界条件が適用された。

2.4 節では、Hagen-Poiseuille 流の数値計算結果を解析した。渦糸長密度が時間空間的に大きくゆらぐことがわかった。大きなゆらぎにおける量子渦タングルの構造を調べ、大きなゆらぎの 1 周期が特徴的な 4 つの状態を繰り返していることを明らかにした。Vinen の関係式 $L^{1/2} = \gamma(v_{\text{ns}} - v_0)$ は成立しているが、係数 γ は一様熱対向流の結果より小さかった。異方性パラメータは、一様熱対向流の結果より大きかった。つぎに我々は量子渦タングルの非一様性を調べた。量子渦は管壁付近に集中し、固体境界の近くでは異方性パラメータが大きくなることがわかった。この壁近傍の領域は古典乱流の境界層と似ていて、超流動境界層と名付けられた。さらに、量子渦タングルの輸送速度の空間分布を明らかにした。最後に超流動速度場を調べ、背景の一様流 $\mathbf{v}_{\text{s,a}}$ と逆向きの速度場が、量子渦タングルによってつくられることがわかった。その結果として、平均超流動速度 $\bar{v}_{\text{s}}$ は $\mathbf{v}_{\text{s,a}}$ より小さくなっていた。

2.5 節では、tail-flattened 流の数値計算結果を解析した。平坦化パラメータ h の上昇とともに渦糸長密度が大きくなり、 $h \gtrsim 0.7$ で飽和することを示した。実験と一致させるように $h = 0.7$ で $T = 1.9 \text{ K}$ に固定し、さらに数値計算を行った。Vinen の関係式は成立していたが、係数 γ は一様熱対向流の結果より大きかった。異方性パラメータは、一様熱対向流の結果より少し大きかった。非一様性は、Hagen-Poiseuille 流の場合と比べると大きく減少していた。管中心において、渦糸長密度はわずかに小さくなり、異方性パラメータはわずかに大きくなっていた。量子渦タングルによって、背景の一様流 $\mathbf{v}_{\text{s,a}}$ と逆向きの速度場がつくられ、管中心部では他の領域よりさらに大きな速度場がつくられことがわかった。

第3章

量子乱流の対数型速度分布

3.1 序論

一様等方乱流の Kolmogorov 則に代表される統計則を見るとわかるように、乱流では統計量に注目することが大切である。古典的な壁面乱流 (wall bounded turbulent flow) における最も重要な統計則の一つは、対数型速度分布 (logarithmic velocity profile) である。本研究は渦糸モデルの数値計算を用いて、量子乱流における対数型速度分布の存在を示す。

この章は、以下のような構成となっている。3.2 節では、対数型速度分布に関する研究背景を説明する。そこでは、古典乱流における対数型速度分布について説明される。3.3 節では、我々が行う数値計算のモデルについて説明する。3.4 節では、pure normal flow における数値計算を行い、量子乱流における対数型速度分布を示す。3.5 節では、pure superflow の予備的な数値的研究について説明する。なお、この章で説明する我々の研究は、文献 [74] として発表されている。

3.2 古典乱流の対数型速度分布

ここでは、古典的な壁面乱流に関する理解を説明する。理論、実験、数値計算について順番に説明していく。

3.2.1 理論

ここでは、古典的壁面乱流の平均速度に関する法則、すなわち壁法則を導く [4, 75]。壁法則に関する理論的洞察は von Karman と Prandtl によって与えられた。ここでの説明は、基本的に von Karman と Prandtl の結果である。

壁面乱流の平均速度

Navier-Stokes 方程式から出発して、壁面乱流 (wall-bounded turbulent flow) の平均流を考える。Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.1)$$

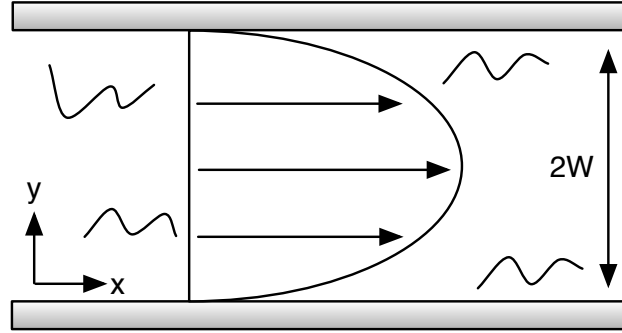


図 3.1 平行 2 平板間の乱流.

に Reynolds 分解された速度 $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}'$ を代入する. 系は統計的定常状態にあるとし, さらに統計平均をとると,

$$\rho(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{u}_i = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\bar{\tau}_{ij} + \tau_{ij}^R] \quad (3.2)$$

を得る. ここで, $\bar{\mathbf{u}}$ は統計平均された速度場であり,

$$\tau_{ij} = 2\rho\nu S_{ij} = \rho\nu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (3.3)$$

および

$$\tau_{ij}^R = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (3.4)$$

である. τ_{ij} は 粘性応力テンソル とよばれる. また, τ_{ij}^R は Reynolds 応力テンソル とよばれ, 乱流のゆらぎが運ぶ運動量を表す.

図 3.1 のように, $y = 0$ および $y = 2W$ にある 2 つの平板間の乱流を考える. このとき, 式 (3.2) は

$$\frac{\partial}{\partial y} [\bar{\tau}_{xy} + \tau_{xy}^R] = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy}^R = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \quad (3.6)$$

となる. ここで,

$$\bar{p}_w \equiv \bar{p} - \tau_{yy}^R \quad (3.7)$$

とおくと, 式 (3.6) は,

$$\frac{\partial \bar{p}_w}{\partial y} = 0 \quad (3.8)$$

と書ける. すなわち, $\bar{p}_w$ は y に依存しない. 非圧縮性粘性流体の場合, $y = 0$ において $\mathbf{u}' = 0$ であるので,

$$\bar{p}_w(x) = \bar{p}(x, y = 0) \quad (3.9)$$

となる. すなわち, $\bar{p}_w$ は壁圧 (wall pressure) である.

τ_{yy}^R は x に依存しないから, 式 (3.5) は

$$\frac{\partial}{\partial y} [\bar{\tau}_{xy} + \tau_{xy}^R] = \frac{d\bar{p}_w}{dx} \quad (3.10)$$

3.2 古典乱流の対数型速度分布

77

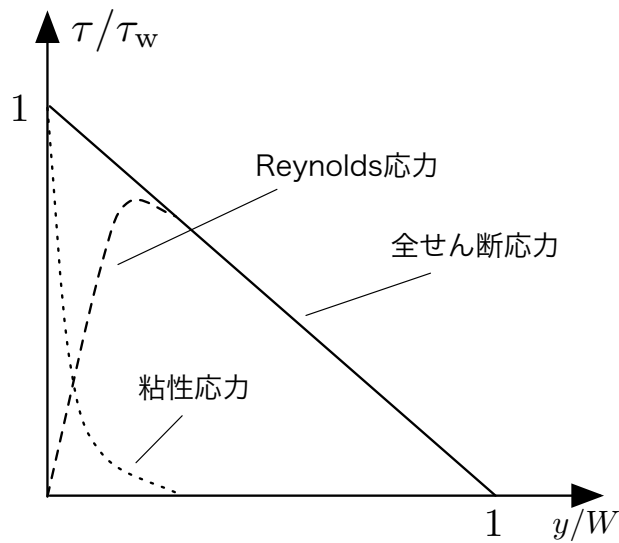


図 3.2 平行 2 平板間の壁面乱流におけるせん断応力の分布．対数型速度分布が現れるのは粘性応力が十分小さく，かつ全せん断応力が大きい領域．

と書ける．左辺は x に依存せず，右辺は y に依存しない．よって， x にも y にも依存しない定数 K を用いて

$$\frac{d}{dy} [\bar{\tau}_{xy} + \tau_{xy}^R] = -\rho K \quad (3.11)$$

という形になる．ここで， ρK は管内の圧力勾配 $-d\bar{p}_w/dx$ となる．式 (3.11) の左辺は，全せん断応力 $\tau = \bar{\tau}_{xy} + \tau_{xy}^R$ の y 微分となっている．式 (3.11) を積分して，

$$\tau = \tau_w \left(1 - \frac{y}{W}\right) \quad (3.12)$$

を得る．積分において， $y = 0$ および $y = 2W$ が固体壁であることを用いた．ここで， $\tau_w = \rho K/W$ であり，これは壁面せん断応力である．したがって，全せん断応力 τ は図 3.2 のように y に比例して減少する．便利な記号として，

$$u_*^2 \equiv \tau_w / \rho \quad (3.13)$$

を導入する． u_* は摩擦速度と呼ばれる．よって，壁面乱流の平均流に関する式

$$\nu \frac{d\bar{u}_x}{dy} - \overline{u'_x u'_y} = u_*^2 - Ky \quad (3.14)$$

を得る．

壁から遠い領域では $\tau \approx \tau_{xy}^R$ となり，Reynolds 応力に比べて粘性応力が重要ではなくなる．このとき，式 (3.14) は

$$-\overline{u'_x u'_y} = u_*^2 - Ky \quad (3.15)$$

となる．したがって，Reynolds 応力 τ_{xy}^R は y に比例して減少する．このような領域を 外層(outer layer) と呼ぶ．

壁近傍 $y \ll W$ では, $\tau \approx \tau_w$ となる. このとき, 式 (3.14) は,

$$\nu \frac{d\bar{u}_x}{dy} - \overline{u'_x u'_y} = u_*^2 \quad (3.16)$$

となる. このような領域を 内層(inner layer) とよぶ. 以下で見るように, 内層の内部には粘性底層と対数型速度分布領域が現れる.

