

代数体における行列の分割関数について

学習院大学理 三井孝美 (Takayoshi Mitsui)

行列の分割関数については、これまで、有理整数または $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ の元を要素とする行列を考えてきた。これはそれぞれ体 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$ の整数を要素とする行列であり、したがって、代数体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ の元を要素とする行列へさらに問題を拡張することは自然である。この一般の場合、実共役、複素共役があるから、実対称行列、Hermite 行列を同時に考えなければならず、複雑化を免れないが、考えるべき問題の対象を順次に定義していくことから始める。

§1 分割関数と生成関数

行列は特に断らない限り m 次の正方行列とする。転置行列は A' で表わす。まず次のような行列の集合を定義する：

$$\mathcal{S} = \{ S \mid \text{実対称行列} (S = S') \} \subset M(m, \mathbb{R}),$$

$$\mathcal{H} = \{ H \mid \text{Hermite 行列} (H = \overline{H}') \} \subset M(m, \mathbb{C}).$$

これらは $\mathbb{R}^{m(m+1)/2}$, $\mathbb{R}^m \times \mathbb{C}^{m(m-1)/2} (\cong \mathbb{R}^{m^2})$ と同相であ

3. さらに

$$\mathcal{P} = \{ S \mid S > 0 \text{ (正値定符号行列)} \} \subset \mathcal{S},$$

$$\mathcal{P}_H = \{ H \mid H > 0 \text{ (正値 Hermite 行列)} \} \subset \mathcal{H}$$

を考える。

次に、代数体 K は $\mathbb{Q}$ 上 n 次とし、 $K^{(1)}, \dots, K^{(r_1)}$ を K の実共役、 $K^{(r_1+1)}, \dots, K^{(r_1+r_2)}, K^{(r_1+r_2+1)} = \overline{K^{(r_1+1)}}, \dots, K^{(r_1+2r_2)} = \overline{K^{(r_1+r_2)}}$ を複素共役の組とする。したがって $n = r_1 + 2r_2$ である。 K の整数環を $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ 、その共役を $\mathcal{O}^{(1)}, \dots, \mathcal{O}^{(n)}$ で表わす。 K に含まれる最大の総実代数体を K_0 とし、 K_0 の整数環を $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_{K_0}$ 、その共役を $\mathcal{O}_0^{(1)}, \dots, \mathcal{O}_0^{(m)}$ とする。

K の行列 $M^{(1)} = (m_{ik})_{i,k}$ を次のような要素による行列とする：

$$(1) \quad \begin{cases} m_{ii} \in \mathcal{O}_0 & (i = 1, \dots, m), \\ m_{ik} \in \mathcal{O} & (1 \leq i < k \leq m), \\ m_{ki} = \begin{cases} m_{ik} & (K \text{ が実のとき}), \\ \overline{m_{ik}} & (K \text{ が実でないとき}) \end{cases} & (1 \leq i < k \leq m) \end{cases}$$

この $M^{(1)}$ の共役 $M^{(q)}$ を次のように定義する：

$$M^{(q)} = (m_{ik}^{(q)})_{i,k} \quad (q = 1, \dots, r_1),$$

$$M^{(p)} = \begin{pmatrix} \mu_{11}^{(p)} & \mu_{12}^{(p)} & \cdots & \mu_{1m}^{(p)} \\ \overline{\mu_{12}^{(p)}} & \mu_{22}^{(p)} & \cdots & \mu_{2m}^{(p)} \\ & \cdots & & \\ \overline{\mu_{1m}^{(p)}} & \overline{\mu_{2m}^{(p)}} & \cdots & \mu_{mm}^{(p)} \end{pmatrix} \quad (p = r_1+1, \dots, r_1+r_2).$$

したがって

$$M^{(p+r_2)} = \overline{M^{(p)}} \quad (p = r_1+1, \dots, r_1+r_2)$$

となつてゐる。これらの $M^{(i)}$ の組を

$$M = (M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(r_1+r_2)})$$

と書くことにして、集合

$$\mathcal{M} = \left\{ M \mid \begin{array}{ll} M^{(q)} \in \mathcal{P} & (q=1, \dots, r_1), \\ M^{(p)} \in \mathcal{P}_H & (p=r_1+1, \dots, r_1+r_2) \end{array} \right\}$$

