

## 複素 WKB 法の解析的裏付けと接続問題

数理解析研究所 高崎金久 (Takasaki, Kanehisa)

### 1. はじめに

WKB 法の厳密な裏付けは 60 年代から 70 年代にかけていろいろな人が試みている。(文献については Wasow の本 [1] の文献表などを見られたい。)ここでは Olver の本 [2] の第 13 章に紹介されている方法に基づいて WKB 法といういさかか古めかしい話題を考え直してみた。

WKB 法では WKB (あるいは Liouville-Green) 解と呼ばれる形式解をつくり、実際の解とこの形式解を近似や総和法などを通じて対応づけようとする。しかしこの対応付けを全空間にわたって一樣に行うことは一般には無理で、適当な部分領域へ分けて領域毎に異なるやり方で行わねばならない。大域的な情報を得るためには異なる領域間の WKB 解をつなぐ接続公式が必要になる。それまでの WKB 法の処法では戻り点 (turning point) の近くでの解析からそのような接続公式を導くのが普通だったが、Olver の本で紹介されている方法ではむしろ無限遠点での解析に基づいて接続公式を導く。(そのためには必然的に実軸から複素領域へ出て考える — 複素 WKB 法 — が必要になる。)これにより、近似無しの厳密な接続公式が得られるというのである。

Olver のこの方法はそれ自体が十分に面白いが、筆者がことさらにこの方法に興味をも

つのは Voros や Pham の最近の仕事 [3, 4] (並びにそこで強調されている Ecalle の “resurgent function” の理論 [5] との関連) に対して別の方向からの解釈を与えるもののように思われるからである。Olver が導いた接続公式の係数は三種類の基本的な量, すなわち

- 簡単な指数函数
- Maslov 指数に関連する虚数単位の中
- 無限遠点での解析に由来するある奇妙な量

からなる。この三番目の量について Olver は詳しい解析を行っていない。ところが Pham 達の論文 [4] を読むと, まさにこの量を一般的に “Voros 係数” と呼んでいるではないか! (ただし, 実際に出てくる状況は少し違うようだが。)

そこでこの第三の量をもっとくわしく解析する手段が欲しくなる。そのために, 元の線型問題に対して Liouville 変換というものを施す。(これは Liouville-Green 以来知られている手法である。)すると, 新しい線型問題は遠方で減衰するポテンシャルを持つ, ある意味で “散乱問題” になり, “Voros 係数” は散乱問題の “Jost 函数” と解釈されることがわかる。また散乱問題で知られている “Jost 解” の函数項展開や Laplace 積分表示を通じて “Voros 係数” 自身の函数項展開や Laplace 積分表示を導くことができる。Ecalle の理論ではこのような Laplace 積分が基本的なので, このあたりから関連を探って行けることが期待される。

現時点ではまだ Ecalle の理論にのせるまでには至っていないのが不満だが, とりあえず以上のようなことについて中間的な報告をしたいと思う。

なお, この函数項展開や Laplace 積分表示を導く際には Grigis の仕事 [6, 7] が大いに参考になった。Grigis は (C. Gérard と) 元の 2 階方程式をある 1 階系に書き直して解析をしている。これがそのまま使えれば話はもっと簡単だが, 実は散乱問題として解釈するのに少し不都合があつて, 結局もっと昔の Olver の枠組みで考えることになった。

Voros の resummation の方法との関連は筆者には結局よく理解できなかったもので, 以下では積極的には議論しない。ただ, Voros との関連を窺わせる材料もいくつか出て来ているので, 少しは触れてみるつもりである。

最後になりましたが, Olver の本を読むことを勧めてくださった西本敏彦先生, Grigis の論文のコピーを入手したり筆者の愚痴に忍耐強くつきあってくれた戸瀬信之氏, いろいろ役に立つ情報を寄せてくださった内山康一, 吉野正史両氏に心より感謝いたします。

## 2. Liouville 変換, 戻り点, Stokes 曲線, 主曲線

Sturm-Liouville 型の線型問題を考える.

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} = \lambda^2 f(q)\psi \quad (\lambda > 0) \quad (1)$$

ここで  $f(q)$  は 1 次元の Schrödinger 方程式の場合には  $f(q) = V(q) - E$  という形をしている. 以下では話を簡単にするため,  $f(q)$  は多項式であり, また Planck 定数の逆数にあたるパラメータ  $\lambda$  は正数である, としておく. (実際にはもっと一般的な場合も扱える.)

