

非正則条件の下での局所最小分散不偏推定量

竹内 啓

標本空間を $(X, \mathcal{A})$ とし, γ の上に定義された確率測度の集合を $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ とし, 実母数 $\gamma = g(\theta)$ の不偏推定問題と考える. $\theta = \theta_0$ における局所最小分散不偏推定量 (LMVUE) の存在に關しては次の正則条件が基本的である.

1 γ について θ に對して $P_\theta \ll P_{\theta_0}$.

2 γ について

$$\int \left(\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}} \right)^2 dP_{\theta_0} < \infty$$

3 $\theta = \theta_0$ で分散有限ならば γ の不偏推定量が存在する.

そして次の定理が成り立つ.

定理 (Barankin, 1949 Stein 1950) 条件 1 ~ 3 の下で

$\theta = \theta_0$ における LMVUE が存在する.

LMVUE は, 任意の分散有限な推定量 $\hat{\theta}$ と $\{dP_\theta/dP_{\theta_0}\}$ で張られる空間への射影するこゝに於て得られるこゝに於て知られている.

そこでこのとき LMVUE は $\theta \neq \theta_0$ では分散有限と有限でないことに注意しよう. すなわちすべての θ に對して分散有限な推定量が存在しても LMVUE はつねに分散有限と

の不偏推定量が存在しないが、分散の下限は 0 になる。

$$X_{ic}^K = X_{ic} \quad |X_{ic}| \leq K, \quad = 0 \quad |X_{ic}| > K$$

$$\text{よおき, } m_K = E(X_{ic}^{K^2}) = E(X_{ic}^K X_{ic}),$$

$$\hat{\theta}_K = \theta_0 + \sum X_{ic}^K (X_{2i} - \theta X_{1i}) / n m_K$$

$$\text{よおければ } V_{\theta_0}(\hat{\theta}) = 1/n m_K \rightarrow 0 \quad (K \rightarrow \infty)$$

次に 1 が成立した場合には 2 の場合を考える。

θ 自身を実数とする。 $\gamma = g(\theta)$ は連続微分可能とする。

A 単調な台 support を持つ場合、すなわち

$$A1 \quad \theta_1 > \theta_2 \quad \text{のとき} \quad P_{\theta_1} \gg P_{\theta_2}$$

このとき $\{P_\theta\}$ はある σ -finite 測度に関して絶対連続となるから $f(x, \theta) = dP_\theta/d\mu$ と表す。

$$A(\theta) = \{x \mid f(x, \theta) > 0\}$$

よすれば A1 は $\theta_1 > \theta_2$ のとき $A(\theta_1) \supset A(\theta_2)$ を意味する。

$$A2 \quad \theta < \theta_0 \quad \text{のとき}$$

$$\int_{A(\theta_0)} \frac{\{f(x, \theta)\}^2}{f(x, \theta_0)} d\mu < \infty$$

X に対して $T = t(X)$ を次のように定義する。

$$t(x) = \inf \{ \theta \mid A(\theta) \ni x \}$$

$$\text{そうすると } P_\theta \{T < t\} = P_\theta \{A(t) \ni x\} \quad \text{かつ} \quad t \geq \theta$$

のとき 2 はけ 1 に等しい。

A3 $\lim_{t' \rightarrow t+0} \frac{1}{t' - t} P_0 \{A(t') - A(t)\} = h(t, \theta)$ が存在

A4 $h(t, \theta)$ は θ に関して連続微分可能 かつ $|\frac{\partial}{\partial \theta} h|$ が積分可能.

A5 $h(0, \theta) = \lim_{t \rightarrow 0-0} h(t, \theta) > 0$,

A6 $f(x, \theta)$ は θ に関して連続微分可能. (a. e. x)

このとき, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$ と $X \in A(\theta_0)$ によって定義され

$$E_0 \{ \hat{\theta}(X) \} = g(\theta_0) \quad \theta \leq \theta_0.$$

とみたす推定量とし, $\theta > \theta_0$ に対して

$$\bar{g}(\theta) = g(\theta) - \int_{A(\theta_0)} \hat{\theta}(x) f(x, \theta) d\mu$$

とおく. $X \notin A(\theta_0)$ に対して, $\hat{\theta}(X) = \hat{\theta}^*(t(X)) = \hat{\theta}^*(T)$ と

$$\int_{\theta_0}^{\theta} h(t, \theta) \hat{\theta}^*(t) dt = \bar{g}(\theta)$$

とみたす t に定める. この式の両辺は微分可能であるから θ に関して微分して,

$$h(\theta, \theta) \hat{\theta}^*(\theta) + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} h(t, \theta) \hat{\theta}^*(t) dt = \bar{g}'(\theta)$$