対数型速度分布

固体表面からの距離が十分小さいとき, 流体の粘性は重要になる. そのときの距離のオーダーを y_0 と書くと, y_0 は以下のように決定される. 距離 y_0 における乱流の長さスケールは y_0 のオーダーであり, 速度は u_* のオーダーである. したがって距離 y_0 における Reynolds 数は, $Re \sim u_* y_0 / \nu$ である. 粘性が重要となると, Re は 1 のオーダーになる. したがって

$$y_0 \sim \frac{\nu}{u_*} \quad (3.17)$$

となり, これが y_0 を決定する.

内層における $y < y_0$ の領域では, 粘性応力が支配的になる. このとき, 式 (3.16) は,

$$\nu \frac{d\bar{u}_x}{dy} = u_*^2 \quad (3.18)$$

となる. 積分すると,

$$\bar{u}_x = \frac{u_*^2}{\nu} y \quad (3.19)$$

となる. この結果から, 固体表面近傍には, 平均速度 $\bar{u}_x$ が y に比例して変化する薄い層があることがわかる. この領域を 粘性底層(viscous sublayer) と呼ぶ.

対数型速度分布が現れるのは内層における $y > y_0$ の領域である. この領域では内層と外層がオーバーラップしていて, 粘性が重要でなく, かつ全せん断応力 τ が一定と近似できる. いま $\tau \approx \tau_w$ であり, これに対応する速度は u_* である. したがって, 速度勾配 $d\bar{u}_x/dy$ は u_* および y によって決まるであろう. 微分 $d\bar{u}_x/dy$ の次元は, $1/s$ である. 正しい次元をもつ唯一の組み合わせは,

$$\frac{d\bar{u}_x}{dy} = \frac{u_*}{by} \quad (3.20)$$

である. ここで, b は次元解析によっては決まらない定数であり, 実験によると,

$$b \sim 0.4 \quad (3.21)$$

である [76]. 定数 b は Karman 定数と呼ばれる. したがって,

$$\bar{u}_x = \frac{u_*}{b} (\log y + c) \quad (3.22)$$

となる. ここで, c は積分定数である. 距離 y_0 において速度が u_* のオーダーとなるから, $c = -\log y_0$ としなければならない. したがって, $\bar{u}_x = (u_*/b) \log(y/y_0)$, あるいは

$$\boxed{\bar{u}_x = \frac{u_*}{b} \log \left(\frac{y u_*}{\nu} \right)} \quad (3.23)$$

3.2 古典乱流の対数型速度分布

79

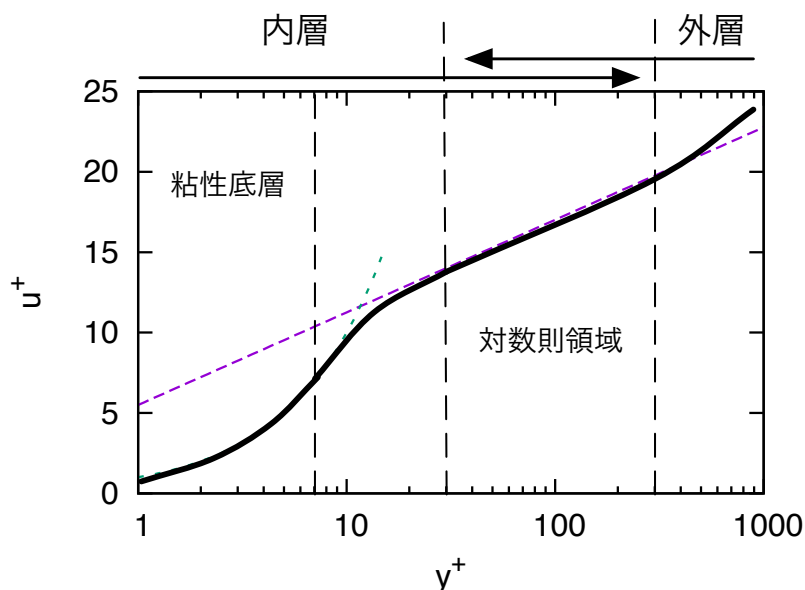


図 3.3 壁面乱流における平均速度 u^+ を壁からの距離 y^+ の関数として示した模式図。内層における粘性底層 $u^+ = y^+$ と対数則領域 $u^+ = (1/b) \log y^+ + A$ を示している。粘性底層と対数則領域の移り変わる領域は、バッファ層と呼ばれる。

となる。この分布は 対数型速度分布(logarithmic velocity profile) と呼ばれる。以上をまとめた模式図が、図 3.3 である。壁面乱流における平均速度 u^+ の壁からの距離 y^+ 依存性を示している。ここで、 $u^+ = \bar{u}_x/u_*$ 、および $y^+ = yu_*/\nu$ である。粘性底層と対数則領域の移り変わる領域は、バッファ層 (buffer layer) と呼ばれる。

3.2.2 実験

現在でも、対数型速度分布は壁面乱流における重要な物理として研究が行われている。近年の実験および数値的研究は、文献 [76] にまとめられている。典型的な実験として、Hutchins らの実験について説明する [77]。彼らは、熱線 (hot wire) を用いて壁面乱流における乱流強度や平均速度分布を測定した。測定部 (working section) が $27 \times 2 \times 1$ m の風洞 (wind tunnel) で実験が行われた。摩擦 Reynolds 数 (friction Reynolds number) が $Re_\tau \approx 14000$ のとき、対数型速度分布を観測した^{*1}。実験結果の図は、文献 [77] を参照されたい。この結果は、対数型速度分布の典型的な観測例である。

3.2.3 数値計算

対数型速度分布の数値的研究を紹介する。Lee と Moser の研究 [78] は、Navier-Stokes 方程式の直接数値計算 (direct numerical simulation: DNS) を扱った最近の研究である。この研究はチャネル間の乱流を調べており、摩擦 Reynolds 数は $Re_\tau \approx 200$ から $Re_\tau \approx 5200$ である。彼らは数値計算によっ

^{*1} 摩擦 Reynolds 数とは、特徴的速度を摩擦速度とした Reynolds 数のことである。

て流れ方向の平均速度場を調べ、結果として対数型速度分布を示す領域が見つかり、Karman 定数は $\kappa = 0.384 \pm 0.004$ と報告している。

彼らの数値計算によって得られた対数型速度分布の図は、文献 [78] を参照されたい。示されているすべてのデータに対して、対数型分布 $U^+ = (1/\kappa) \log y^+ + B$ が現れているように見える。ここで、 y^+ は壁からの距離、 U^+ は流れ方向の平均速度である。添え字の「+」は、粘性 ν および摩擦速度 u_* でスケールされていることを示す。

しかし、最近の研究の発展により、対数型分布の判定は慎重にする必要があることがわかってきた。彼らの得たすべてのデータが対数型分布をしめしているように思うが、実際はそうでないものもある。対数型速度分布の式を y で微分すると、

$$\beta(y^+) \equiv y^+ \frac{dU^+}{dy^+} = \frac{1}{\kappa} \quad (3.24)$$

となる。したがって、対数型分布領域では β が y^+ に依存せず一定となる。この微分形の対数型分布を調べることで、対数型分布をより正確に判断することができる。最も摩擦 Reynolds 数が高い $Re_\tau \approx 5200$ の場合、およそ $y^+ = 350$ から $y^+ = 830$ の間で β が一定になっていた。このときの β の値から、Karman 定数は $\kappa = 1/\beta = 0.384$ とわかる。しかしながら、摩擦 Reynolds 数が $Re_\tau \approx 4100$ の場合は、 β が一定の領域がなかった。このように、微分形を見ることにより、より正確な対数型分布の判断が可能になる。これを受けて、我々の研究においても対数型速度分布の微分形を検証する。

3.3 数値計算モデル

ここでは、我々の研究の数値計算モデルについて説明する。本研究では pure normal flow、すなわち常流動にのみ印加速度場を与えたときにできる流れを扱う。これは、超流動成分の印加速度をなくすことで、量子渦タングルがつくりだす速度場だけに注目するためである。系は平行 2 平板間の pure normal flow である。平行 2 平板は矩形管よりも平均操作に関して扱いやすい。なぜなら、流れ方向にしか空間平均が取れない矩形管に対して、 xz 平板間の流れは x と z 方向の 2 方向に空間平均がとれるからである。したがって、平行 2 平板は基本的な物理を調べるのに都合がよい。また、予備的な研究として pure superflow の数値計算も行った。Pure superflow とは、超流動のみに印加速度を与え、常流動は静止している流れである。

3.3.1 Pure normal flow

本研究では pure normal flow、すなわち常流動成分にのみ印加速度場を与えたときにできる流れを扱う。これは、熱対向流と同様に実験的に調べられてきた [24]。この流れにおいて生じる量子乱流は、Vinen の関係式 $L^{1/2} = \gamma(v_{\text{ns}} - v_0)$ をみたすことが知られている。図 3.4(a) は本研究の数値計算の模式図である。常流動成分が 2 枚の平行平板間を流れ、一方で超流動成分は印加速度 $v_{\text{s,a}}$ を持たない。流れ方向は x 軸に平行である。固体境界条件が $y/D = 0$ および 2 に課される。すなわち、管の半幅は D で