を定義する。分割問題の対象となるものはこの $\mathcal{M}$ の元である。

なお、先の $\mathcal{S}$, $\mathcal{H}$ 等の積空間

$$\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}^{r_1} \times \mathcal{H}^{r_2}, \quad \tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^{r_1} \times \mathcal{P}_H^{r_2}$$

を考えれば、 $M \in \tilde{\mathcal{P}}$ である。 $\tilde{\mathcal{S}}$ は

$$\tilde{\mathcal{S}} \cong (\mathbb{R}^{m(m+1)/2})^{r_1} \times (\mathbb{R}^m \times \mathbb{C}^{m(m-1)/2})^{r_2}$$

であり、この次元は

$$\dim \tilde{\mathcal{S}} = r_1 m(m+1)/2 + r_2 m^2.$$

この右辺の値を R で表わすことにする。

もう少し一般に

$$M(m, \mathbb{R})^{r_1} \times M(m, \mathbb{C})^{r_2}$$

の元 $A = (A_1, \dots, A_{r_1+r_2})$ に対して

$$\tilde{\sigma}(A) = \sum_{v=1}^{r_1+r_2} \sigma(A_v)$$

とする。右辺の $\sigma(A_v)$ は A_v の trace である。また、

$$\bar{u} = \bar{u}(A) = \max_v \{ A_v \text{ の固有値 } \},$$

$$\underline{u} = \underline{u}(A) = \min_v \{ A_v \text{ の固有値 } \}$$

と記す。ここで

lemma 1 N を自然数とするとき

$$\tilde{\sigma}(M) = N, \quad M \in \mathcal{M}$$

となるような M の個数は $O(N^{R-1})$ である。」

lemma 2 $X, Y \in \tilde{\mathcal{P}}$ に対し

$$\bar{u}(X) \tilde{\sigma}(Y) \geq \tilde{\sigma}(XY) \geq \underline{u}(X) \tilde{\sigma}(Y). \quad \square$$

この lemma 1 と 4 級数

$$\sum_{M \in \mathcal{M}} e^{-\tilde{\sigma}(XM)} \quad (X \in \tilde{\mathcal{P}})$$

が収束することがわかる。したがって無限積

$$f(X) = \prod_{M \in \mathcal{M}} (1 - e^{-\tilde{\sigma}(XM)})^{-1} \quad (X \in \tilde{\mathcal{P}})$$

も収束する。 $f(X)$ は

$$(2) \quad f(X) = 1 + \sum_{M \in \mathcal{M}} P(M) e^{-\tilde{\sigma}(XM)}$$

の形に展開される。この係数 $P(M)$ は

$$M = M_1 + \cdots + M_s, \quad M_j \in \mathcal{M} \quad (j=1, \dots, s)$$

となるような M の表わし方の個数であり, M の 分割関数 といわれる. $f(X)$ がその 生成関数 である.

§2 格子と積分表示

(1) にしたがって得られるすべての M の集合

$$\tilde{\mathcal{M}} = \{ M \mid M = (M^{(1)}, \dots, M^{(r_1+r_2)}) \}$$

は, $\tilde{\mathcal{S}}$ の中で格子を作る. その基本格子を求めよう.

Θ, Θ_0 の基底を

$$\Theta = \langle \omega_1, \dots, \omega_m \rangle, \quad \Theta_0 = \langle \omega_1^0, \dots, \omega_{r_1+r_2}^0 \rangle$$

