

$bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multipliers について

茨城大 理 中井 英一 (Eiichi Nakai)

茨城大 理 藪田 公三 (Kôzô Yabuta)

§ 1. 緒論.

函数は複素数値とする。函数 $g(x)$ を、他の函数に各点ごとに掛ける作用素、とみるとき pointwise multiplier と呼ぶ。目的は、函数空間 $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multipliers の特徴づけである。

始めに函数空間 $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ を定義する。記号 $I = I(a, r)$ を用いて、点 $a \in \mathbb{R}^n$ を中心にもち、各辺が座標軸に平行で長さが r の n 次元立方体を表わす。 $|E|$ で可測集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ の Lebesgue 測度を表わす。函数 f の I における平均値と平均振動量をそれぞれ $f_I = M(f, I) = |I|^{-1} \int_I f(x) dx$, $MO(f, I) = |I|^{-1} \int_I |f(x) - f_I| dx$ とする。また ϕ を正の実数 $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ から $\mathbb{R}_+$ への単調非減少函数とし、これを growth function と呼ぶことにする。ここで以上の記号

を用いて次のように定義する。

$$\|f\|_{BMO_\phi} = \sup_{I(a,r) \subset \mathbb{R}^n} MO(f, I(a,r)) / \phi(r),$$

$$\|f\|_{bmo_\phi} = \|f\|_{BMO_\phi} + |f_{I(0,1)}|,$$

$$bmo_\phi(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n); \|f\|_{bmo_\phi} < \infty \}.$$

$\|f\|_{BMO_\phi}$ で定義される空間は定数を法として Banach 空間となるが, $\|f\|_{bmo_\phi}$ で定義すると函数のままで Banach 空間になる。pointwise multipliers を考える場合には, $\|f\|_{bmo_\phi}$ が適する。また, growth functions ϕ_1 と ϕ_2 が同値ならば, すなわちある定数 $C > 0$ が存在して $C^{-1}\phi_1(r) \leq \phi_2(r) \leq C\phi_1(r)$ となるならば, $bmo_{\phi_1}(\mathbb{R}^n) = bmo_{\phi_2}(\mathbb{R}^n)$ となる。

正值函数 $h(r)$ が almost decreasing であるとは, ある定数 $A > 0$ が存在して $h(r) \leq Ah(s)$, $r \geq s$ を満たすことをいう。Janson[2] は, n 次元トーラス $\mathbb{T}^n$ の場合に次の結果を得ている。

定理 J. $\phi(r)/r$ が almost decreasing ならば, g が $bmo_\phi(\mathbb{T}^n)$ 上の pointwise multiplier であるための必要十分条件は $g \in bmo_\psi(\mathbb{T}^n) \cap L^\infty(\mathbb{T}^n)$ である。ただし

$$\psi(r) = \phi(r) / \int_r^1 \phi(t) t^{-1} dt.$$

これを $\mathbb{R}^n$ 上に拡張するために、あらたに次のような函数空間を導入する。

$$w: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$\|f\|_{BMO_w} = \sup_{I(a,r) \subset \mathbb{R}^n} MO(f, I(a,r)) / w(a,r),$$

$$\|f\|_{bmo_w} = \|f\|_{BMO_w} + |f_{I(0,1)}|,$$

$$bmo_w(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n); \|f\|_{bmo_w} < \infty \}.$$

この函数空間を用いて次の結果を得た。

定理 1. $\phi(r)/r$ が almost decreasing ならば, g が $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multiplier であるための必要十分条件は $g \in bmo_{w_\phi}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ である。ただし

$$w_\phi(x,r) = \phi(r) / \left(\left| \int_r^1 \phi(t) t^{-1} dt \right| + \int_1^{2+|x|} \phi(t) t^{-1} dt \right).$$

$\mathbb{I}^n$ のように有界な場所で定義される空間 bmo_ϕ は, $r=0$ の近傍での ϕ の挙動で決定される。しかし $\mathbb{R}^n$ のように有界でない場合には, ϕ の ∞ での挙動にも左右される。そのため pointwise multiplier であるための条件も, $|x|$ が大なるときは $w_\phi(x,r)$ という形で影響を受ける。

部分空間 $bmo_{\phi}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ については, 次の結果が得られる。