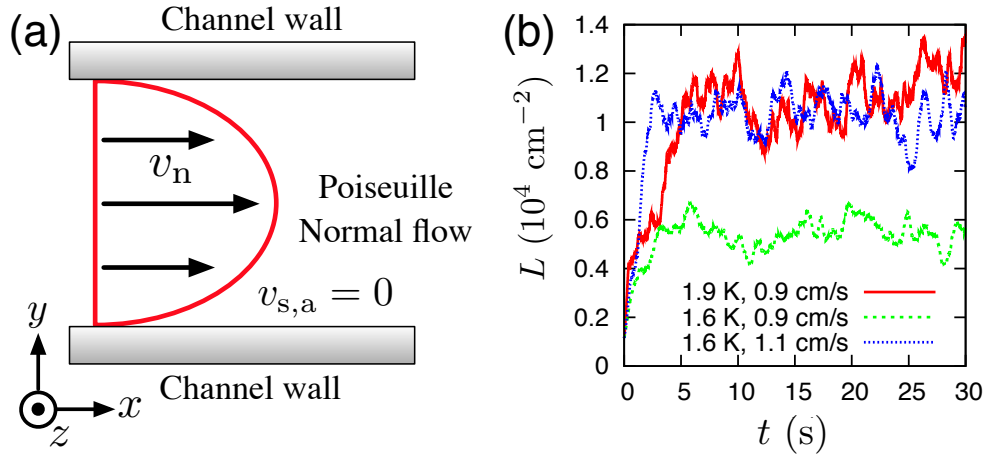


図 3.4 (a) Pure normal flow の数値計算の模式図. 常流動 Poiseuille 層流が 2 枚の平行な平板間を流れ, 一方で超流動成分は外的な流れ $v_{s,a}$ を持たない. 流れ方向は x 軸に沿っている. 周期境界条件が x および z 方向に課され, 固体境界条件が y 方向に課される. (b) Pure normal flow において生じる量子渦タングルの渦糸長密度の時間変化. 量子乱流は, 統計的定常状態に達する. (Reprinted figure with permission from S. Yui, K. Fujimoto, and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **92**, 224513 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

ある. 常流動速度場は, Poiseuille 分布

$$v_n(y) = v_{n,0} \left[1 - \left(\frac{y-D}{D} \right)^2 \right] \hat{x} \quad (3.25)$$

に固定され, 時間的に変化しない. ここで, $v_{n,0}$ は規格化因子であり, $\hat{x}$ は x 方向の単位ベクトルである. いま, v_n は $+x$ 方向を向いている.

3.3.2 Pure superflow

予備的な研究として, pure superflow の数値計算も行った. Pure superflow においては, 超流体が流れる一方で, 常流体は静止している. 図 3.5 は, pure superflow の数値計算の模式図である. 本数値計算においては, 超流体に空間的に一様な印加速度 $v_{s,a}$ を与える一方で, 常流体の速度場をゼロとする. 超流動印加場 $v_{s,a}$ は $-x$ 方向とする.

3.3.3 数値計算の設定

数値計算は以下の設定で実行される. 渦糸は, 空間分解の $\delta\xi = 8.0 \times 10^{-4} \text{ cm}$ を最小の間隔とした離散点によって記述される. 一方, 最大の計算点間隔は $3 \times \delta\xi$ であり, これより計算点同士が離れた場合は新たな点を挿入する. 時間方向の積分は 4 次の Runge-Kutta 法によって実行され, その時間分解能は $\delta t = 1.0 \times 10^{-4} \text{ s}$ である. 計算 box は $0.1 \times 0.1 \times 0.1 \text{ cm}^3$ であり, 周期境界条件が x および z 方向に課され, 固体境界条件が $y/D = 0$ および 2 に課される. 固体壁は完全に滑らかであるとし, 量子渦の pinning や表面による引きずりは起こらないとする. 初期状態は, 8 つのランダムな方向を向いた半径

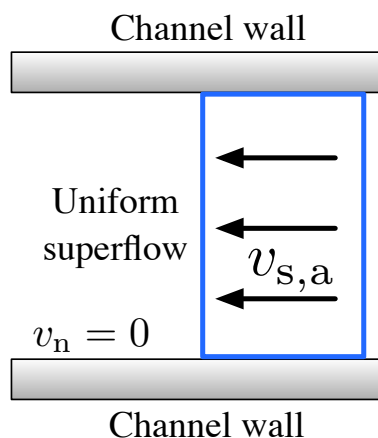


図 3.5 平行 2 平板間の Pure superflow の数値計算の模式図. 超流体には空間的に一様な印加超流動速度場を与える一方, 常流体は静止させる.

表 3.1 Pure normal flow の数値計算のパラメータ.

	T	$\bar{v}_n$
	(K)	(cm/s)
数値計算 1	1.9	0.9
数値計算 2	1.6	0.9
数値計算 3	1.6	1.1

0.023 cm の渦輪である. Pure normal flow の数値計算のパラメータは, 表 3.1 にまとめてある. 数値計算は $t = 3.0 \times 10$ s まで行われた.

3.4 Pure normal flow

数値計算の結果を説明する. まず, pure normal flow における量子渦タングルが統計的定常状態に達することを示し, そのときの量子渦タングルの構造に注目する. つぎに, 量子渦タングルがつくる平均速度場を調べ, 超流動速度場に対数型分布があらわれることを示す. 最後に, 対数型速度分布を示すときの量子渦タングルの構造を定量的に調べる.

3.4.1 統計的定常状態

Pure normal flow における量子渦タングルは, 統計的定常状態へと達する. 図 3.4(b) は, 渦糸長密度 L の時間発展を示している. L の値は初期状態から出発し, ある程度時間が経過したあとは一定値の周りをゆらぐようになる. これは, 量子乱流が統計的定常状態に達したことを示している. 統計的定常状態の L の値は, T および $\bar{v}_n$ の増加とともに大きくなる. これは, 運動方程式における相互摩擦力項 $\alpha \mathbf{s}' \times (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$ がより大きくなり, 量子渦タングルへのエネルギー注入量が増えるためである. この統計的定常状態においては, 図 3.6 に示すような非一様量子渦タングルが現れる. 管壁付近では, 量子渦の

3.4 Pure normal flow

83

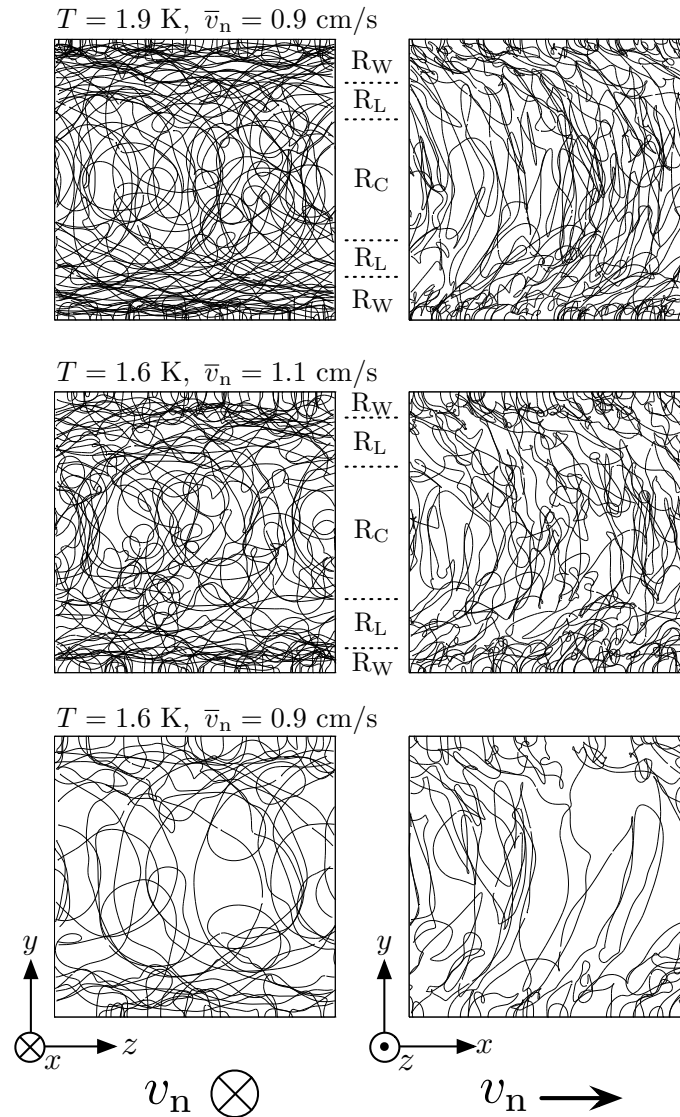


図 3.6 統計的定常状態における量子渦タングルのスナップショット．左の列が流れ方向からみたタングルであり，右の列が横からみたタングルである．(Reprinted figure with permission from S. Yui, K. Fujimoto, and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **92**, 224513 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

線長密度が高くなるのがわかる．これは，2 章の非一様熱対向流でも現れた超流動境界層である． T および $\bar{v}_n$ の増加とともに，非一様な構造がより明確で異方的になるが，第 2 章の熱対向流の研究で見たように，これは相互摩擦力がより大きくなるためである．