とし, 行列要素 E_{ik} (i - k 要素が 1 で他は 0 である行列) に
よって

$$T_{i,j} = (\omega_j^{(1)} E_{ii}, \dots, \omega_j^{(r_1+r_2)} E_{ii})$$

$$(\quad i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, r_1+r_2),$$

$$T_{ik,j} = (\omega_j^{(1)} E_{ik}, \dots, \omega_j^{(r_1)} E_{ik}, \omega_j^{(r_1+1)} E_{ik}, \dots, \omega_j^{(r_1+r_2)} E_{ik})$$

$$+ (\omega_j^{(1)} E_{ki}, \dots, \omega_j^{(r_1)} E_{ki}, \omega_j^{(r_1+1)} E_{ki}, \dots, \omega_j^{(r_1+r_2)} E_{ki})$$

$$(\quad 1 \leq i < k \leq m; \quad j=1, \dots, n)$$

を定義すると $T_{i,j}, T_{ik,j}$ はすべて $\tilde{\mathcal{M}}$ の元であり, これらの
個数は $m(r_1+r_2) + nm(m-1)/2 = R$. さらに, $\tilde{\mathcal{M}}$ の元は
 $\{T_{i,j}, T_{ik,j}\}$ の $\mathbb{Z}$ 係数の 1 次結合として表わされる. したがって
 $\{T_{i,j}, T_{ik,j}\}$ が $\tilde{\mathcal{M}}$ の格子としての基底を与えることになる.

しかし、さらに $\mathcal{M}$ を考えるために、この基底自身を $\mathcal{M}$ の中からとる。そのような基底が存在することは、 $\mathcal{M}$ を含む $\mathcal{P}$ が、 $\mathcal{S}$ の中でいわゆる cone になっていることと $\hat{\mathcal{P}}$ が $\mathcal{S}$ と同じ次元をもつことからわかる。

以後は、 $\mathcal{M}$ の中からとった $\tilde{\mathcal{M}}$ の基底を $\{T_v; v=1, \dots, R\}$ と記すことにする。 $\gamma \in \mathcal{S}$ は

$$(3) \quad \gamma = \sum_{v=1}^R u_v T_v$$

と一意的に表わされ、特に $M \in \tilde{\mathcal{M}}$ は

$$M = \sum_{v=1}^R m_v T_v \quad (m_v \in \mathbb{Z}; v=1, \dots, R)$$

となる。

次に積分を考察する。 $X \in \hat{\mathcal{P}}$ とし、 $\hat{\mathcal{P}}$ 上の積分

$$\int_{\hat{\mathcal{P}}} e^{-\tilde{\sigma}(X\gamma)} d\gamma$$

を考える。ここで $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{r_1+r_2})$, $\gamma_j = (y_{ik}^{(j)})_{i,k}$ ($j=1, \dots, r_1+r_2$) とし $d\gamma = d\gamma_1 \dots d\gamma_{r_1+r_2}$ であり

$$d\gamma_q = \prod_{1 \leq i \leq k \leq m} dy_{ik}^{(q)} \quad (q=1, \dots, r_1),$$

$$d\gamma_p = \prod_{i=1}^m dy_{ii}^{(p)} \prod_{i < k} dy'_{ik}^{(p)} \prod_{i < k} dy''_{ik}^{(p)} \quad (p=r_1+1, \dots, r_1+r_2)$$

(y'_{ik}, y''_{ik} は y_{ik} の実数部、虚数部である。) これは Siegel の積分の一般化であって、その値は

$$(4) \int_{\tilde{\mathcal{P}}} e^{-\tilde{\sigma}(XY)} dY = \left\{ \pi^{m(m-1)/4} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{2}{2}\right) \right\}^{r_1} \\ \times \left\{ \pi^{m(m-1)/2} \Gamma(m) \cdots \Gamma(1) \right\}^{r_2} \prod_{g=1}^{r_1} |X_g|^{-\frac{m+1}{2}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} |X_p|^{-m}.$$

この右辺の定数と X に関係する部分を

$$B_0 = \left\{ \pi^{m(m-1)/4} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{2}{2}\right) \right\}^{r_1} \left\{ \pi^{m(m-1)/2} \Gamma(m) \cdots \Gamma(1) \right\}^{r_2},$$

$$N^*(X) = \prod_{g=1}^{r_1} |X_g|^{\frac{m+1}{2}} \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} |X_p|^m$$

と記す。

もう一つ、 $f(X)$ などを経験するための手段となる積分を考える： $\tilde{\mathcal{M}} \ni T$ に対し集合

$$D(T) = \left\{ Y \mid Y = T + \sum_{v=1}^R u_v T_v, \quad 0 \leq u_v < 1 \quad (\forall v) \right\}$$