●定義・命題● Liouville 変換とは独立変数と従属変数に対する次の変換をいう.

$$s = s(q) = \int_{q_0}^q dQ f(Q)^{1/2}, \quad (2)$$

$$\phi = f^{1/4}\psi. \quad (3)$$

ここで  $q_0$  は適当に選んだ原点であり,  $f^{1/2}$ ,  $f^{1/4}$  の branch も適当に決めておく. このとき (1) は次の方程式に移る.

$$\frac{d^2\phi}{ds^2} = (\lambda^2 + h(s))\phi, \quad (4)$$

ここで

$$h(s) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{f^{3/4}} \frac{d^2}{dq^2} \frac{1}{f^{1/4}} = \frac{4ff'' - 5f'^2}{16f^3}. \quad (5)$$

注意すべきは, たとえば  $f(q)$  が多項式などの場合

$$h(s) = O(|s|^{-2}) \quad (s \rightarrow \infty) \quad (6)$$

ということである. これにより, (1) では  $f(q)$  が偶数次の実係数多項式の場合のように “閉じ込め型” の問題であったものが, 遠方で減衰するポテンシャルをもつ “散乱型” の問題に化ける. ただし,  $s = s(q)$  のは多価関数の積分で, その逆関数  $q = q(s)$  も多価になるから,  $s$ -平面上のポテンシャル  $h(s)$  は複雑な多価性をもつ.

## ●定義●

- 1) 戻り点 (turning point) とは  $f(q)$  の零点のことである.
- 2) Stokes 曲線 (Stokes curve) とは, 戻り点から出発してその上で  $\text{Im } s$  が一定の曲線 (別の言い方をすれば,  $\text{Im } f^{1/2} dq = 0$  の積分曲線) のことである.
- 3) 主曲線 (principal curve) あるいは反 Stokes 曲線 (anti-Stokes curve) とは, 戻り点から出発してその上で  $\text{Re } s$  が一定の曲線 (つまり  $\text{Re } f^{1/2} dq = 0$  の積分曲線) のことである.

## ●注意●

- 1) この言葉遣いは Olver や物理学者の慣習に従う. 数学者は Stokes 曲線と反 Stokes 曲線を逆の意味に使うことが多い.
- 2) 戻り点は  $s$ -平面上では  $q = q(s)$  の分岐点 (あるいは  $h(s)$  の特異点) として現れる. Stokes 曲線はそこから出て実軸に平行に進み, 主曲線は虚軸に平行に進む. これらの配置から  $s(q)$  という函数の実部や虚部が  $q$ -平面上でどのように増減するかが読み取れる. そういう情報が以後の解析では重要になる.

●例●  $f(q) = q^2 - E$ ,  $E > 0$ .

この場合, 戻り点は  $q = \pm\sqrt{E}$ , Stokes 曲線は 6 本, 主曲線は 5 本ある.  $s(q)$  を

$$s(q) = \int_0^q dQ f(Q)^{1/2}, \quad f(Q=0)^{1/2} = +i\sqrt{E} \quad (7)$$

と選ぶと,

$$s(\pm\sqrt{E}) = \pm\pi i E/4 \quad (8)$$

となる (図 1).

### 3. 前進路, 許容領域, Liouville-Green 型の解

$q$ -平面の無限遠点  $\infty_I$  で  $\text{Re } s = -\infty$  となっているとする. この無限遠点の近傍で指数的に小さくなる解を問題にしたい. 次の概念は Olver に導入されているが, この種の議論ではいつでも類似の概念が関わってくる.

●定義●  $q$ -平面上の向き付けられた路が  $e^{2s\lambda}$  について前進的 (progressive) [あるいは単に  $e^{2s\lambda}$ -前進的] であるとは,  $\text{Re } s(q)\lambda$  がその道に沿って単調増加であること.