3.4.2 対数型速度分布

統計的定常状態において超流動流の対数型速度分布が現れたので，これについて説明する．超流動速度場 $\mathbf{v}_s$ の流れ方向成分 v_s^x を図 3.7(a) に示されている．ここで， v_0 は管中心 $y/D = 1$ における v_s^x の値である．これらの値は，統計的定常状態にわたって時間的に， x および z 方向にわたって空間的に平均され

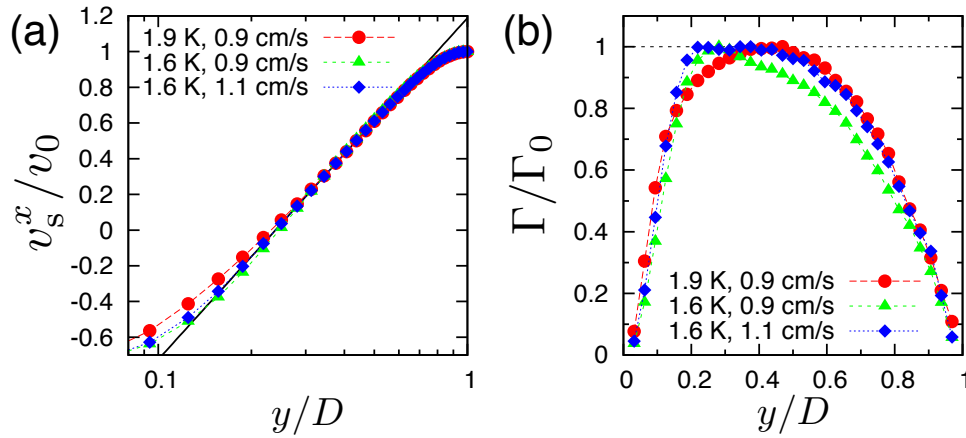


図 3.7 (a) 管壁からの距離 y/D の関数としての超流動速度場 $\mathbf{v}_s$ の流れ方向成分 v_s^x . 管壁は $y/D = 0$ に対応し、管中心は $y/D = 1$ に対応する. 直線は、式 (3.26) を数値計算 3 ($T = 1.6$ K, $\bar{v}_n = 1.1$ cm/s) のデータにフィッティングしたものである. (b) 対数型分布の別の形式 $\Gamma \equiv y(dv_s^x/dy) = \text{const.}$ の検証. Γ_0 の値は Γ の最大値である. $T = 1.6$ K での $\bar{v}_n$ を除いて、対数型分布が現れる. (Reprinted figure with permission from S. Yui, K. Fujimoto, and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **92**, 224513 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

ている. データは、壁からの距離 y/D の関数として示している. すべてのデータで、対数型分布

$$v_s^x(y) = \frac{v_q^*}{\kappa_q} \left[\log\left(\frac{y}{D}\right) + c \right] \quad (3.26)$$

が現れているように見える. ここで、 v_q^* は量子乱流に特徴的な速度、 κ_q は量子乱流の Karman 定数、 c はパラメータである.

しかしながら、3.2.3 項で説明したように、対数型分布が現れているかどうかの判断は慎重に行う必要がある. 対数型分布をより正確に検証するため、我々は対数型分布の微分形

$$\Gamma(y) \equiv y \frac{dv_s^x(y)}{dy} = \frac{v_q^*}{\kappa_q} \quad (3.27)$$

を調べた. この形式は式 (3.26) を y に関して微分することで得られる. この形式において、対数型分布領域は Γ が y に依存しない一定値をとる領域である. 図 3.7(b) は、壁からの距離 y/D の関数として Γ を表している. 対数型分布領域を示す領域を $y_1 < y < y_2$ と書くと、結果は表 3.2 のようになった. ここで、対数型分布領域は $0.95 \leq \Gamma/\Gamma_0 \leq 1.00$ をみたす領域とした. まず、 $\bar{v}_n = 0.9$ cm/s の場合を見ると、 $T = 1.9$ K では対数型分布が現れたが、 $T = 1.6$ K では対数型分布は見出されなかった. 数値計算 2 ($T = 1.6$ K, $\bar{v}_n = 0.9$ cm/s) に対数型分布が見つからない理由は、おそらく、渦糸長密度が小さいためである. 実際、同じ温度でより速度が大きい数値計算 3 ($T = 1.6$ K, $\bar{v}_n = 1.1$ cm/s) のときは渦糸長密度が大きくなっていて、対数型分布が現れた.

対数型分布を示す領域の広さ y_2/y_1 について考える. 3.2.3 項で説明した古典的対数型速度分布の最新の数値的研究 [78] では、もっとも広いもので $y_2/y_1 = 2.37$ である. 表 3.2 の我々の結果と比べると、両者は同程度の大きさであることがわかる. したがって、数値計算による対数型分布の広さとしては、古典乱流に比べて小さくはない.

3.4 Pure normal flow

85

表 3.2 管中心 $y = D$ における平均超流動速度 v_0 , 対数型速度分布を示す領域 $y_1 < y < y_2$ とその領域の大きさ y_2/y_1 , 量子乱流の特徴的速度 v_q^*/κ_q とパラメータ c .

	T (K)	$\bar{v}_n$ (cm/s)	v_0 (cm/s)	y_1/D —	y_2/D —	y_2/y_1 —	v_q^*/κ_q (cm/s)	c —
数値計算 1	1.9	0.9	0.189	0.31	0.57	1.84	0.153	1.45
数値計算 2	1.6	0.9	0.080	—	—	—	—	—
数値計算 3	1.6	1.1	0.159	0.18	0.54	3.00	0.132	1.43

式 (3.26) を図 3.7(a) のデータにフィッティングすることで, v_q^*/κ_q および c の値を得た. フィッティングの範囲は $y_1 < y < y_2$ である. その結果を表 3.2 にまとめている. 量子乱流の Karman 定数 κ_q は, この結果からだけでは決定できない. これを決定するためには, v_q^* の物理的意味を知る必要がある. しかし, 現在のところ量子乱流における対数型速度分布に関する理論が構築できておらず, これは今後の研究としたい.

数値計算によって得られた超流動速度場と量子渦タングルの構造から, 領域全体を 3 つの領域に分類できる. すなわち, 対数型分布領域 R_L , 壁近傍の領域 R_W , および管中心部の領域 R_C である. それぞれの領域の境界は $y = y_1$ と $y = y_2$ であり, $0 < y < D$ に限っていえば

$$\begin{aligned} 0 < y < y_1 &\Leftrightarrow R_W \\ y_1 < y < y_2 &\Leftrightarrow R_L \\ y_2 < y < D &\Leftrightarrow R_C \end{aligned}$$

と対応付けることができる. 図 3.6 に, 各領域の範囲を書き込んである. 図 3.6 からわかる各領域の特徴はつぎの通りである. 壁近傍の領域 R_W では, 曲率半径の小さな多くの量子渦が管壁に付着している. 中心部の領域 R_C は, 渦糸長密度が低く, 曲率半径の大きな渦が x 方向に垂直になる傾向がある. 対数型分布領域 R_L は, 量子渦が z 軸方向を向く傾向がある. これら特徴は, つぎの項で定量的に調べられる.

3.4.3 量子渦タングルの構造とダイナミクス

超流動速度場は, 結局, 量子渦が Biot-Savart 則にしたがって作りだしたものである. したがって, 量子乱流における対数型速度分布を理解するためには, 量子渦タングルの構造とダイナミクスを知る必要がある. 以下では, 対数型分布を示す量子渦タングルに特徴的な構造およびダイナミクスをしらべる.

量子渦タングルの構造とダイナミクスを見るには, 渦糸にそった座標 ξ を引数とした物理量 $Q(\xi)$ をデカルト座標 $\mathbf{r}$ における平均量に書き換える必要がある. そこで, 物理量 $Q(\xi)$ の粗視化された値 $[Q]_{CG}(\mathbf{r})$ を

$$[Q]_{CG}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\omega(\mathbf{r})l(\mathbf{r})} \int_{\mathcal{L}'(\mathbf{r})} Q(\xi) d\xi \quad (3.28)$$

と定義する. ここで, $\omega(\mathbf{r})$ は $\mathbf{r}$ における局所的な小体積であり, $\mathcal{L}'(\mathbf{r})$ は $\omega(\mathbf{r})$ 内の渦糸を表し, $l(\mathbf{r})$ は $\mathbf{r}$ における局所的な渦糸長密度である. このとき, $\omega(\mathbf{r})l(\mathbf{r})$ は小体積 $\omega(\mathbf{r})$ にある渦糸の長さである.