を得る. これは Volterra 2 型の積分方程式であるから 解が存在する. 従って

定理 A1 ~ A6 の下で, $\theta = \theta_0$ における LMVUE が存在

し、 x は $E_{\theta}(\hat{\theta}) = g(\theta) \quad \theta \leq \theta_0$ の条件の下で $V_{\theta}(\hat{\theta})$ を最小にする推定量に一致する。

次に才2の場合として、分布が一方側に並んでいるといふべき場合を考へよう。

B 1 P_{θ} は μ によって dominate される。

$$f(x, \theta) = dP_{\theta}/d\mu \quad A(\theta) = \{x \mid f(x, \theta) > 0\}$$

とおく

B 2 $\theta_1 \neq \theta_2$ のとき $A(\theta_1) \neq A(\theta_2)$

B 3 $\theta_0 < \theta_1 < \theta_2$ あるいは $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2$ のとき

$$A(\theta_0) \cap A(\theta_1) \supset A(\theta_0) \cap A(\theta_2)$$

B 4 $f(x, \theta)$ は θ に関して連続微分可能 (a.e. x)

こゝで2頁に2つの場合に分けて考へる

B 5 有限個の $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ および正数 γ の存在し、

$\theta_0 - \gamma < \theta < \theta_0 + \gamma$ となるすべての θ に対して

$$A(\theta) \subset A(\theta_1) \cup \dots \cup A(\theta_k)$$

$$B 6 \quad I_0 = \int_{A(\theta_0)} \left| \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta_0)}{f(x, \theta_0)} \right|^2 d\mu < \infty$$

$$B 7 \quad \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{1}{|\theta - \theta_0|} \int_{A(\theta) - A(\theta_0)} f(x, \theta) d\mu = 0$$

定理 B 1 ~ B 7 の下で

$$V_{\theta_0}(\hat{\theta}) \geq \{g'(\theta_0)\}^2 / I.$$

すなわち、この場合には分散の下限は 0 になりたない。

分散の下限が 0 になり得るの次の 3 つの場合である。

$$B8 \quad \lim_{\theta \rightarrow \theta_0 + 0} \frac{1}{\theta - \theta_0} \int_{A(\theta) - A(\theta_0)} f(x, \theta) d\mu > 0$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0 - 0} \frac{1}{\theta_0 - \theta} \int_{A(\theta) - A(\theta_0)} f(x, \theta) d\mu > 0$$

いま $U = u(X)$ $V = v(X)$ を次のように定義する。

$$u(x) = \inf \{ \theta \mid A(\theta) \ni x \}$$

$$v(x) = \sup \{ \theta \mid A(\theta) \ni x \}$$

U, V の (Lebesgue 測度に関する) 同時密度 α 存在するとし、

これを $g(u, v, \theta)$ と表す。 $g(u, v, \theta) > 0$ とおけるのは

$u < \theta < v$ とおける範囲に限る。

B9 $g(u, v, \theta)$ は θ に関して微分可能で $|\frac{\partial g}{\partial \theta}|$ は積分可能。

$\hat{\theta} \in E_0(\hat{\theta}) = g(\theta_0)$ とした任意の推定量とする。

$$\bar{g}(\theta) = g(\theta) - \int_{A(\theta_0)} \hat{\theta}(x) f(x, \theta_0) d\mu$$

とおく。

$$\underline{\theta}(\theta) = \inf_{\theta'} \mu \{ A(\theta') \cap A(\theta) \} > 0$$

$$\bar{\theta}(\theta) = \sup_{\theta'} \mu \{ A(\theta') \cap A(\theta) \} > 0$$

$$\forall \theta < \tau \quad \bar{\theta}(\underline{\theta}(\theta)) = \theta \quad \forall t \geq 3$$

$$\theta > \theta_0 \Rightarrow \gamma \neq \int_{\theta_0}^{\theta} \int_{\theta}^{\bar{\theta}(\theta)} \hat{\theta}^*(u, v) g(u, v, \theta) du dv = \bar{g}(\theta)$$

$$\theta < \theta_0 \Rightarrow \pm \int_{\theta(0)}^{\theta} \int_{\theta}^{\theta_0} \hat{\theta}^{\pm}(u, v) g(u, v, \theta) du dv = \bar{g}(\theta)$$

と t_1, t_2, t_3, t_4 を $\hat{\theta}$ で定義する。これによって、分散 σ^2 の不偏推定量を構成する。これである。この t_1, t_2, t_3, t_4 の十分条件は

$$\lim_{\theta \rightarrow \bar{\theta}(\bar{\sigma}) - 0} \int g(u, v, \theta) du > 0 \quad \lim_{\theta \rightarrow \underline{\theta}(\bar{\sigma}) + 0} \int g(u, v, \theta) dv > 0$$

2330. 2411 必要條件をいふ。

より一般の十分条件について、我々十分調べていた。