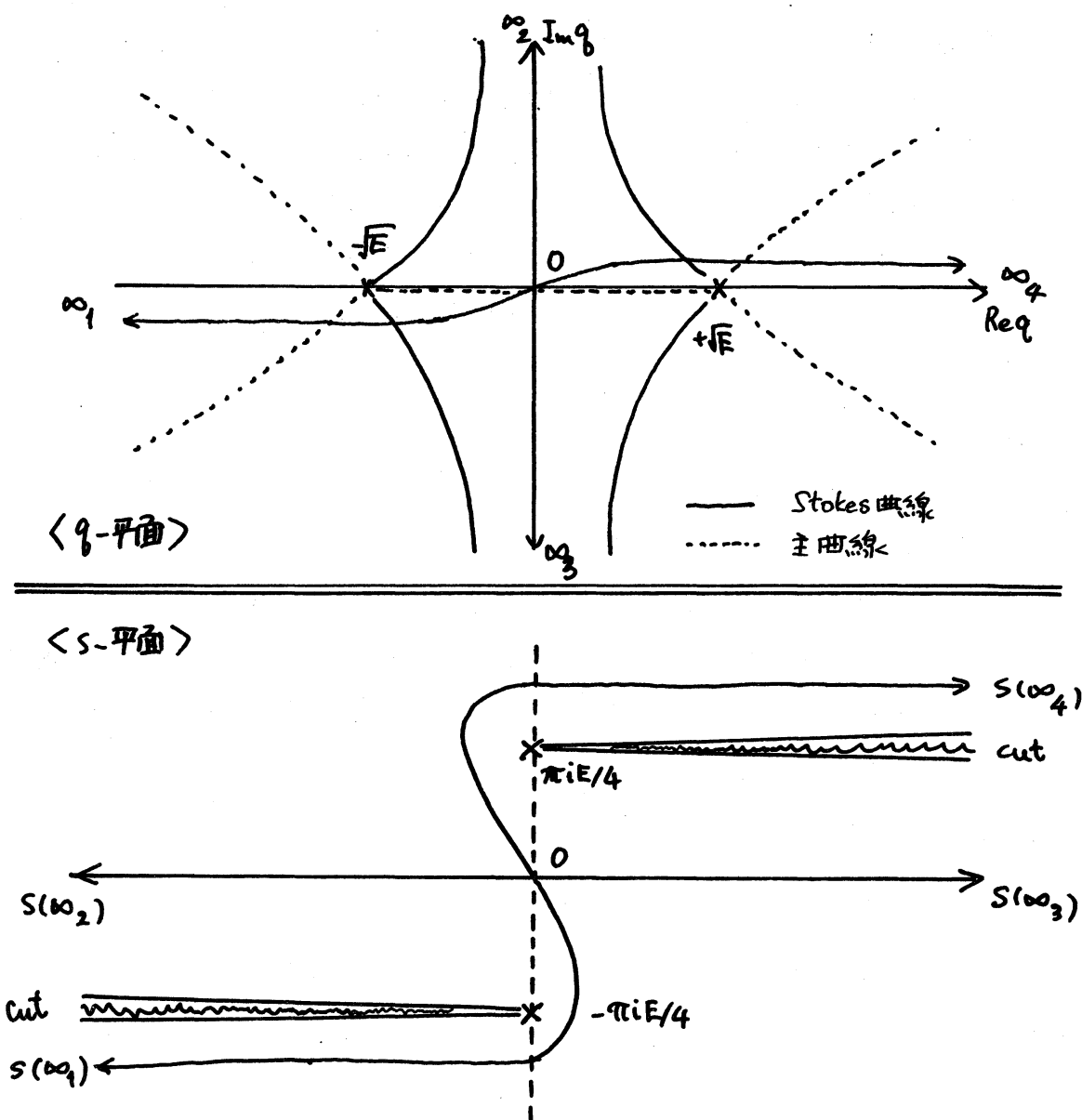


図 1.  $f(q) = q^2 - E$  の場合の  $q$ -平面および  $s$ -平面上の様子

●定義●  $\infty_I$  が定める許容領域とは  $\infty_I$  から  $e^{2s\lambda}$ -前進的な路（ただし戻り点は避ける）で到達できる点のなす領域をいう。

次の基本的な命題は Olver の本に証明してある。

●命題●  $\text{Re } s(\infty_I) = -\infty$  であり,  $\infty_I$  から  $\infty_I$  の許容領域  $D_I$  の各点  $q$  までを結ぶ  $e^{2s\lambda}$ -前進的な路  $C(\infty_I, q)$  が  $q$  について連続的に依存するように与えられていて, かつ

$$V_I(q) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{C(\infty_I, q)} |ds(s)h(s(q))| \quad (9)$$

が  $q$  によらない一定の上限を持つとする. このとき Sturm-Liouville 線型方程式の解  $\psi_I = \psi_I(q, \lambda)$  で,  $q$  について  $D_I$  全体で定義され,

$$\psi_I = w_I \left( \frac{ds}{dq} \right)^{-1/2} e^{s(q)\lambda} \quad (10)$$

という形 (Liouville-Green 型) をもち,  $q \in D_I$  に対して

$$|w_I - 1| \leq \exp[V_I(q)/|\lambda|] - 1 \quad (11)$$

という不等式を満たすものが存在する.

### ●注意●

- 1)  $V_I(q)$  についての仮定は  $h(s)$  が無限遠で  $O(|s|^{-2})$  であれば事実満たされる.
- 2)  $\psi_I$  は  $\infty_I$  の近くで指数的に小さくなる (recessive) ので, 存在すれば一意的.
- 3)  $\infty_I$  を少しくらい動かしても  $\psi_I$  自体は変わらない. さらに言えば, 命題中の条件を満たす範囲で  $\infty_I$  や  $C(\infty_I, q)$  を連続的に動かしても  $\psi_I$  は変化しない. (これは次節で述べるような実際の解の構成法を見ればわかる.)