定理 2. (1) $1 \leq p < \infty$ とする。 $\phi(r)/r$ が almost decreasing ならば, g が $bmo_{\phi}(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ から $bmo_{\phi}(\mathbb{R}^n)$ への pointwise multiplier であるための必要十分条件は $g \in bmo_{\psi}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ である。ただし

$$\psi(r) = \phi(r) / \int_{\min(1,r)}^2 \phi(t) t^{-1} dt.$$

(2) $\phi(r)/r$ が almost decreasing ならば, g が $bmo_{\phi}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ から $bmo_{\phi}(\mathbb{R}^n)$ への pointwise multiplier であるための必要十分条件は $g \in bmo_{\phi}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ である。

証明は, §2 の準備と §3 の補題を用いて §4 で行う。

尚, $\phi(r)/r$ が almost decreasing ならば, ϕ と同値な growth function で concave なものが存在する。

§2. 準備.

growth function ϕ は, 以後 $\phi(r)/r$ が almost decreasing

であるものとする。 ϕ に対して

$$\Phi^*(r) = \begin{cases} \int_1^r \phi(t) t^{-1} dt & 2 \leq r \\ \int_1^2 \phi(t) t^{-1} dt & 0 < r < 2, \end{cases}$$

$$\Phi_*(r) = \begin{cases} \int_r^2 \phi(t) t^{-1} dt & 0 < r < 1 \\ \int_1^2 \phi(t) t^{-1} dt & 1 \leq r \end{cases}$$

とおくと,

$$C^{-1} W_\phi(x, r) \leq \frac{\phi(r)}{\Phi_*(r) + \Phi^*(r) + \Phi^*(|x|)} \leq C W_\phi(x, r).$$

また次のことが知られている (Spanne [4] 等)。

補題 2.1. $\Phi^*(|x|), \Phi_*(|x|) \in \text{bmo}_\phi(\mathbb{R}^n)$.

補題 2.2. $|F(x) - F(y)| \leq C|x - y|$ ならば

$$M_0(F(f), I) \leq 2C M_0(f, I).$$

補題 2.3. $\rho(f, r) = \sup_{a \in \mathbb{R}^n, t \leq r} M_0(f, I(a, t))$ と書く。 $I(a', r') \subset I(a, r)$ ならば,

$$|M(f, I(a', r')) - M(f, I(a, r))| \leq C \int_{r'}^{2r} \rho(f, t) t^{-1} dt.$$

§ 3. 補題.

定理の証明のための補題を述べる。

補題 3.1. ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $f \in \text{bmo}_\phi(\mathbb{R}^n)$ と任意の $I(a, r) \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$|M(f, I(a, r))| \leq C \|f\|_{\text{bmo}_\phi} (\Phi_*(r) + \Phi^*(r) + \Phi^*(|a|)).$$

証明. $r \geq 1, |a| \geq r$ の場合. $I(a, r), I(0, 1) \subset I(0, r+2|a|)$ であるから補題 2.3 により

$$\begin{aligned} & |M(f, I(a, r)) - M(f, I(0, 1))| \\ & \leq |M(f, I(a, r)) - M(f, I(0, r+2|a|))| + |M(f, I(0, 1)) - M(f, I(0, r+2|a|))| \\ & \leq C \int_r^{2(r+2|a|)} \rho(f, t) t^{-1} dt + C \int_1^{2(r+2|a|)} \rho(f, t) t^{-1} dt \\ & \leq 2C \int_1^{6|a|} \rho(f, t) t^{-1} dt \leq 2C \|f\|_{\text{BMO}_\phi} \int_1^{6|a|} \phi(t) t^{-1} dt \\ & = 2C \|f\|_{\text{BMO}_\phi} \Phi^*(6|a|) \leq C' \|f\|_{\text{BMO}_\phi} \Phi^*(|a|). \end{aligned}$$

同様にして, $1 \leq r, |a| \leq r$ の場合は,

$$|M(f, I(a, r)) - M(f, I(0, 1))| \leq C \|f\|_{\text{BMO}_\phi} \Phi^*(r).$$

$r \leq 1, 1 \leq |a|$ の場合は,

$$|M(f, I(a, r)) - M(f, I(0, 1))| \leq C \|f\|_{BMO_\phi} (\Phi_*(r) + \Phi^*(|a|)).$$