数値計算領域を, 一様な $32 \times 32 \times 32$ の Cartesian メッシュによって分割し, 粗視化を行う. このと

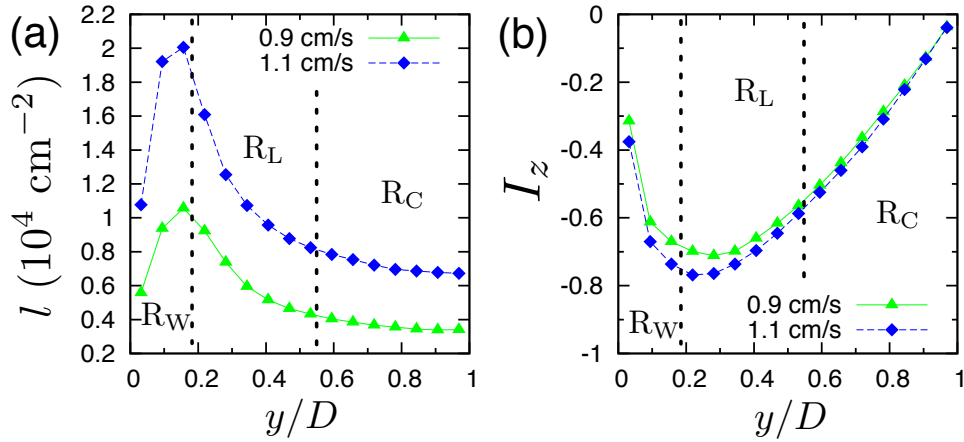


図 3.8 壁からの距離 y/D の関数としての局所的渦糸長密度 $l(y)$ および局所的異方性パラメータ $I_z(y)$. 温度は $T = 1.6 \text{ K}$ である. 縦の破線は, $\bar{v}_n = 1.1 \text{ cm/s}$ のときの対数型分布領域の境界をしめしている. (Reprinted figure with permission from S. Yui, K. Fujimoto, and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **92**, 224513 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

き, メッシュの間隔は $\Delta x = 1/32 \text{ mm} = 3.125 \times 10^{-3} \text{ cm}$ であり, 条件 $\Delta x > \delta \xi$ が満足される. 以下では, $T = 1.6 \text{ K}$ の結果に注目する. $\bar{v}_n = 0.9 \text{ cm/s}$ では対数型分布が見出せず, $\bar{v}_n = 1.1 \text{ cm/s}$ では見いだせるということに注意して, 以下の結果を見ていただきたい. ここでは, 物理量は統計的定常状態にわたって時間的に, かつ x および z 方向にわたって空間的に平均されている.

量子渦タングルの構造

まず, 量子渦タングルの構造を調べる. 局所的な渦糸長密度 $l(y)$ を図 3.8(a) に示す. 対数型分布領域 R_L に特徴的な構造として, 渦糸長密度の勾配 $|dl/dy|$ が大きいことがある. $\bar{v}_n = 1.1 \text{ cm/s}$ の結果に対して, $\bar{v}_n = 0.9 \text{ cm/s}$ の $|dl/dy|$ は小さい. おそらく, このことが $\bar{v}_n = 0.9 \text{ cm/s}$ で対数型分布が現れない理由である.

図 3.8(b) は, 異方性パラメータ

$$I_z \equiv [\mathbf{s}' \cdot \hat{\mathbf{z}}]_{\text{CG}} \quad (3.29)$$

の y 依存性を示している. ここで, $\hat{\mathbf{z}}$ は z 方向に平行な単位ベクトルである. すべての渦糸が $+z$ 方向に平行であれば $I_z = 1$ であり, すべての渦が $-z$ 方向に平行であれば $I_z = -1$ である. 管中心において I_z はゼロに近い値をとる. これは, $+z$ と $-z$ 方向を向く量子渦が同数現れるためである. 管中心から管壁に向かって近づくとともに, $|I_z|$ の値は大きくなっていき, 壁近傍 R_W では再び減少する. したがって, R_W と R_L の境界は, 異方性 $|I_z|$ のピークによって決まっているかもしれない. また, 対数型分布は渦の強い異方性を必要としているように見える.

量子渦タングルのダイナミクス

つぎに, 量子渦タングルのダイナミクスを調べる. 図 3.9 に, ドリフト速度

$$V_d^i \equiv [\dot{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_i]_{\text{CG}} \quad (3.30)$$

3.4 Pure normal flow

87

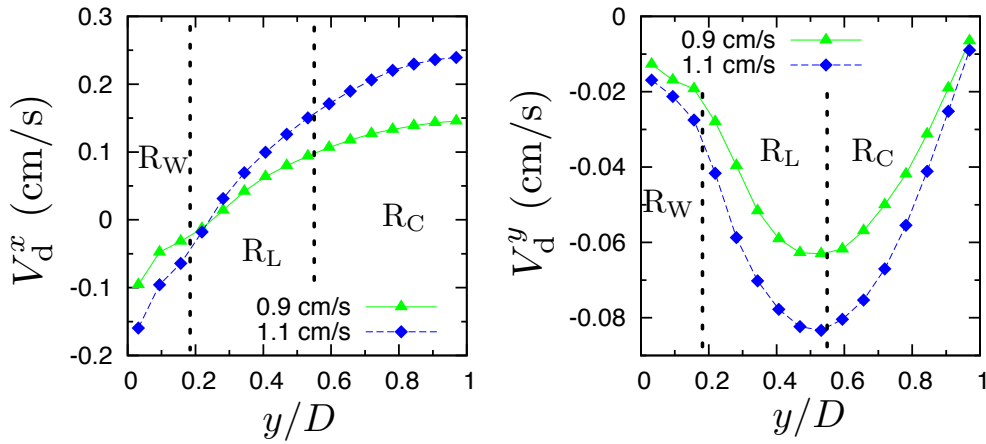


図 3.9 壁からの距離 y/D の関数としてのドリフト速度 V_d^x および V_d^y . 温度は $T = 1.6$ K である. 縦の破線は, $\bar{v}_n = 1.1$ cm/s のときの対数型分布領域の境界をしめしている. (Reprinted figure with permission from S. Yui, K. Fujimoto, and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **92**, 224513 (2015). Copyright (2015) by the American Physical Society.)

の y 依存性を示す. ここで, $\hat{r}_i$ は i 座標に平行な単位ベクトルである.

V_d^x は, 流れ方向にそった量子渦のドリフト速度を表している. 図 3.9 より, R_C および R_L において, ほとんどの量子渦が $+x$ 方向, すなわち常流動成分と同じ方向に動いていることがわかる. これは, 運動方程式の超流動速度場 $\mathbf{v}_s$ および α' に関する相互摩擦力項によるものである. 図 3.7(a) を見ると, この領域において, 超流動速度場 $\mathbf{v}_s$ が基本的に $+x$ 方向に生じていることがわかる. したがって, 運動方程式の右辺第 1 項の $\mathbf{v}_s$ にしたがって, 量子渦も $+x$ 方向に動く. これに加えて, 運動方程式右辺第 3 項の α' を含む相互摩擦力項も, 量子渦を $+x$ 方向に動かそうとする.

一方で, R_W においては, 量子渦は $-x$ 方向, すなわち常流動と逆向きに動いている. 管中心部から渦輪が膨張して管壁に付着し, 小さな曲率半径をもつ渦輪ができる. この曲率半径の小さな渦は, 大きな自己誘導速度で $-x$ 方向に移動する. このように自己誘導速度が $-x$ 方向を向くのは, おそらく壁近傍に $-x$ 方向の $\mathbf{v}_s$ ができ, α に関する相互摩擦力項が x 軸に垂直な方向を向くためである.

R_W と R_L の境界付近で, V_d^x の正負が変わっている. したがって, 対数型分布の下限 y_1 を決める物理に V_d^x が重要だと予想できる. R_L と R_C の境界付近で, dV_d^y/dy の正負が変化している. したがって, 対数型分布の上限 y_2 を決める物理に dV_d^y/dy が重要だと予想できる.

ドリフト速度 V_d^y と強い異方性 I_z は, 管中心部から管壁に向かって超流動成分の運動量輸送があることを示唆している. すなわち, 異方的な量子渦が移動することによって, 運動量が運ばれる. 具体的には, 流れ方向の運動量が管壁に向かって運ばれ, 管壁近傍では相互摩擦力によって散逸される. 古典乱流における対数型速度分布もまた, 壁に向かう運動量輸送によって引き起こされる. この類似から考えると, おそらく, 量子乱流の対数型分布も同様のメカニズムによって引き起こされる. 将来的な研究として, 以上の予想をもとに対数型分布の理論を構築したい.

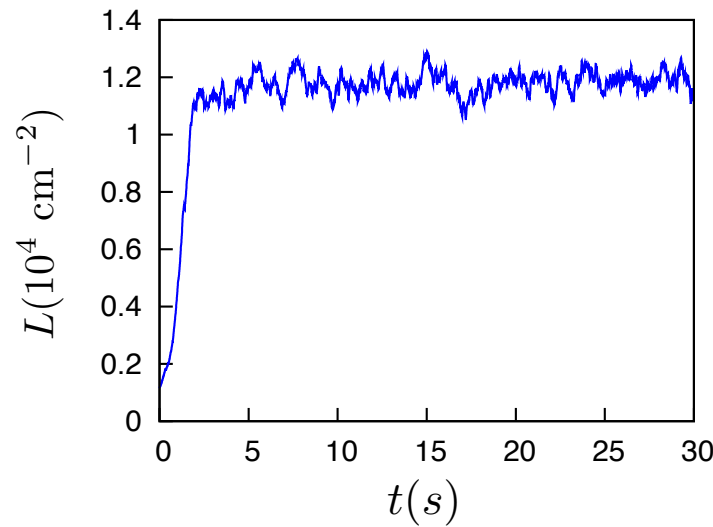


図 3.10 Pure superflow における渦糸長密度 L の時間変化. パラメータは $T = 1.6$ K, $v_{s,a} = 1.0$ cm/s である.