同じように, 今度は  $\operatorname{Re} s = +\infty$  となっている無限遠点  $\infty_J$  から出発して,  $e^{-2s\lambda}$ -前進的な路 (それに沿って  $\operatorname{Re} s\lambda$  が単調減少) を考えることにより,  $\infty_J$  の許容領域とその上の Liouville-Green 型の解

$$\psi_J = w_J \left( \frac{ds}{dq} \right)^{-1/2} e^{-s(q)\lambda} \quad (12)$$

で不等式

$$|w_J - 1| \leq \exp[V_J(q)/|\lambda|] - 1 \quad (13)$$

を満たすものの存在が言える. ここで

$$V_J(q) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{C(\infty_J, q)} |ds(q)h(s(q))| \quad (14)$$

であり, また  $C(\infty_J, q)$  は  $\infty_J$  から  $q$  に至る  $e^{-2s\lambda}$ -前進的な路.

さらに,  $\infty_I$  と  $\infty_J$  が互いに他の許容領域の境界に属し, 間を結ぶ  $e^{2s\lambda}$ -前進路  $C(\infty_I, \infty_J)$  がとれるとすると, これも Olver の本に書いてあることだが,

●命題●  $\infty_I$  と  $\infty_J$  を結ぶ  $e^{2s\lambda}$ -前進路  $C(\infty_I, \infty_J)$  に対して

$$\int_{C(\infty_I, \infty_J)} |ds(q)h(q)| < \infty \quad (15)$$

であるとする。このとき極限值（境界値）

$$\begin{aligned} w_I(\infty_J) &= \lim_{q \rightarrow \infty_J} w_I(q), \\ w_J(\infty_I) &= \lim_{q \rightarrow \infty_I} w_J(q), \end{aligned} \quad (16)$$

が存在し、実は一致する。

この極限值が Olver の接続公式に出てくる第三の量である。

●例●  $f(q) = q^2 - E$ ,  $E > 0, \lambda > 0$

この場合には無限遠点として実軸と虚軸のそれぞれの境界に位置する4つの点

$$\infty_1 : q = -\infty$$

$$\infty_4 : q = +\infty$$

$$\infty_2 : q = +i\infty$$

$$\infty_3 : q = -i\infty$$

を考える。  $s = s(q)$  の分枝はすでに例として掲げたようにとる。このとき

$$q = \infty_1, \infty_2 : \operatorname{Re} s = +\infty,$$

$$q = \infty_3, \infty_4 : \operatorname{Re} s = -\infty,$$

となっている。それぞれに対する Liouville-Green 型の解としては

$$\begin{aligned} \psi_I &= w_I \left( \frac{ds}{dq} \right)^{-1/2} e^{s\lambda} \quad (I = 1, 2) \\ \psi_I &= w_I \left( \frac{ds}{dq} \right)^{-1/2} e^{-s\lambda} \quad (I = 3, 4) \end{aligned} \quad (17)$$