$r \leq 1, |a| \leq 1$ の場合は,

$$|M(f, I(a, r)) - M(f, I(0, 1))| \leq C \|f\|_{BMO_\phi} \Phi_*(r).$$

以上あわせて

$$\begin{aligned} |M(f, I(a, r))| &\leq |M(f, I(0, 1))| + C \|f\|_{BMO_\phi} (\Phi_*(r) + \Phi^*(r) + \Phi^*(|a|)) \\ &\leq C' \|f\|_{bmo_\phi} (\Phi_*(r) + \Phi^*(r) + \Phi^*(|a|)). \quad \square \end{aligned}$$

注意 3.1. 補題 3.1 の評価式は sharp である。実際 $\Phi^*(|x|) \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ を考えると,

$$M(\Phi^*(|x|), I(a, r)) \geq C \Phi^*(r), \quad C \Phi^*(|a|).$$

また $\Phi_*(|x-a|)$ を考えると, $\|\Phi_*(|x-a|)\|_{bmo_\phi} \leq C_0$ (a によらない) であり, かつ

$$M(\Phi_*(|x-a|), I(a, r)) \geq C \Phi_*(r).$$

補題 3.2. $1 \leq p < \infty$ とする。ある定数 $C > 0$ が存在して任意の $f \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ と任意の $I(a, r) \subset \mathbb{R}^n$ に対して

$$|M(f, I(a, r))| \leq C (\|f\|_{BMO_\phi} + \|f\|_{L^p}) \Phi_*(r).$$

証明. $1 \leq r$ の場合, Hölder の不等式により

$$\begin{aligned} |M(f, I(a, r))| &\leq (|I|^{-1} \int_I |f(x)|^p dx)^{1/p} \leq \|f\|_{L^p} \\ &\leq C \Phi_*(r) \|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

$0 < r < 1$ の場合, $I(a, r) \subset I(a, 1)$ であるから, 補題 2.3 より

$$\begin{aligned} |M(f, I(a, r))| &\leq |M(f, I(a, r)) - M(f, I(a, 1))| + |M(f, I(a, 1))| \\ &\leq C \int_r^1 P(f, t) t^{-1} dt + |M(f, I(a, 1))| \leq C \Phi_*(r) \|f\|_{BMO_\phi} + \|f\|_{L^p} \\ &\leq C' (\|f\|_{BMO_\phi} + \|f\|_{L^p}) \Phi_*(r). \quad \square \end{aligned}$$

注意 3.2. $f(x) = \Phi_*(|x-a|) - \Phi_*(1)$ とおくと, $\|f\|_{L^p} \leq C_p$,
 $\|f\|_{BMO_\phi} \leq C_0$ (a によらない), かつ

$$M(f, I(a, r)) \geq C \Phi_*(r), \quad r \leq 1.$$

補題 3.3. $f \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする. $fg \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ であるための必要十分条件は,

$$F(f, g) = \sup_{I(a, r)} |M(f, I(a, r))| M_0(g, I(a, r)) / \phi(r) < \infty$$

である。またこのとき,

$$F(f, g) \leq \|fg\|_{BMO_\phi} + 2 \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{BMO_\phi}.$$

証明. 任意の $I = I(a, r)$ に対して

$$|M_0(fg, I) - |f_I| M_0(g, I)| \leq 2 \|g\|_{L^\infty} M_0(f, I)$$

が成り立つ (Stegenga [5, p582]). したがって

$$\left| \frac{M_0(fg, I)}{\phi(r)} - \frac{|f_I| M_0(g, I)}{\phi(r)} \right| \leq 2 \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{BMO_\phi}.$$

$bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ の定義から, 補題の主張が成立する。 $\square$

補題 3.4. $1 \leq p \leq \infty$ とする。 g が $bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ から $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ への pointwise multiplier ならば, $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ である。

証明. はじめに, $bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ は $\|f\|_{BMO_\phi} + \|f\|_{L^p}$ をノルムとして Banach 空間になる。 $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ は $\|f\|_{bmo_\phi}$ をノルムとして Banach 空間であるから, 閉グラフ定理により

$$\|gf\|_{bmo_\phi} \leq C(\|f\|_{BMO_\phi} + \|f\|_{L^p}),$$

$$f \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n).$$

次に $r < 1$ であるような $I(a, r)$ に対して, 函数 $h \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ を次のように定義する。

$$h(x) = \begin{cases} 0 & r \leq |x-a| \\ \exp(i\Phi_*(|x-a|)) - \exp(i\Phi_*(r)) & |x-a| < r. \end{cases}$$