3.5 Pure superflow

ここでは pure superflow に関する予備的な結果を示す. 温度は $T = 1.6$ K で超流動印加速度は $v_{s,a} = 1.0$ cm/s である. まず, pure superflow における量子乱流が統計的定常状態に達することを示す. つぎに, そのときの量子渦タングルの構造を調べる. 最後に, 量子渦タングルのつくる超流動速度場を調べ, 対数型速度分布に従うかどうかを調べる. 結果として, 本数値計算においては対数型分布は見いだせなかった. 対数型超流動速度分布には非一様な v_n が必要なかもしれない.

3.5.1 統計的定常状態

Pure superflow における量子渦タングルは, 統計的定常状態に達する. 図 3.10 は, 渦糸長密度 L の時間発展を示している. L は初期状態から出発し, ある時間が経過したあとは一定値の周りをゆらぐ. これは, 量子乱流が統計的定常状態に達したことを意味する.

図 3.11 は, 統計的定常状態における量子渦タングルのスナップショットである. 図 3.6 と比較して大きな非一様性は見いだせないが, 管壁近傍では量子渦が壁に垂直になる傾向を見ることができる. また, 全体的に曲率半径の小さな渦があり, 異方性が小さいこともわかる.

前節と同様に, 粗視化された物理量 $[Q]_{CG}(\mathbf{r})$ を計算し, 量子渦タングルの構造を調べる. 以下で示す物理量は, x と z 方向にわたって空間的に, かつ統計的定常状態にわたって時間的に平均されている. まず, 図 3.12 の左に, 局所的渦糸長密度 $l(y)$ が壁からの距離 y/D の関数として示す. 壁近傍 $y/D < 0.15$ では, 渦糸長密度が減少していることがわかる. これは, 熱対向流および pure normal flow でも現れた現象であり, 量子渦の固体境界条件によって引き起こされる. 壁近傍を除き, 渦糸長密度の分布に大きな非一様性は見つからない.

3.5 Pure superflow

89

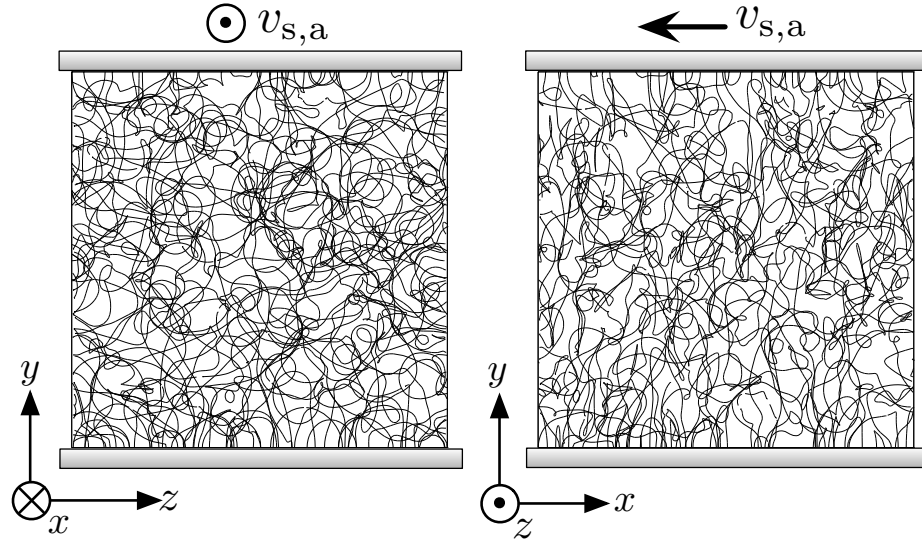
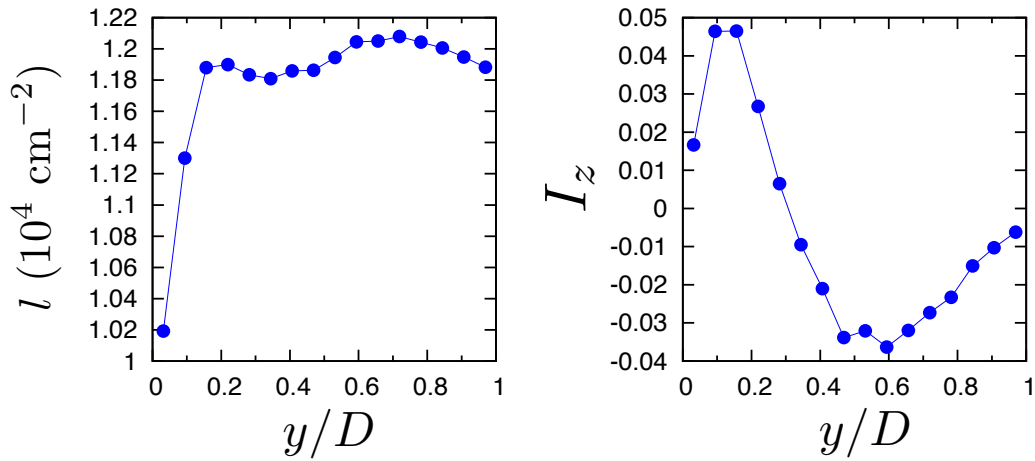


図 3.11 Pure superflow の統計的定常状態における渦タングルのスナップショット.

図 3.12 壁からの距離 y/D の関数としての局所的渦糸長密度 $l(y)$ および局所的異方性パラメータ $I_z(y)$.

つぎに、図 3.12 の右に、局所的異方性パラメータ

$$I_z(\mathbf{r}) = [\mathbf{s}' \cdot \hat{\mathbf{z}}]_{\text{CG}} \quad (3.31)$$

を示す. ここで、 $\hat{\mathbf{z}}$ は z 方向に平行な単位ベクトルである. 小体積 $\omega(\mathbf{r})$ 内のすべての渦糸が $+z$ 方向に平行であれば $I_z(\mathbf{r}) = 1$ であり、 $-z$ 方向に平行であれば $I_z(\mathbf{r}) = -1$ である. Pure normal flow と比べて、全体的に z 方向の異方性は小さい. 壁付近 $y/D < 0.3$ では、少し I_z が上昇して正の値をとる. 一方 $0.3 < y/D$ では、少し I_z が減少し、マイナスの値をとる.

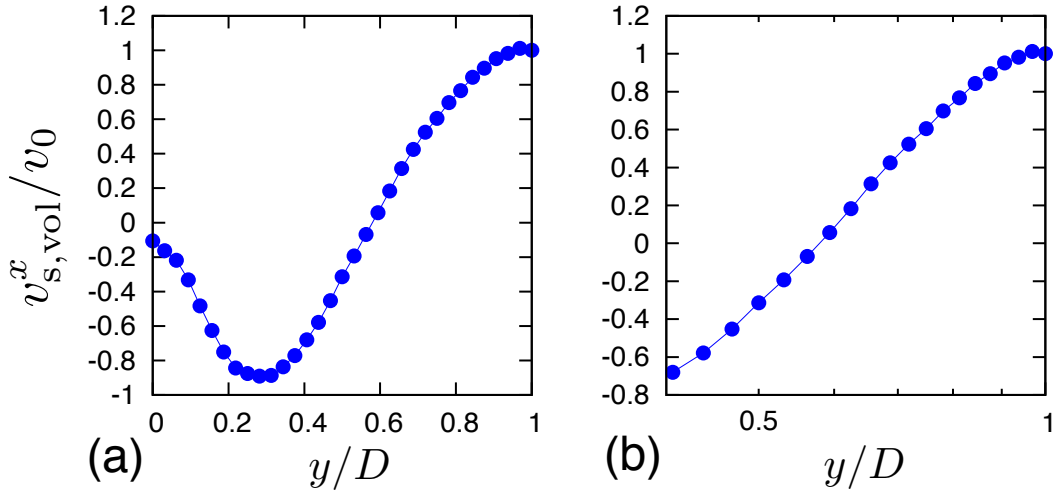


図 3.13 (a) Pure superflow において生じる量子乱流がつくる超流動速度場 $\mathbf{v}_{s,\text{vol}} \equiv \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_{s,a}$ の流れ方向成分 $v_{s,\text{vol}}^x$. 中心 $y/D = 1$ での $\mathbf{v}_{s,\text{vol}}$ の大きさ $v_0 = 5.52 \times 10^{-3}$ cm/s でスケールされている. 印加超流動速度 $\mathbf{v}_{s,a}$ は $-x$ 方向であるので, 管中心部では $\mathbf{v}_{s,a}$ と逆方向の速度が生じている. (b) 片対数グラフで示した速度場 $\mathbf{v}_{s,\text{vol}}$ の流れ方向成分 $v_{s,\text{vol}}^x$.