は、 $\tilde{\mathcal{M}}$ の基本格子に合同で、 T に付随する $\mathbb{R}^R$ の中の平行面体である。(4) などの積分の変数を (3) によって $\{u_v\}_v$ に変換すれば、その Jacobian は

$$2^{-r_2 m(m-1)/2} \left| \det(\omega_i^{0j'})_{i,j} \right|^m \left| \det(\omega_i^{ij'})_{i,j} \right|^{m(m-1)/2},$$

ある n は, K_0, K の判別式を D_0, D とするとき

$$2^{-1/2} m(m-1)/2 |D_0|^{m/2} |D|^{m(m-1)/4}$$

に等しい。この値を $\tilde{D}$ と記せば, $D(T)$ 上の次のような積分

$$(5) \quad \int_{D(T)} e^{-\tilde{\sigma}(XY)} dY \quad (X \in \tilde{\mathcal{P}})$$

は直ちに計算できて,

$$\begin{aligned} & \tilde{D} e^{-\tilde{\sigma}(XT)} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \exp \left\{ - \sum_{v=1}^R u_v \tilde{\sigma}(XT_v) \right\} du_1 \cdots du_R \\ &= \tilde{D} e^{-\tilde{\sigma}(XT)} \prod_{v=1}^R \frac{1 - e^{-\tilde{\sigma}(XT_v)}}{\tilde{\sigma}(XT_v)}. \end{aligned}$$

2.2.2 $T_v \in \tilde{\mathcal{P}}$ だから $\tilde{\sigma}(XT_v) > 0$ ($v=1, \dots, R$) であることに注意する。最後の積と $\tilde{D}$ をまとめて

$$i(X) = \prod_{v=1}^R \frac{1 - e^{-\tilde{\sigma}(XT_v)}}{\tilde{\sigma}(XT_v)} \cdot \tilde{D}$$

と記して、次の lemma が証明される:

lemma 3 級数

$$f(X) = \sum_{M \in \mathcal{M}} a(M) e^{-\tilde{\sigma}(XM)} \quad (X \in \tilde{\mathcal{P}})$$

が収束するとき

$$a(Y) = \begin{cases} a(T) & Y \in D(T), T \in \mathcal{M} \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

とあると

$$g(X) = i(X)^{-1} \int_{\tilde{\mathcal{P}}} a(Y) e^{-\tilde{\sigma}(XY)} dY$$

この応用として、まず

$$G(X) = \sum_{M \in \mathcal{M}} e^{-\tilde{\sigma}(XM)} \quad (X \in \tilde{\mathcal{P}})$$

に対して

$$G(X) = i(X)^{-1} \int_{\tilde{\mathcal{P}}} a_0(Y) e^{-\tilde{\sigma}(XY)} dY.$$

と置く

$$a_0(Y) = \begin{cases} 1 & Y \in D(T), T \in \mathcal{M} \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他のとき.} \end{cases}$$

さらに

$$F(X) = i(X)(f(X) - 1)$$

に対して

$$(6) \quad F(X) = \int_{\tilde{\mathcal{P}}} P(Y) e^{-\tilde{\sigma}(XY)} dY$$

を得る。と置く

$$P(Y) = \begin{cases} P(T) & Y \in D(T), T \in \mathcal{M} \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

とする。

一方で

$$\log f(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} G(kX)$$

の関係が成り立つ。これと (4), (5) などから

lemma 4

$$B_0 N^*(X)^{-1} \geq i(X) G(X) \geq B_0 N^*(X) e^{-\tilde{\sigma}(XT_0)}$$

$$(T_0 = \sum_{v=1}^R T_v). \quad \square$$

lemma 5 $\underline{u}(X), \bar{u}(X)$ は十分小さくかつ同じ order

μ をもつとすると

$$\log f(X) = \tilde{D}^{-1} B_0 \zeta(1+R) N^*(X)^{-1} (1 + O(u^{\nu/2}))$$

($\zeta(s)$ は Riemann の ζ 関数)。同じ条件の下で

$$\log F(X) = \tilde{D}^{-1} B_0 \zeta(1+R) N^*(X)^{-1} (1 + O(u^{\nu/2})). \quad \square$$