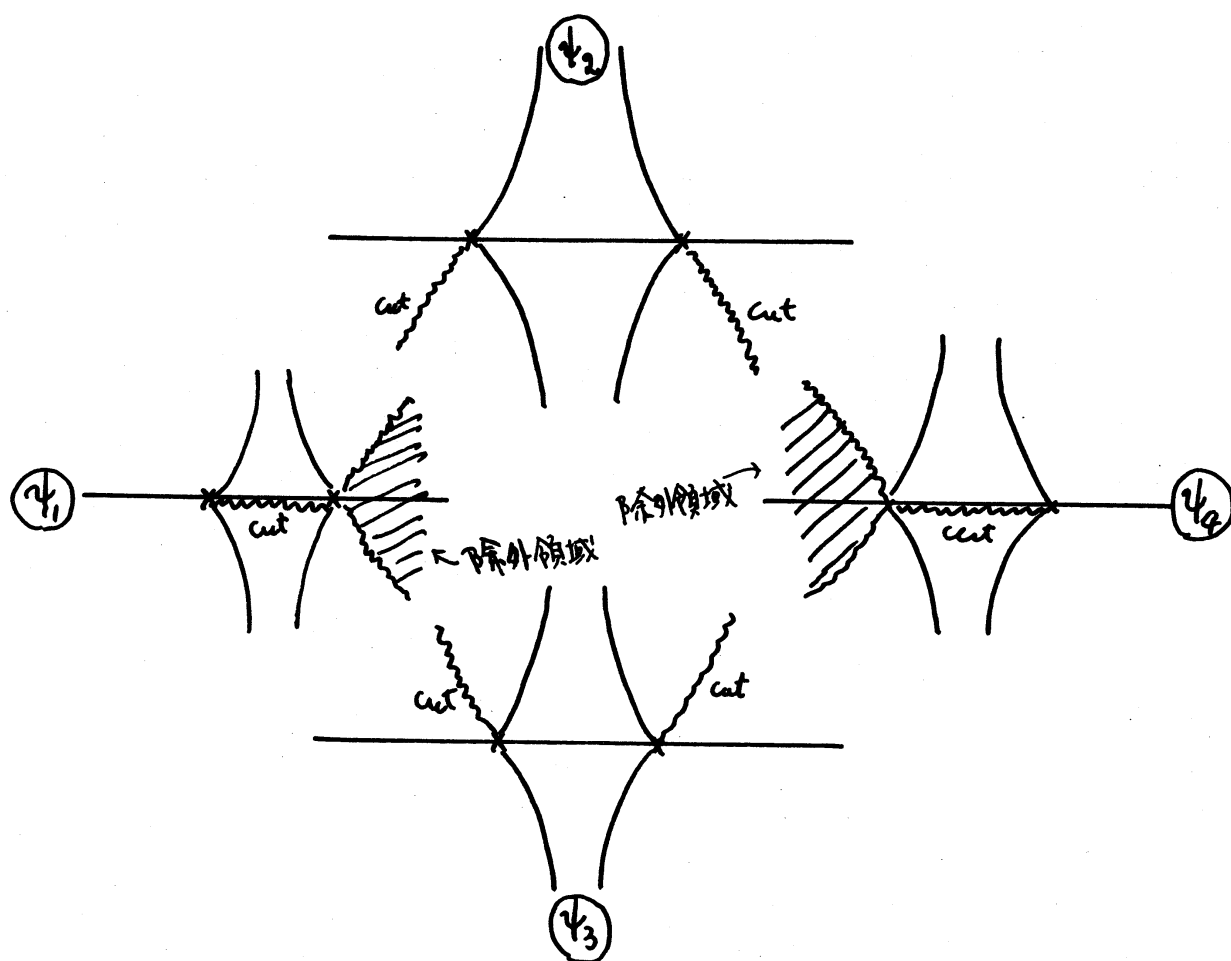


図 2.  $\psi_1, \dots, \psi_4$  の許容領域

という形のもものがきまる. ここで,  $(ds/dq)^{-1/2}$  の分枝は  $q=0$  で偏角が  $-\pi/4$  になるように選んでおく. (これはそれほど関係ない). 許容領域については図 2 を参照. この場合に限らず, 一般的に, 極大な許容領域の境界は (cut になる場合も含めて) 主曲線よりなる.

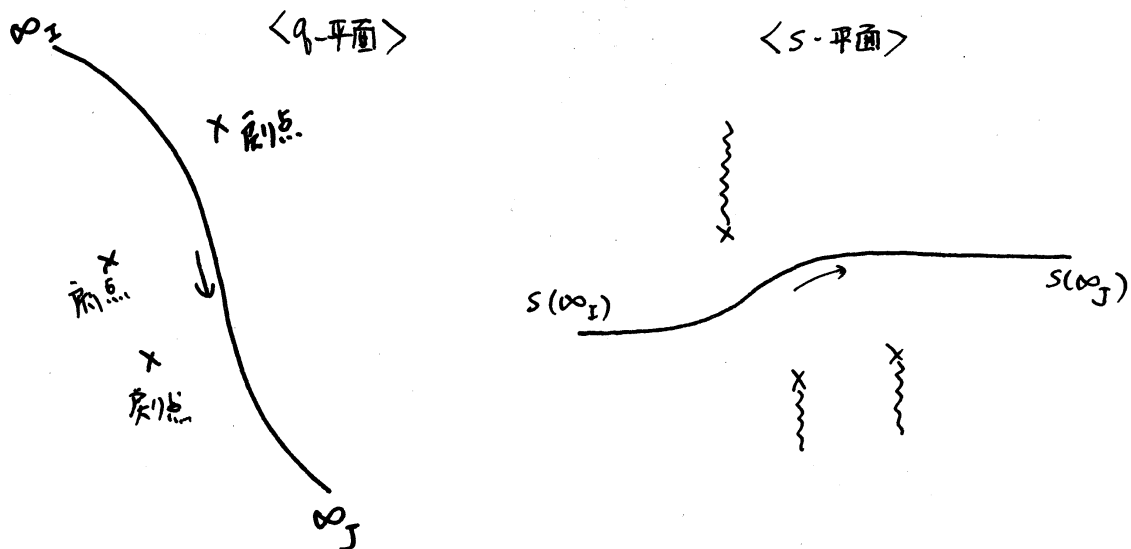
以上のような事実は Liouville 変換で方程式を  $s$ -平面上に移して解析することによりわかる. 次の節ではそれについて説明する.