3.5.2 超流動速度場

量子渦が作りだす速度場 $\mathbf{v}_{s,\text{vol}} \equiv \mathbf{v}_s - \mathbf{v}_{s,a}$ の流れ方向 x 成分を, 図 3.13(a) に示す. これらの値は, 統計的定常状態において時間的に, かつ x および z 方向にわたって空間的に平均されている. データは, 壁からの距離 y/D の関数として示されている. ここで, $v_0 = 5.52 \times 10^{-3}$ cm/s は管中心 $y/D = 1$ における $v_{s,\text{vol}}^x$ の値である. v_0 の値は正であるので, 管中心部の速度 $\mathbf{v}_{s,\text{vol}}$ は $+x$ 方向を向いている. いま印加速度 $\mathbf{v}_{s,a}$ は $-x$ 方向に課されているので, 管中心において $\mathbf{v}_{s,a}$ と逆向きの速度 $\mathbf{v}_{s,\text{vol}}$ が生じている. これは, pure normal flow および熱対向流においても見られた管中心における超流動速度 $\mathbf{v}_s$ の減少と共通する特徴である. 一方, 管壁付近では超流動印加速度 $\mathbf{v}_{s,a}$ と同じ向きの速度 $\mathbf{v}_{s,\text{vol}}$ が生じている. さらに壁近傍では, 速度 $\mathbf{v}_{s,\text{vol}}$ はほとんどない.

図 3.13(b) は, 片対数グラフで示した超流動速度場である. 対数型速度分布に従うならば,

$$v_s^x(y) = \frac{v_q^*}{\kappa_q} \left[\log \left(\frac{y}{D} \right) + c \right] \quad (3.32)$$

と書ける. ここで, v_q^* は量子乱流に特徴的な速度, κ_q は量子乱流の Karman 定数, c は y に依存しないパラメータである. ただし, これらのパラメータは pure normal flow のものとは異なるであろう. 横軸が対数のグラフで直線ならば, 対数型速度分布領域である. このグラフからは, 対数型速度分布が現れているようには見えない.

さらに, 対数型速度分布の微分型

$$\Gamma(y) \equiv y \frac{dv_s^x(y)}{dy} = \frac{v_q^*}{\kappa_q} \quad (3.33)$$

を調べた. この形式において, 対数型速度分布領域は Γ が y に依存しない一定値をとる領域である. 図

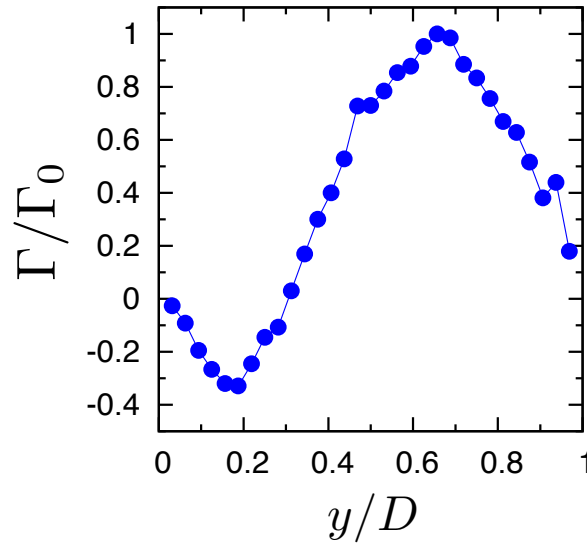


図 3.14 対数型速度分布の別の形 $\Gamma(y) \equiv y(dv_s^x/dy) = \text{const.}$ の検証. Γ_0 の値は Γ の最大値である.

3.14 は、壁からの距離 y/D の関数として $\Gamma(y)$ を示している. 図 3.14 の結果からも、対数型分布領域は見つからない. したがって、 $T = 1.6$ K で $v_{s,a} = 1.0$ cm/s の pure superflow において対数型速度分布領域は見つからなかった. 対数型超流動速度分布には非一様な $\mathbf{v}_n$ が必要であるのかもしれない.

3.6 結論

平行 2 平板間の pure normal flow に対して、渦糸モデルの数値計算を適用した. 量子乱流は統計的定常状態に達し、非一様な量子渦タングルを形成した. このときの平均超流動速度場を調べると、対数型速度分布則が現れることがわかった. 量子乱流における対数型速度分布を理解するために、量子渦タングルの構造とダイナミクスを調べた. 渦糸長密度、異方性パラメータ、ドリフト速度の分布を調べ、対数型分布に特徴的な構造を調べた.

また、平行 2 平板間の pure superflow における予備的な研究も行った. 量子乱流は統計的定常状態に達し、非一様な量子渦タングルを形成した. このときの平均超流動速度場を調べると、量子渦タングルが非一様な速度を作り出していることがわかった. 管中心部では印加超流動速度と同じ方向に、管壁付近ではその逆方向に超流動速度が生じていた. 対数型速度分布が生じるかを検証した結果、我々の数値計算では対数型速度分布は見つからなかった. したがって、対数型超流動速度分布には非一様な $\mathbf{v}_n$ が必要なのかもしれない.

第4章

結び

以下では、本論文の我々の研究結果についてまとめ、今後の展望を述べる。

第2章において、我々は非一様熱対向流における量子乱流の研究を行った。研究手法は渦糸モデルの数値計算であり、先行研究とは違い正方形管の境界条件が適用された。常流動速度場には、2種類の時間に依存しない速度場を用いた。1つは Hagen-Poiseuille 層流であり、もう1つは tail-flattened 層流であった。

まず、Hagen-Poiseuille 層流の数値計算結果を解析した。統計的定常状態において、渦糸長密度は時間空間的に大きくゆらいでいた。これは、一様熱対向流の数値計算では見られない特徴である。大きなゆらぎにおける量子渦タングルの構造を調べ、大きなゆらぎの1周期が4つの特徴的な状態によって構成されていることがわかった。渦糸長密度 L や異方性パラメータなど、統計的定常状態における統計量が調べられた。Vinen の関係式 $L^{1/2} = \gamma(v_{\text{ns}} - v_0)$ は成立していたが、係数 γ は一様熱対向流の結果より小さかった。異方性パラメータは一様熱対向流の場合より大きく、これは量子渦が流れに垂直な面内に寝る傾向が強いことを意味する。続いて、我々は量子渦タングルの非一様性を調べた。量子渦は管壁付近に集中し、固体境界の近くでは異方性パラメータが大きかった。この壁近傍の領域は古典乱流の境界層との類似性から、超流動境界層と名付けられた。さらに、量子渦タングルのドリフト速度の空間分布を明らかにした。最後に、超流動速度場を調べ、背景の超流動一様流 $v_{\text{s,a}}$ とは逆向きの速度場が量子渦タングルによって作られることがわかった。その結果として、超流動速度の空間平均値は $v_{\text{s,a}}$ より小さくなっていた。

つぎに、tail-flattened 層流の数値計算結果を解析した。平坦化パラメータ h の上昇とともに渦糸長密度が大きくなり、 $h \gtrsim 0.7$ で飽和した。実験と一致させるように $h = 0.7$ で $T = 1.9$ K に固定し、さらに数値計算を行った。Vinen の関係式は成立していたが、係数 γ は一様熱対向流の結果より大きかった。異方性パラメータは、一様熱対向流の結果より大きかった。量子乱流の非一様性は Hagen-Poiseuille 流の場合と比べると小さかった。このことは $h = 0.7$ の tail-flattened 流は平坦部が大きく、一様系に近いということを意味する。管中心において、渦糸長密度はわずかに小さくなり、異方性パラメータはわずかに大きくなっていた。量子渦タングルによって、背景の超流動一様流 $v_{\text{s,a}}$ と逆向きの速度場がつけられ、管中心部では他の領域よりさらに大きな速度場がつけられていた。

本研究では、常流体のダイナミクスは考慮されていない。より完全な数値計算は、超流体の量子渦糸モデルと常流体の Navier-Stokes 方程式を連立させて行うものである。その場合、量子渦タングルからの相互摩擦力の影響で、常流動層流は Hagen-Poiseuille 流から tail-flattened 流へと変形することが予

想できる。もしこれが数値的に確かめられたら、Marakov らの実験を量子渦の運動方程式と常流体の Navier-Stokes 方程式から再現したことになり、その結果は 2 流体ダイナミクスの理解に大きく貢献するであろう。したがって、量子乱流の研究分野では、2 流体のダイナミクスの同時数値シミュレーションを用いた研究が必要とされているように思う。

第3章において、我々は量子乱流における対数型速度分布について研究した。平行 2 平板間の pure normal flow に対して、渦糸モデルの数値計算を適用した。量子乱流は統計的定常状態に達し、非一様な量子渦タングルを形成した。このときの平均超流動速度を調べると、対数型速度分布が現れた。量子乱流における対数型速度分布を理解するために、量子渦タングルの構造およびダイナミクスを調べた。渦糸超密度、異方性パラメータ、およびドリフト速度の分布を調べ、対数型分布に特徴的な構造を見出した。量子渦が管中心部から管壁に向かってドリフトすることは、壁に向かう運動量流束の存在を示唆する。古典乱流においては運動量流束が対数型速度分布の起源であったので、このことはおそらく量子乱流の対数型速度分布にも関係しているだろう。

また、平行 2 平板間の pure superflow の予備的な研究も行った。量子乱流は統計的定常状態に達し、空間的に非一様な量子渦タングルを形成した。このときの平均超流動速度場を調べると、量子渦タングルが非一様な速度場をつくり出していることがわかった。管中心部では印加超流動速度と同じ方向に、管壁付近ではその逆方向に超流動速度が生じていた。対数型速度分布の有無を調べたが、対数型速度分布は見つからなかった。したがって、対数型超流動速度分布には非一様な v_n が必要なかもしれない。