補題 2.2 により, $\|h\|_{bmo_\phi} \leq C_0 \|\Phi_*(|x|)\|_{bmo_\phi}$. また $|h(x)| \leq 2$, $\text{supp } h \subset I(a, 2)$ により, $\|h\|_{L^p} \leq C_p$. よって $\|gh\|_{bmo_\phi} \leq C(\|h\|_{bmo_\phi} + \|h\|_{L^p}) \leq C_1$ (I によらない). したがって

$$(3.1) \quad MO(gh, I(a, 4r)) \leq C_1 \phi(4r).$$

C_2, C_3 を次のような定数とする: $\log C_2 = \pi/\phi(1)$, $1 < C_2 C_3 < C_2$. また $L_r = \{x; r/C_2 \leq |x-a| \leq r/C_2 C_3\}$ とおく。もし $x \in L_r$ ならば, $\phi(r)/r$ が almost decreasing であることを使って,

$$\begin{aligned} \frac{\phi(r)}{AC_2 C_3} \log C_2 C_3 &\leq \phi\left(\frac{r}{C_2 C_3}\right) \log C_2 C_3 \leq \int_{r/C_2 C_3}^r \phi(t) t^{-1} dt \\ &\leq \Phi_*(|x-a|) - \Phi_*(r) \leq \int_{r/C_2}^r \phi(t) t^{-1} dt \leq \phi(1) \log C_2 = \pi. \end{aligned}$$

不等式 $|e^{i\theta} - 1| \geq 2\theta/\pi$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) により, $x \in L_r$ ならば $|h(x)| \geq C_4 \phi(r)$. $\sigma = M(gh, I(a, 4r))$ とすれば

$$\begin{aligned}
MO(g_h, I(a, 4r)) |I(a, 4r)| &= \int_{I(a, 4r)} |g_h(x) - \sigma| dx \\
&\geq \int_{L_r} |g_h(x) - \sigma| dx + \int_{I(a, 4r) \setminus I(a, 2r)} |\sigma| dx \\
&\geq \int_{L_r} (|g_h(x) - \sigma| + |\sigma|) dx \geq \int_{L_r} |g_h(x)| dx \\
&\geq C_4 \phi(r) \int_{L_r} |g(x)| dx.
\end{aligned}$$

したがって (3.1) とあわせて

$$\begin{aligned}
|L_r|^{-1} \int_{L_r} |g(x)| dx &\leq C_1 \phi(4r) |I(a, 4r)| / C_4 \phi(r) |L_r| \\
&\leq C_5.
\end{aligned}$$

ここで $r \downarrow 0$ とすることにより

$$|g(a)| \leq C_5 \quad \text{a.e.}$$

□

§ 4. 定理の証明.

定理 1 の証明. g が $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multiplier であるとする。補題 3.4 により $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 。補題 3.3 と閉グラフ定理により

$$\sup_{I(a, r)} \frac{|f_I| MO(g, I)}{\phi(r)} \leq C \|f\|_{bmo_\phi}, \quad f \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n).$$

$f(x)$ として $\Phi^*(|x|)$ または $\Phi_*(|x-a|)$ をとると, 注意 3.1 により,

$$\sup_{I(a,r)} (\Phi_*(r) + \Phi^*(r) + \Phi^*(|a|)) MO(g, I) / \phi(r) < \infty$$

すなわち

$$\sup_{I(a,r)} MO(g, I(a,r)) / w_\phi(a,r) < \infty.$$

逆に $g \in bmo_{w_\phi}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする。補題 3.1 により,

$$\frac{|f_I| MO(g, I)}{\phi(r)} \leq C \|f\|_{bmo_\phi} (\Phi_*(r) + \Phi^*(r) + \Phi^*(|a|)) MO(g, I) / \phi(r)$$

$$\leq C' \|g\|_{BMO_{w_\phi}} \|f\|_{bmo_\phi}, \quad f \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n), I = I(a,r) \subset \mathbb{R}^n.$$

したがって補題 3.3 により $fg \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$. □

定理 2 の証明. (1) g が $bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ から $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ への pointwise multiplier であるとする。補題 3.4 により $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
補題 3.3 と閉グラフ定理により

$$\sup_{I(a,r)} \frac{|f_I| MO(g, I)}{\phi(r)} \leq C (\|f\|_{BMO_\phi} + \|f\|_{L^p}).$$