#### 4. $s$ -平面上での解析 ( $w_I$ の構成, 函数項展開)

前節と同じ設定で考える.  $C(\infty_I, \infty_J)$  に対応する  $s$ -平面上の路を  $\Gamma(\infty_I, \infty_J)$  と記す. 以下, 話を簡単にするために

$$\Gamma(\infty_I, \infty_J) = \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$$



図 3.  $C(\infty_I, \infty_J)$  と  $\Gamma(\infty_I, \infty_J)$ 

の場合で説明するが、一般の場合も、実軸に沿う積分路を  $\Gamma(\infty_I, \infty_J)$  と読み替えれば全く同様に扱える。

$\psi_I, \psi_J$  という2つの解を得るためには Liouville 変換して  $s$ -平面上の線型方程式 (4) の二通りの解

$$\begin{aligned}\phi_I &= \phi_+ = w_+(s)e^{s\lambda}, \\ \phi_J &= \phi_- = w_-(s)e^{-s\lambda},\end{aligned}\tag{18}$$

で境界条件

$$w_{\pm}(\mp\infty) = 1\tag{19}$$

を満たすものをつくれればよい。これは散乱理論において“Jost 解”と呼ばれる解の構成法に習えばよい。 $w_{\pm}$  の満たす微分方程式

$$\frac{d^2 w_{\pm}}{ds^2} \pm 2\lambda \frac{dw_{\pm}}{ds} = h w_{\pm}\tag{20}$$

は境界条件を考慮すると次の積分方程式に書き換えられる。

$$\begin{aligned}w_+(s) &= 1 + \int_{-\infty}^s dt \frac{1 - e^{2(t-s)\lambda}}{2\lambda} h(t) w_+, \\ w_-(s) &= 1 + \int_s^{+\infty} dt \frac{1 - e^{2(s-t)\lambda}}{2\lambda} h(t) w_+.\end{aligned}\tag{21}$$

これを逐次代入法で解くと次のような多重積分表示を得る.

$$w_+(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_+^{(n)}(s),$$

$$w_+^{(n)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(22b)} dt_1 dt_2 \dots dt_n \prod_{i=1}^n \frac{h(t_i)(1 - e^{2(t_i - t_{i+1})\lambda})}{2\lambda}, \quad (22a)$$

$$-\infty < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} = s \quad (22b)$$

$$w_-(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_-^{(n)}(s),$$

$$w_-^{(n)}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{(23b)} dt_1 dt_2 \dots dt_n \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(1 - e^{2(t_i - t_{i+1})\lambda})h(t_{i+1})}{2\lambda}, \quad (23a)$$

$$s = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n < +\infty \quad (23b)$$

この級数の収束性を議論するポイントは、積分路の前進性にある（今の場合、前進性は積分路が実軸に沿っているから明らかだが）により被積分函数中の指数函数を含む部分が

$$|1 - e^{2(t_i - t_{i+1})\lambda}| \leq 2 \quad (24)$$

と抑えられることにある。このことから

●命題●  $w_{\pm}^{(s)}(s)$  は次の不等式を満たす.

$$|w_{\pm}^{(n)}(s)| \leq \frac{V_{\pm}(s)^n}{n!|\lambda|}, \quad V_{\pm}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mp}^s dt |h(t)|. \quad (25)$$