この $\log F(X)$ の漸近式と $F(X)$ の積分表示 (6) から $\log P(Z)$ を求めるのであるが、そのために次の仮定をおく:

Z の固有値 ($Z = (z_1, \dots, z_{r_1+r_2})$ の各 z_i の固有値) はすべて同じ order μ をもち、 μ は十分大きい。

このとき X を Z に対して適当にとり X が lemma 5 の条件をみたすようにし、一方で (6) の積分を

$$(7) \quad \int_{\tilde{\mu}} = \int_{Z \text{ の近傍 } \mu} + \int_{\tilde{\mu} - \mu}$$

とわけて、それぞれを評価するのである。

§3 Xの決定

一般に $X \in \hat{\mathcal{P}}$ に対して

$$(8) \quad \varphi(X) = \tilde{D}^{-1} B_0 \zeta(1+R) N^*(X)^{-1} = \tilde{D}^{-1} \zeta(1+R) \int_{\hat{\mathcal{P}}} e^{-\tilde{\sigma}(XY)} dY$$

とおく。

$$d_{ik}^{(j)} = \begin{cases} 1 & j=1, \dots, r_1; 1 \leq i \neq k \leq m \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

とし、 $X_j = (\xi_{ik}^{(j)})$ の元を変数として $\varphi(X)$ の微分

$$(9) \quad \begin{cases} \xi_{ik}^{(g)} = -\frac{1}{d_{ik}^{(g)}} \frac{\partial \varphi(X)}{\partial \xi_{ik}^{(g)}} & (1 \leq i, k \leq m; g=1, \dots, r_1), \\ \xi_{ik}^{(p)} = -\frac{1}{d_{ik}^{(p)}} \frac{\partial \varphi(X)}{\partial \xi_{ik}^{(p)}} & (1 \leq i, k \leq m; p=r_1+1, \dots, r_1+r_2) \end{cases}$$

による行列

$$Z_j = (\xi_{ik}^{(j)})_{i,k} \quad (j=1, \dots, r_1+r_2)$$

を作ると、 X が逆に Z で表わされ

$$X_g = C_0^{\frac{1}{1+R}} \left(\frac{m+1}{2} \right)^{\frac{1+r_2 m^2}{1+R}} m^{-\frac{r_2 m^2}{1+R}} N^*(Z)^{\frac{1}{1+R}} Z_g^{-1} \quad (g=1, \dots, r_1),$$

$$X_p = C_0^{\frac{1}{1+R}} \left(\frac{m+1}{2} \right)^{-\frac{r_1 v}{1+R}} m^{\frac{1+v r_1}{1+R}} N^*(Z)^{\frac{1}{1+R}} Z_p^{-1} \quad (p=r_1+1, \dots, r_1+r_2)$$

($v = m(m+1)/2$, $C_0 = \tilde{D}^{-1} B_0 \zeta(1+R)$). Z の X を $X = \psi(Z)$

と記す。Zの固有値のorderがすべて t に等しいとき $\psi(Z)$ の固有値のorderはすべて $t^{-\frac{1}{1+R}}$ となり、Xはlemma 5の条件をみたす。

§4 $\log P(Z)$ の漸近式

(2) から直ちに

$$(10) \quad P(M) \leq \exp \{ \tilde{\sigma}(XM) + \log f(X) \}$$

が任意の $X \in \tilde{\mathcal{P}}$, $M \in \mathcal{M}$ に対して成り立つから、特に $M = Z$, $X = \psi(Z)$ として、lemma 5と(8)を考慮して

$$P(Z) \leq \exp \{ \tilde{\sigma}(Z\psi(Z)) + \varphi(\psi(Z))(1+\varepsilon) \}$$

($\varepsilon > 0$ は十分小さい数としてよい。)

