

雑音を含んだ放物型方程式について.

九大 工学部 渡辺 寿夫

雑音のある力学系の問題が工学上の問題に関連があるとして、主として工学者によって考察されている。現実の系は本来雑音が入っているはずであり、それを観測して得たデータも雑音を含むはずであるという理論上の要請より考察されている。これ等のように Kalman-Bucy による filtering の問題がある。この問題は工学者によって種々の方向に形式的に拡張され複雑な系となっている。力学系が偏微分方程式で記述されると、それは雑音を含んだ方程式となり、それをどう理解すべきかは一つの問題である。(これ等に関連する文献については、綜合報告 Curtani [1] を参照)。

この小論において、放物型方程式に関する最近の論文 [2], [3] に関連した問題に筆者に

よる若干の考察を加えた結果を述べる。

Balakrishnan [2] は次の方程式を扱っている。

$$(B) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = Lu(t, x) + \alpha(t, x, \omega)u(t, x) \\ (t \geq 0, x \in I) \\ u|_{t=0} = g(x) \quad x \in I. \end{cases}$$

ここで L は 楕円型作用素、適当な境界条件をみたすとする。 I は R^1 の部分区間とする。

Marcus [3] は次の非線形な方程式を取り扱っている。

$$(M) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = Lu(t, x) + f(u) + \alpha(t, x, \omega) \\ (0 < t, x \in I), \\ u|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

以上で述べた同族 g, f 等は必要の滑らかさを仮定する。 $\alpha(t, x, \omega)$ は 2 変数 (R^n の x は $n+1$ 変数) の white noise の形式即ち $\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} = \alpha(t, x, \omega)$ と表わされる。 $W(t, x, \omega)$ は 2 次元 Wiener process、 $E(W(t, x, \omega)) = 0$ 、 $E(W(t_1, x_1, \omega) W(t_2, x_2, \omega)) = \min(t_1, t_2) \min(x_1, x_2)$ としておく。そして (B), (M) は形式の意味、ただ、適当な解釈を付けなければならぬ。

以下主として (B) について考察する. Balakrishnan [2] は $\alpha(t, x, \omega)$ を $L^2[0, T] \times L^2[I]$ の元として考えられている. ここで $\alpha(t, x, \omega)$ をある確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の random element と考えよう.

今, 方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu, & t > 0, x \in I, \\ Bu(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial I \end{cases}$$

の Green 関数を $U = U(t, x, y)$ とする. (B は適当な境界条件) (B) は形式的に次の積分方程式に変換される.

$$\begin{aligned} (B)' \quad u(t, x) &= \int_I U(t, x, y) g(y) dy \\ &+ \int_0^t \int_I U(t-s, x, y) u(s, y) d^2_{s,y} W(s, y) \end{aligned}$$

ここで, $d^2_{s,y} W(s, y, \omega)$ は $W(s, y, \omega)$ よりみちがけられる random measure をあらわす. (B)' は確定した.

意味をもつから, (B)' を (B) の方程式と同等なものと見做す. (B) は象徴的意味しかもたぬものと見做す. しかしながら, (B) と (B)' の相互関係はもっとくわしく, しるべき必要がある.

(B)' の解の存在について示さう。

$$u_0(t, x) = \int_I \sigma(t, x, y) g(y) dy$$

と 3. 帰納的に,

$$u_{j+1}(t, x) = u_0(t, x) + \int_0^t \int_I \sigma(t-s, x, y) u_j(s, y) d^2_{s,y} W(s, y, \omega)$$

と定義する。これより,

$$u_{j+1}(t, x) - u_j(t, x) = \int_0^t \int_I \sigma(t-s, x, y) (u_j(s, y) - u_{j-1}(s, y)) d^2_{s,y} W(s, y, \omega),$$

$$\begin{aligned} \int_I dx E(|u_{j+1}(t, x) - u_j(t, x)|^2) \\ = \int_0^t ds \int_I dy \left(\int_I dx (\sigma(t-s, x, y))^2 E(|u_j(s, y) - u_{j-1}(s, y)|^2) \right). \end{aligned}$$

仮定 I. $x \in I$ に関する一様性.

$$\int_I (\sigma(t, x, y))^2 dy \leq C_1(t) < \infty$$

が成り立つ。 $C_1(t)$ は $t \geq 0$ の関数。

仮定 I の下で,

$$\int_I dx E(|u_{j+1}(t, x) - u_j(t, x)|^2)$$

$$= E(\|u_{j+1}(t) - u_j(t)\|^2)$$

$$\leq \int_0^t c_1(s) E(\|u_j(s) - u_{j-1}(s)\|^2) ds$$

を 3. ~~返~~ 次 () 返 1 2,

$$E(\|u_{j+1}(t) - u_j(t)\|^2) \leq \sup_{0 \leq s \leq t} E(\|u_1(s) - u_0(s)\|^2) \times \\ \times \int_0^t c_1(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} c_1(t_2) dt_2 \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_{j-1}} c_1(t_j) dt_j.$$