本研究では量子乱流における対数型速度分布に関しての理論は得られておらず、これを構築することが今後の課題である。そのためには、古典的対数型分布との類推から、せん断応力に着目すると良いように思う。量子乱流のせん断応力が数値計算で得た対数型分布領域において y に依存しなければ、古典的対数型分布と同じ形の理論構築が可能である。今後の研究では、量子乱流のせん断応力の表式を得て、その分布を数値的に調べるべきであろう。本研究では限られたパラメータでしか数値計算を行っていないので、今後はパラメータを変化させたときの対数型分布の振る舞いを調べることも必要である。また、熱対向流、pure superflow, coflow などの他の流れに固有の壁法則を見出せるかも興味深い。

参考文献

- [1] 坪田誠, 西森拓: 量子渦のダイナミクス/砂丘と風紋の動力学 (培風館, 2008).
- [2] U. Frisch, *Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [3] 木田重雄, 柳瀬真一郎: 乱流力学 (朝倉書房 1999).
- [4] P. A. Davidson, *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*, (Oxford University Press, UK, 2004).
- [5] T. Tatsumi and T. Yoshimura, J. Fluid Mech. **212**, 437 (1990).
- [6] L. F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process*, (Cambridge University Press, 1922).
- [7] T. Araki, M. Tsubota, and S. K. Nemirovskii, Phys. Rev. Lett. **89**, 145301 (2002).
- [8] R. J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II*, edited by A. M. Goldman, P. V. E. McClintock, and M. Springford, (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1991).
- [9] 山田一雄, 大見哲巨: 超流動 (新物理学シリーズ 28, 培風館, 1995).
- [10] C. F. Barenghi, R. J. Donnelly and W. F. Vinen, *Quantized Vortex Dynamics and Superfluid Turbulence*, (Springer, Berlin, 2001).
- [11] 藤山将士: 修士論文 (大阪市立大学, 2007).
- [12] 足立洋之: 修士論文 (大阪市立大学, 2010).
- [13] 峯田由計: 修士論文 (大阪市立大学, 2012).
- [14] L. Tisza, Nature **141**, 913 (1938).
- [15] L. Landau, J. Phys. U.S.S.R. **5**, 71 (1941).
- [16] L. Onsager, Nuovo Cimento Suppl. **6**, 279 (1949).
- [17] R. P. Feynman, *Progress in Low Temperature Physics*, vol.I (North-Holland, Amsterdam, 1955).
- [18] G. W. Rayfield and F. Reif, Phys. Rev. **136**, A1194 (1964).
- [19] W. F. Vinen, Proc. R. Soc. London Ser. A **260**, 218 (1961).
- [20] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [21] V. F. Sears, E. C. Svensson, P. Martel and A. D. B. Woods, Phys. Rev. Lett. **49** 279 (1982).
- [22] E. P. Gross, J. Math. Phys. **4**, 195 (1963).
- [23] L. P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961).

- [24] J. T. Tough, *Progress in Low Temperature Physics*, edited by D. F. Brewer (North-Holland, Amsterdam, 1982), Vol. VIII.
- [25] 神部勉, 石井克哉: 流体力学 (裳華房, 1995).
- [26] 巽友正: 流体力学 (新物理学シリーズ 21, 培風館, 1995).
- [27] D. F. Brewer and D. O. Edwards, Proc. R. Soc. London Ser. A **251**, 247 (1959).
- [28] R. K. Childers and J. T. Tough, Phys. Rev. Lett. **35**, 527 (1975).
- [29] R. K. Childers and J. T. Tough, Phys. Rev. B **13**, 1040 (1976).
- [30] W. E. Keller and E. F. Hammel, Ann. Phys. **10**, 202 (1960).
- [31] D. R. Ladner and J. T. Tough, Phys. Rev. B **20**, 2690 (1979).
- [32] W. de Haas and H. van Beelen, Physica **83B**, 129 (1976).
- [33] J. F. Allen and J. Reekie, Proc. Cambr. Phil. Soc. **35**, 114 (1939).
- [34] S. M. Bhagat and P. R. Critchlow, Cryogenics **2**, 39 (1961).
- [35] D. F. Brewer and D. O. Edwards, Phil. Mag. **6**, 1173 (1961).
- [36] E. J. Yarmchuck and W. I. Glaberson, J. Low Temp. Phys. **36**, 381 (1979).
- [37] W. F. Vinen, Proc. R. Soc. London Ser. A **240**, 114 (1957).
- [38] C. J. Gorter and J. H. Mellink, Physica **15**, 285 (1949).
- [39] W. F. Vinen, Proc. R. Soc. London Ser. A **243**, 400 (1957).
- [40] D. F. Brewer and D. O. Edwards, Phil. Mag. **6**, 775 (1961).
- [41] C. E. Chase, Phys. Rev. **127**, 361 (1962).
- [42] R. K. Childers and J. T. Tough, Phys. Rev. Lett. **31**, 911 (1975).
- [43] J. Koplik and H. Levine, Phys. Rev. Lett. **71**, 1375 (1993).
- [44] M. Tsubota, T. Araki, and S. K. Nemirovskii, Phys. Rev. B **62**, 11751 (2000).
- [45] W. F. Vinen, Proc. R. Soc. London Ser. A **240**, 128 (1957).
- [46] W. F. Vinen, Proc. R. Soc. London Ser. A **242**, 493 (1957).
- [47] S. Yui and M. Tsubota, J. Phys.: Conf. Ser. **568**, 012028 (2014).
- [48] S. Yui and M. Tsubota, Phys. Rev. B **91**, 184504 (2015).
- [49] K. W. Schwarz, Phys. Rev. B **38**, 2398 (1988).
- [50] H. Adachi, S. Fujiyama, and M. Tsubota, Phys. Rev. B **81**, 104511 (2010).
- [51] K. W. Schwarz, Phys. Rev. B **31**, 5782 (1985).
- [52] K. W. Schwarz, Phys. Rev. B **18**, 245 (1978).
- [53] D. Kivotides, C. F. Barenghi, and D. C. Samuels, Science **290**, 777 (2000).
- [54] D. Kivotides, Phys. Rev. B **76**, 054503 (2007).
- [55] R. T. Wang, C. E. Swanson, and R. J. Donnelly, Phys. Rev. B **36**, 5240 (1987).
- [56] K. P. Martin and J. T. Tough, Phys. Rev. B **27**, 2788 (1982).
- [57] D. J. Melotte and C. F. Barenghi, Phys. Rev. Lett. **80**, 4181 (1998).
- [58] S. Babuin, M. Stammeier, E. Varga, M. Rotter, and L. Skrbek, Phys. Rev. B **86**, 134515 (2012).
- [59] K. P. Martin and J. T. Tough, Phys. Rev. B **27**, 2788 (1983).

-
- [60] G. P. Bewley, D. P. Lathrop, and K. R. Sreenivasan, *Nature (London)* **441**, 588 (2006).
 - [61] M. S. Paoletti, R. B. Fiorito, K. R. Sreenivasan, and D. P. Lathrop, *J. Phys. Soc. Jpn.* **77**, 111007 (2008).
 - [62] T. Zhang and S. W. Van Sciver, *Nat. Phys.* **1**, 36 (2005).
 - [63] M. La Mantia and L. Skrbek, *Phys. Rev. B* **90**, 014519 (2014).
 - [64] W. Guo, J. D. Wright, S. B. Cahn, J. A. Nikkel, and D. N. McKinsey, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 235301 (2009).
 - [65] W. Guo, S. B. Cahn, J. A. Nikkel, W. F. Vinen, and D. N. McKinsey, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 045301 (2010).
 - [66] A. Marakov, J. Gao, W. Guo, S. W. Van Sciver, G. G. Ihas, D. N. McKinsey, and W. F. Vinen, *Phys. Rev. B* **91**, 094503 (2015).
 - [67] D. Khomenko, L. Kondaurova, V. S. L'vov, P. Mishra, A. Pomyalov, and I. Procaccia, *Phys. Rev. B* **91**, 180504(R) (2015).
 - [68] L. Galantucci, M. Sciacca, and C. F. Barenghi, *Phys. Rev. B* **92**, 174530 (2015).
 - [69] A. W. Baggaley and S. Laizet, *Phys. Fluids* **25**, 115101 (2013).
 - [70] A. W. Baggaley and J. Laurie, *J. Low Temp. Phys.* **178**, 35 (2015).
 - [71] *The handbook of fluid dynamics*, edited by R. W. Johnson (CRC Press, Boca Raton, 1998).
 - [72] D. C. Samuels, *Phys. Rev. B* **46**, 11714 (1992).
 - [73] E. Varga, S. Babuin, and L. Skrbek, *Phys. Fluids* **27**, 065101 (2015).
 - [74] S. Yui, K. Fujimoto, and M. Tsubota, *Phys. Rev. B* **92**, 224513 (2015).
 - [75] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Second Edition: volume 6, Course of Theoretical Physics, Butterworth-Heinemann, 1987).
 - [76] I. Marusic, B. J. McKeon, P. A. Monkewitz, H. M. Nagib, A. J. Smits, and K. R. Sreenivasan, *Phys. Fluids* **22**, 065103 (2010).
 - [77] N. Hutchins, T. B. Nickels, I. Marusic, and M. S. Chong, *J. Fluid Mech.* **635**, 103 (2009).
 - [78] M. Lee and R. D. Moser, *J. Fluid Mech.* **774**, 395 (2015).