$P(Z)$ の下からの評価のためには(7)を利用する。この $\mathcal{U}$ として、 $\delta_0 > 0$ を小さくとり

$$\mathcal{U} = \{ Y \mid \|Y - Z\| < \delta_0 t \}$$

とする。ここで $\|\cdot\|$ は、 $\tilde{\mathcal{S}}$ の元を $\mathbb{R}^R$ の元とみよの距離 $d(Y, Z)$ である。さらに $\mathcal{U}$ を含む

$$\mathcal{V} = \{ Y \mid \delta_1 t E > Y > \delta_2 t E \}$$

を定義する(ここで $A > B$ は $A - B$ の成分が正値定符号であることを意味する)。 δ_1 を小さく、 δ_2 を大きくとれば $\mathcal{V} \supset \mathcal{U}$ となっている。これらにより積分(7)をさらに

$$\int_{\tilde{\mathcal{V}}} = \int_{\mathcal{U}} + \int_{\mathcal{V}-\mathcal{U}} + \int_{\tilde{\mathcal{V}}-\mathcal{V}}$$

とわけるとき、右辺の第1, 第3の積分は比較的容易に評価できる。問題は第2の積分である。(10)から, (6)の被積分関数に対し

$$P(Y) e^{-\tilde{\sigma}(XY)} \leq \exp \left\{ \tilde{\sigma}(Y\psi(Y)) + \log f(\psi(Y)) - \tilde{\sigma}(XY) \right\}$$

であるが、 $Y \in \mathcal{V}-\mathcal{U}$ ならば Y の固有値の order も同じであるから

$$P(Y) e^{-\tilde{\sigma}(XY)} \leq \exp \left\{ \tilde{\sigma}((\psi(Y)-X)Y) + \varphi(\psi(Y))(1+\varepsilon) \right\}.$$

この右辺の中の

$$h(Y) = \varphi(\psi(Y)) + \tilde{\sigma}((\psi(Y)-X)Y)$$

をとり出し、 $Y = Z$ を中心とした $h(Y)$ を考える。まず

$$(11) \quad h(Z) = \varphi(\psi(Z)) = \varphi(X)$$

である。次に

$$\tilde{X} = \psi(Y) = (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_{r_1+r_2}), \quad \tilde{X}_j = (\tilde{x}_{ik}^{(j)})_{i,k} \\ (j=1, \dots, r_1+r_2)$$

とおく

$$h(Y) = \varphi(\tilde{X}) + \sum_{g=1}^{r_1} \sum_{1 \leq i \leq j \leq m} d_{ij}^{(g)} (\tilde{x}_{ij}^{(g)} - x_{ij}^{(g)}) y_{ij}^{(g)} \\ + \sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \sum_{1 \leq i, j \leq m} (\tilde{x}_{ij}^{(p)} - x_{ij}^{(p)}) y_{ji}^{(p)}.$$

これから (9) を考慮して、すべての k, l, s に対し

$$\frac{\partial h}{\partial y_{kl}^{(s)}} = d_{kl}^{(s)} (\tilde{x}_{lk}^{(s)} - x_{lk}^{(s)})$$

が得られ、したがって

$$(12) \quad \frac{\partial h}{\partial y_{kl}^{(s)}}(\bar{z}) = 0.$$

さらに

$$(13) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y_{ij}^{(s)} \partial y_{kl}^{(t)}} = d_{kl}^{(t)} \frac{\partial \tilde{x}_{lk}^{(t)}}{\partial y_{ij}^{(s)}}$$

がすべての $(i, j, s), (k, l, t)$ に対して成り立つから、 R 次の行列

$$g(Y) = \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y_{ij}^{(s)} \partial y_{kl}^{(t)}} \right)_{(i,j,s), (k,l,t)}$$

を定義すると (11), (12) より $h(Y)$ の $Y = \bar{z}$ における Taylor 展開が次の形で得られる:

$$(14) \quad h(Y) = \varphi(X) + \frac{1}{2} g(\bar{z}^*) [Y - \bar{z}].$$

ここで $\bar{z}^* = \bar{z} + \theta(Y - \bar{z})$ ($0 < \theta < 1$) であり、(14) の右辺の第2項は Y を R 次元のベクトルとみこの2次形式である。

