

群指標の行列表とその応用

北大 吉田知行

以下 G は常にある有限群を表わす、 G の ($\mathbb{C}$ 上の) 表現 ρ の行列表 (determinant) $\det \rho$ は合成

$$\det \rho : G \xrightarrow{\rho} GL \xrightarrow{\det} \mathbb{C}^*$$

によつて定義される、 χ が ρ の指標のとき、 $\det \chi = \det \rho$ とおいて指標 χ の行列表 (determinant) を定義する。この概念は transfer theorems や 2-fusion に関する結果の証明などに有効である。実はこの方法は $\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p$ -free は Sylow p -群を持つ群に関する Wielandt の定理をもっとわかりやすく証明するために開発されたものである、ここではこの概念を用いたいくつかの非常に特別な例についで述べる。

補題 1. τ を G の involution, χ を G の一般指標とする、もし $\tau \in G'$ なら、 $\chi(1) \equiv \chi(\tau) \pmod{4}$.

証明. χ は指標としてよい、 ρ を χ を指標として持つ G の

表現とする. このとき行列 $\rho(t)$ の固有値は 1 または -1 であり, それぞれの重複度を a, b とすれば $\chi(t) = \chi_1(t) = a - b$, $\chi(1) = a + b$, $t \in G'$ だから, $\rho(t) \in SL$. よって $\det \rho(t) = (-1)^b = 1$, よって b は偶数. これより $\chi(1) - \chi(t) = 2b \equiv 0 \pmod{4}$.

補題 2. α を G の部分群 H の一般指標とする. $x \in G$ なら $x^G \cap H = x_1^H + \cdots + x_n^H$ ($x_1, \dots, x_n \in H$) となる. このとき,

$$\alpha^G(x) = \sum_i \left| \frac{C_G(x_i)}{C_H(x_i)} \right| \alpha(x_i) = \frac{|C_G(x)|}{|H|} \sum_i |x_i^H| \alpha(x_i).$$

証明は容易である. さて補題 1, 2 を組み合わせれば 2 次の定理が得られる.

定理 3. $K \trianglelefteq H \leq G$ で H/K は巡回群とする. t を G の involution とする. $t^G \cap K = t_1^H + \cdots$, $t^G \cap (H-K) = t'_1{}^H + \cdots$ とする $t_1, \dots, t'_1, \dots \in H$ をとる. さらに

$$\Delta^+ = \sum_i \left| \frac{C_G(t_i)}{C_H(t_i)} \right|, \quad \Delta^- = \sum_j \left| \frac{C_G(t'_j)}{C_H(t'_j)} \right|$$

とかく. このとき, もし $t \in G'$ なら,

$$|G:H| \equiv \Delta^+ + \Delta^- \equiv \Delta^+ - \Delta^- \pmod{4}.$$

$$|G:H| \equiv \Delta^+ \pmod{2}, \quad \Delta^- \equiv 0 \pmod{2}.$$

証明. λ を H の線型指標で $K \cap \lambda \geq K$ なるものとする, 補題 2 によつて,

$$\lambda^G(t) = \Delta^+ + \varepsilon \Delta^-,$$

ここで ε は $K \cap \lambda = K$ のとき -1 , $K \cap \lambda \neq K$ のとき $+1$ とする, 補題 1 により $|G:H| = \lambda^G(1) \equiv \lambda^G(t) = \Delta^+ + \varepsilon \Delta^- \pmod{4}$.

$K = H$ なら, $\lambda = 1_H$ とすれば定理は正しい, $K \neq H$ なら, $\varepsilon = -1$ とする λ があるから, $\Delta^+ - \Delta^- \equiv |G:H| \pmod{4}$. また, $\lambda = 1_H$ とすれば $\Delta^+ + \Delta^- \equiv |G:H| \pmod{4}$. 定理は証明された.

定理における Δ^+ と Δ^- は明らか, それぞれ,

$$\frac{|C_G(t)|}{|H|} |t \in G \cap K|, \quad \frac{|C_G(t)|}{|H|} |t \in G \cap (H-K)|$$

に等しい. $|G:H|$ の場合, 定理によつて Δ^+ は奇数, $t \in G \cap K \neq \emptyset$. これは Thompson の fusion lemma である. この定理は n の位数が 2 より大きい場合にも一般化できる.