を 3. 一方,

$$|u_0(t, x)| \leq \int_{\mathbb{Z}} v(t, x, y) |g(y)| dy \leq \|g\|_{\infty} \int_{\mathbb{Z}} v(t, x, y) dy.$$

$$\int_{\mathbb{Z}} |u_0(t, x)|^2 dx \leq \|g\|_{\infty}^2 \cdot \int_{\mathbb{Z}} dx \left(\int_{\mathbb{Z}} v(t, x, y) dy \right)^2$$

作 定 2

$$\int_{\mathbb{Z}} dx \left(\int_{\mathbb{Z}} v(t, x, y) dy \right)^2 = c_2(t) < \infty$$

を 12,

$$\int_{\mathbb{Z}} E(|u_1(t, x)|^2) dx \leq 2 \int_{\mathbb{Z}} |u_0(t, x)|^2 dx$$

$$+ 2 \int_{\mathbb{Z}} dx \int_0^t ds \int_{\mathbb{Z}} (v(t-s, x, y))^2 |u_0(s, y)|^2 dy$$

$$\leq 2 \|g\|_{\infty}^2 (c_2(t) + 2 \int_0^t c_1(s) c_2(s) ds) \|g\|_{\infty}^2$$

仮定 3

$$\text{ある } t_0 \text{ に対して } \int_0^{t_0} c_1(s) c_2(s) ds < \infty. \quad A_n(t) =$$

$$\int_0^t c_1(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} c_2(t_2) dt_2 \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-1}} c_1(t_n) dt_n. \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t_0) < \infty \quad \text{であること,}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{0 \leq s \leq t_0} E(\|y_{j+1}(s) - y_j(s)\|^2) < \infty$$

$$\text{が得られるから, } \sup_{0 \leq t \leq t_0} E(\|u(s)\|^2) < \infty \quad \text{であり } u(s, x) \text{ が}$$

$$\text{存在して, } \lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq t_0} E(\|y_j(s) - u(s)\|^2) = 0 \quad \text{である。}$$

$$-\frac{\sigma}{2} \text{ の値 によって, } u, v \in (B)' \text{ である。}$$

2. の 解 として

$$E(\|u(t) - v(t)\|^2) = \int_0^t ds \int_{\mathbb{I}} dx \int_{\mathbb{I}} (\sigma(t-s, x, y))^2 E(|u(s, y) - v(s, y)|^2) dy$$

$$\leq \int_0^t c_1(s) E(\|u(s) - v(s)\|^2) ds$$

$$\leq A_n(t) \sup_{0 \leq s \leq t} E(\|u(s) - v(s)\|^2).$$

$$\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (t = t_0).$$

より $u = v$ が得られる。 かくして。

定理 1. $\|g\|_\infty < \infty$, 仮定 1. 2. 3 の下で,

(B)' に對して $\sup_{0 \leq t \leq t_0} E(\|u(t)\|^2) < \infty$ ならば 局所解 $u(t, x)$

が存在して一意である。

この最大域解に τ がある。

仮定 4

$$\int_0^\infty dt \int_I dx (U(t, x, y))^2 \leq A < \infty$$

※ $y \in I$ は固定して一様成立する。

仮定 4 の下で

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t < \infty} \int E(|u_{j+1}(t, x) - u_j(t, x)|^2) dx \\ \leq A \sup_{0 \leq s < \infty} \int_I E(|u_j(s, y) - u_{j+1}(s, y)|^2) dy \end{aligned}$$

であるから、 $\sup_{0 \leq t < \infty} E(\|u(t)\|^2) < \infty$ ならば 解 $u(t, x)$

が存在する。

仮定 1 ~ 4 はあまり一般でない。 $\alpha(t, x, \omega)$ は非常に irregular な ω によって決まるから、 α の代わりに α に對して解が成り立つ自然の条件が考えられる。

Balakrishnan は 12.4.3 の noise の近似解の解を
 12.4.4 のように思う。

以上により 解のある場合、構成法より、

$$u(t, x) = u_0(t, x) + \Phi u_0(t, x) + \dots + \Phi^n u_0(t, x) + \dots$$

と展開される。ここで

$$\Phi u_0(t, x) = \int_0^t \int_I v(t-s, x, y) u_0(s, y) d^2 y W(s, y)$$

である。 Φ^n は n 重積分であらわされている。この意味
 の解をもつ場合、この等の量 (λ, B, L) により確定した
 意味で 12.4.4 の確率変数となり、解の連続性等を考へ
 る事ができる。

附記 1. 多次元ブラウン運動のブラウン運動に
 ついては [4] を参照

文献

- [1]. R. Curtain, A survey of infinite dimensional
 filtering, *Siam Review*. 17 (1975), 395-411.
- [2]. R. V. Balakrishnan, Stochastic bilinear
 partial differential equations (manuscript)

[3]. R. Marcus. Parabolic Itô equations.

Trans. Amer. Math. Soc. 198 (1974).

177-190

[4]. R. Cairoli and J.B. Walsh

stochastic integrals in the plane

Acta Mathematica 134 (1975) 111~183.