ここで $g(Y)$ が実は負値定符号であることが次のようにして

とわかる: (13) を利用して

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & \sum_{k,l,t} \frac{\partial^2 h}{\partial y_{ij}^{(s)} \partial y_{kl}^{(t)}} \frac{1}{d_{kl}^{(t)} d_{\mu\nu}^{(\lambda)}} \frac{\partial^2 \varphi(\tilde{X})}{\partial \tilde{x}_{lk}^{(t)} \partial \tilde{x}_{\mu\nu}^{(\lambda)}} \\
 &= \sum_{k,l,t} d_{kl}^{(t)} \frac{\partial \tilde{x}_{lk}^{(t)}}{\partial y_{ij}^{(s)}} \frac{1}{d_{kl}^{(t)} d_{\mu\nu}^{(\lambda)}} \frac{\partial^2 \varphi(\tilde{X})}{\partial \tilde{x}_{lk}^{(t)} \partial \tilde{x}_{\mu\nu}^{(\lambda)}} \\
 &= \frac{1}{d_{\mu\nu}^{(\lambda)}} \frac{\partial^2 \varphi(\tilde{X})}{\partial y_{ij}^{(s)} \partial \tilde{x}_{\mu\nu}^{(\lambda)}} \\
 &= - \frac{\partial y_{\mu\nu}^{(\lambda)}}{\partial y_{ij}^{(s)}} = \begin{cases} -1 & (i,j,s) = (\mu,\nu,\lambda) \text{ のとき,} \\ 0 & (i,j,s) \neq (\mu,\nu,\lambda) \text{ のとき.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

したがって次のように行列

$$\mathcal{K}(\tilde{X}) = \left(\frac{1}{d_{kl}^{(t)} d_{\mu\nu}^{(\lambda)}} \frac{\partial^2 \varphi(\tilde{X})}{\partial \tilde{x}_{lk}^{(t)} \partial \tilde{x}_{\mu\nu}^{(\lambda)}} \right)_{(k,l,t), (\mu,\nu,\lambda)}$$

を定義すれば (15) は

$$\mathcal{K}(\psi(Y)) = -\mathcal{J}(Y)^{-1}$$

を意味し、(14) は

$$h(Y) = \varphi(X) - \frac{1}{2} \mathcal{K}(\psi(Z^*)) [Y - Z]$$

となるが、 $z \geq z^*$

lemma 6 $\mathcal{K}$ は正値定符号で、その固有値はすべて
order が $t \frac{2+R}{1+R}$ である $\square$

これは、 $\varphi(X)$ の積分表示 (8) を考えれば容易にわかる。
 ゆえに、 $\gamma \in \mathcal{P} - \mathcal{U}$ に対して

$$\begin{aligned} h(\gamma) &\leq \varphi(X) - ct^{-\frac{2+R}{1+R}} \sum_{i,j,s} (y_{ij}^{(s)} - z_{ij}^{(s)})^2 \\ &\leq \varphi(X) - c\delta_1^2 t^{\frac{R}{1+R}}. \end{aligned}$$

これから

$$\int_{\mathcal{P} - \mathcal{U}} \leq \exp \left\{ \varphi(X) (1 - \varepsilon_1) \right\}$$

が導かれる。

以上をまとめて結局

$$\log P(Z) \sim \varphi(\psi(Z)) + \tilde{\sigma}(Z\psi(Z))$$

となり、この右辺は $\psi(Z)$ の形から具体的に求められて

$$\begin{aligned} &\varphi(\psi(Z)) + \tilde{\sigma}(Z\psi(Z)) \\ &= (1+R) \left\{ \left(\frac{Z}{m+1} \right)^{v r_1} m^{-r_2 m^2} C_0 \right\}^{\frac{1}{1+R}} N^*(Z)^{\frac{1}{1+R}}. \end{aligned}$$

これで目的の漸近式が得られた。

参考文献

三井：行列の加法的理論 - Waring 型の問題と分割問題
 - , 1983 年度講義録 (学習院大学理学部)。 (現在品切)