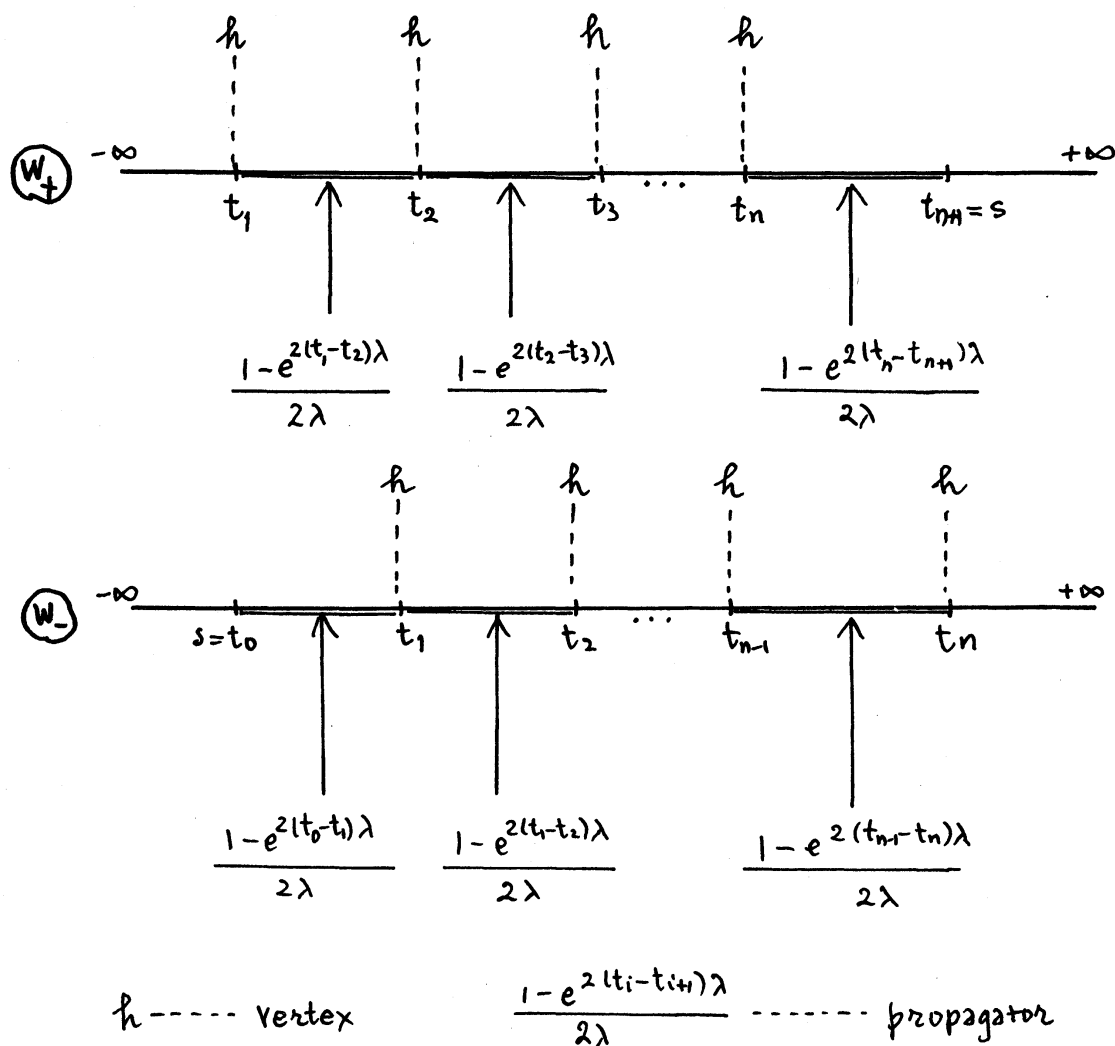
従って  $h(s) = O(|s|^{-2})$  である限り上の級数は収束し、得られた解は

$$|w_{\pm}(s) - 1| \leq \exp(V_{\pm}(s)/|\lambda|) - 1 \quad (26)$$

という不等式を満たす.

●注意●

1) 最初に注意したように、以上で説明した解の構成法は積分路が一般の前進的な路の場合にもそのまま通用する. 一般の無限遠点  $\infty_I$  とそれが定める許容領域における  $\psi_I$  の構成はこのようにして  $s$ -平面上の解析に書き換えて行われている. また,  $\lambda$  が一般の複素数の場合にも  $e^{s\lambda}$  に関する前進的な路をとれば同様で, 最後に得られる不等式評価も同じ形で成り立つ. (それを意識して敢えて  $|\lambda|$  と書いた.)

図 4.  $w_{\pm}$  の多重積分項展開のイメージ

2)  $\infty_{\pm}$  や  $\Gamma(\infty_I, \infty_J)$  を  $h(s)$  の特異点を横切らない範囲で連続的に動かしても得られる  $w_I, w_J$  に変化はない。(逐次代入の各段階で Cauchy の定理を使って積分路を変形する論法でわかる。)

最後に、境界値  $w_I(\infty_J)$  について考える。これも簡単のため  $s$ -平面の実軸に沿う場合について説明する。  $w_+(s)$  を定義する積分方程式を思い出す。ここで  $s \rightarrow +\infty$  とすると、簡単な  $\epsilon$ - $\delta$  論法 (Olver の本に説明してある) により、右辺の被積分函数のうち  $e^{2(t-s)\lambda}$  の

掛かっている部分が最終的には消えて、極限值が

$$w_+(+\infty) = 1 + (2\lambda)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt h(t) w_+(t) \quad (27)$$

で与えられることがわかる。同様にして

$$w_-(-\infty) = 1 + (2\lambda)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt h(t) w_-(t). \quad (28)$$