$f(x)$ として $\Phi_*(|x-a|) - \Phi_*(1)$ をとると, 注意 3.2 により,

$$\sup_{I(a,r), r \leq 1} \Phi_*(r) MO(g, I) / \phi(r) < \infty.$$

また $r \geq 1$ のときは $\phi(r) \geq \phi(1)$ かつ $\Phi_*(r)$ は定数であり, $MO(g, I) \leq 2\|g\|_\infty$ であるから

$$\sup_{I(a,r), r \geq 1} \Phi_*(r) MO(g, I) / \phi(r) < \infty.$$

よって $g \in bmo_\psi(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ である。

逆は, 補題 3.1 の代わりに補題 3.2 を用いて定理 1 と同様に導くことが出来る。

(2) g が $bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ から $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ への pointwise multiplier であるとする。補題 3.4 により $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 。また $f(x) \equiv 1 \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ であるから $fg = g \in bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 。

逆は, 補題 3.1 の代わりに不等式 $|f_I| \leq \|f\|_\infty$ を用いて定理 1 と同様に導くことができる。 $\square$

尚, 定理 1 において, $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multiplier g の作用素ノルムは $\|g\|_{BMO_{w_\phi}} + \|g\|_\infty$ と同値であることが開写像定理により示される。定理 2 においても同様である。すなわち (1) では作用素ノルムは $\|g\|_{BMO_\psi} + \|g\|_\infty$ と, (2) では作用素ノルムは $\|g\|_{BMO_\phi} + \|g\|_\infty$ とそれぞれ同値である。

§ 5. 十分条件および例.

定理にひきつづいて, pointwise multiplier であるための十分条件を述べ, この条件を使って例をあげる.

命題 5.1. g が次の条件をみたすものとする:

(5.1) ある定数 $M_1 > 0$ が存在して任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|y| \leq 1$ に対して

$$|g(x+y) - g(x)| \leq M_1 \frac{\phi(|y|)}{\Phi_+(|y|) + (1 - \operatorname{sgn} \phi(0+)) \Phi^*(|x|)}.$$

(5.2) ある定数 $M_2 > 0$ と $B \in \mathbb{C}$ が存在して任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$|g(x) - B| \leq M_2 \frac{1}{\Phi^*(|x|)}.$$

このとき g は $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multiplier である. $\square$

系 5.2. $g = g_1 / g_2$ が次の条件をみたすものとする:

(5.3) g_1 は有界かつリプシッツ連続.

(5.4) g_2 はリプシッツ連続かつある定数 $C > 0$ が存在して

$$|g_2(x)| \geq C \Phi^*(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

このとき g は $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multiplier である。 $\square$

命題 5.3. 有界関数 g が次の条件をみたすものとする。

(5.5) ある定数 $C > 0$ が存在して

$$|g(x+y) - g(x)| \leq C \frac{\phi(|y|)}{\Phi_*(|y|)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, |y| \leq 1.$$

このとき g は $bmo_\phi(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < \infty$) から $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ への pointwise multiplier である。 $\square$

これらの命題は, 定理 1 および 2 を用いて示される。

例. 系 5.2 により

$$\frac{1}{\Phi^*(|x|)}, \frac{\sin |x|}{\Phi^*(|x|)}, \frac{1}{1+|x|}, \frac{\sin \Phi^*(|x|)}{1+|x|}$$

等は $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multiplier である。もし $\phi(0+) > 0$ ならば, $\sin |x|^2 / (1+|x|)$ も同様である。また $\phi(r)/(r\Phi_*(r))$ が almost decreasing ならば

$$\Psi_*(r) = \int_{\min(r,1)}^2 \phi(t)/(t\Phi_*(t)) dt$$

とおくと, $\sin \Psi_*(|x|)/\Phi^*(|x|)$ は $bmo_\phi(\mathbb{R}^n)$ 上の pointwise multiplier である。

References

1. R.R. Coifman and Y. Meyer, Fourier analysis of multilinear convolutions, Calderón's theorem, and analysis on Lipschitz curves, Lecture Notes in Math. No. 779 (1980), 109-122, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
2. S. Janson, On functions with conditions on the mean oscillation, Ark. Mat. 14 (1976), 189-196.
3. R. Johnson, Behaviour of BMO under certain functional operations, preprint.
4. S. Spanne, Some function spaces defined using the mean oscillation over cuves, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 19 (1965), 593-608.
5. D.A. Stegenga, Bounded Toeplitz operators on H^1 and applications of the duality between H^1 and the functions of bounded mean oscillation, Amer. J. Math. 98 (1976), 573-589.