次に $H \leq G$ と $\lambda \in \hat{H}$ に対し $T_H^G(\lambda) = \det(\lambda^G - 1_H^G)$ とおく,

$$(T^G(\lambda))$$

補題 4. $K \leq H \leq G$ とする.

(i) $T_H^G: \hat{H} \rightarrow \hat{G}$ は準同型.

(ii) $\lambda \in \hat{G}$ なら $T_H^G(\lambda|_H) = \lambda^{|G:H|}$.

(iii) $\lambda \in \hat{K}$ なら $T_H^G(T_K^H(\lambda)) = T_K^G(\lambda)$. i.e. $T_H^G \circ T_K^H = T_K^G$.

補題 5. (Mackey 分解). $K, H \leq G$, $G = \sum_i H g_i K$,
 $K_i = K \cap H g_i$, $\lambda \in \hat{H}$ に対し $\lambda_i = \lambda^{g_i^{-1}}|_{K_i} \in \hat{K}_i$ とおく. この
 とき

$$T_H^G(\lambda)|_K = \prod_i T_{K_i}^K(\lambda_i).$$

補題 6. P を p -群, A を P の指数 p の可換群, $\lambda \in \hat{A}$ とす
 る. $\tau = T^P(\lambda)$ とおく. このとき

(i) $Ker \tau \supseteq \Omega_1 Z_{p-1}(P)$.

(ii) $\alpha \in A$, $\lambda(\alpha) \neq 1$, $Ker \lambda \supseteq \langle \alpha^{p^i} \mid \alpha \in P, i \geq 1 \rangle$ と仮定す
 る. さらに P が Z_p -free なら $\tau(\alpha) = 1$.

これらの補題は誘導指標の定義などから得られる. これに
 よって, いくつかの transfer 定理を証明できる. 例えば P を
 Z_p -free な Sylow p -群, $N = N_G(P)$, $\lambda \in \hat{N}$, $T^G(\lambda) = 1$ とす
 る. $\lambda|_P \neq 1$ と仮定して矛盾を導く. $G = \sum_i N g_i P$, $P_i =$
 $P \cap N g_i$, α を $\lambda(\alpha) \neq 1$ とする位数最小の P の元とすると, 補題
 5 より $1 = T^G(\lambda)|_P = \lambda|_P \prod_{i>1} T^{P_i}(u_i)$ (ここで $g_i = 1$ により
 $u_i = \lambda^{g_i^{-1}}|_{P_i}$ とおいた). $\lambda(\alpha) \neq 1$ よりある $i > 1$ に対し $T^{P_i}(u_i)(\alpha) \neq 1$.
 $P_i \subseteq M \trianglelefteq P$ とする M をとり $\mu = T^M(u_i)$ とおけば仮定と補題

6) により $2 \text{ } TP(\mu)(\mu) = 1$ が示される、しかし $TP(\mu)(\mu) = TP(\lambda)(\mu)$
 $\neq 1$ 、矛盾。よって $2 \lambda \in \hat{N}$ かつ $TP(\lambda) = 1$ なら $\lambda|_P = 1$ 。これから
 $\lambda \in \hat{N}$ に対し $TP(\lambda)|_P = \lambda|_P^{[G:N]}$ が証明できる、したがって
 7) 2 , $P \cap G'$ は N の任意の線型指標の核に含まれ、 $P \cap G'$
 $= P \cap N'$ となる、これは *Wielandt* の定理である。

定義, $S \leq H \leq G$ とする、次が成り立つとき S は H において
Sylow 型 であるという:

$$S^g \leq H, g \in G \implies S^g \sim S \text{ in } H.$$

定理 7, S が $H \leq G$ において Sylow 型 ^{p -群} かつ $N_G(S) \leq H$ とする。
 このとき、 $\Omega_1(Z_{p-1}(S)) \cap G' = \Omega_1(Z_{p-1}(S)) \cap H'$ 、さらに S が
 Z_p 2 Z_p -free なら、 $S \cap G'G' = S \cap H'H'$ 。

この定理の証明は補題 6.(i) による。