さらに  $\phi_{\pm}$  の Wronskian を調べる論法 (Olver の本では演習問題になっている) により、2つの境界値が一致することがわかる。

$$a \stackrel{\text{def}}{=} w_+(+\infty) = w_-(-\infty) \quad (29)$$

は散乱理論で “Jost 函数” または “透過係数” (の逆数) として知られている量である。

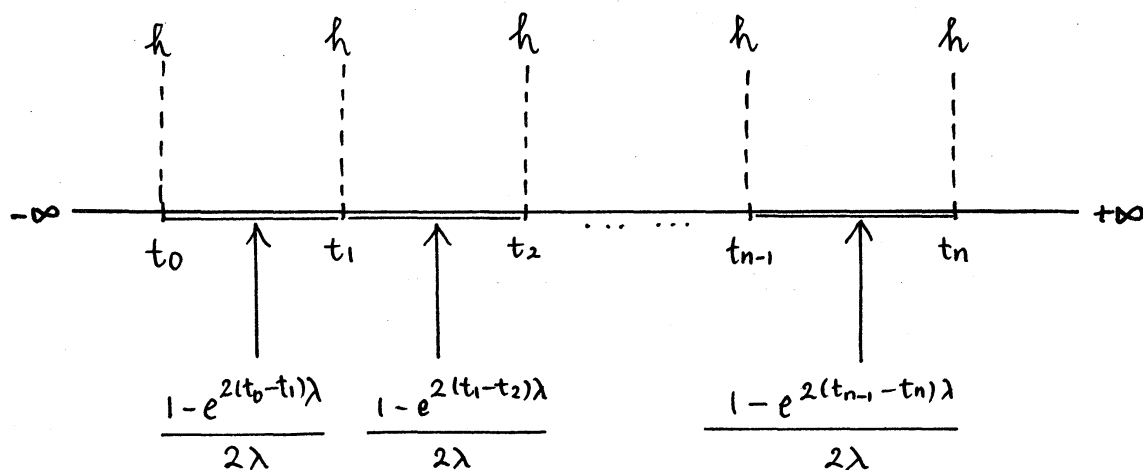
●注意● 正確に言えば、今の設定は散乱理論とは異なる。普通の散乱理論の状況はむしろ虚軸に平行な直線上で実現される。そのような直線上では (27), (28) のような単純な極限は存在せず、むしろ  $w_{\pm}$  は一般に振動する振る舞いを示す。そして (27), (28) にあたる成分と振動成分をうまく分離することにより  $a$  と  $b$  という2つの係数を定義することができる。特に  $b/a$  は “反射係数” と呼ばれる重要な量で、逆散乱理論で重要な役割を演じる。上のように前進的な路にそって  $w_{\pm}$  を追跡すると、 $b$  を含む部分が “subdominant” になって見えなくなるのである。

$w_+$  の多重積分による函数項展開を上積分関係式に代入することで  $a$  に対する同様の級数展開も得られる。 $w_-$  から得られる級数展開も同じ結果を与えることがわかる。これは2つの境界値が一致することの別証明を与える。とにかく、こうして次のことがわかる。

●命題●  $a = a(\lambda)$  は次の多重積分による函数項展開をもつ。

$$a = 1 + (2\lambda)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt h(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (2\lambda)^{-1} \int_{(30b)} dt_0 dt_1 \cdots dt_n h(t_0) \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(1 - e^{2(t_i - t_{i+1})\lambda}) h(t_{i+1})}{2\lambda}. \quad (30a)$$

$$-\infty < t_0 < t_1 < \cdots < t_n < +\infty \quad (30b)$$

図 5.  $a$  の多重積分項展開のイメージ

### 5. Laplace 積分表示とそこからの帰結

$\Gamma(\infty_I, \infty_J)$  が直線にとれる場合には前節で与えた函数項展開から Laplace 積分表示を引き出すことができる. 再び,  $\Gamma(\infty_I, \infty_J) = (-\infty, \infty)$  の場合で説明しよう.

まず  $w_+(s)$  の Laplace 積分表示を導く. ポイントは函数項展開の各項  $w_+^{(n)}(s)$  の積分表示式の中で指数函数を含む部分を

$$\frac{1 - e^{2(t_i - t_{i+1})\lambda}}{2\lambda} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} ds_i e^{2(s_i - t_{i+1})\lambda} \quad (31)$$

という恒等式を使って書き直すことである. このように補助的な変数  $s_1, \dots, s_n$  を導入して  $2n$  次元積分に書き直しておいてから, 積分変数を  $(t_i, s_i)$  から

$$\begin{aligned} x_i &= s_i - t_i, \\ y_i &= t_{i+1} - s_i \end{aligned} \quad (32)$$

で定義される  $(x_i, y_i)$  に取り替える. すると

$$w_+^{(n)}(s) = \int_{(33b)} dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_n \exp(-2 \sum_{i=1}^n y_i \lambda)$$

$$\times \prod_{i=1}^n h(s - \sum_{j=i}^n x_j - \sum_{j=i}^n y_j). \quad (33a)$$

$$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0 \quad (33b)$$

ここでさらに  $t = \sum y_i$  とくくって  $t$  についての積分を最後に行うことにすると, Laplace 積分の形になる. このようにして次のことがわかる.

●命題●  $w_+(s)$  は次のような Laplace 積分表示をもつ.

$$w_+(s) = 1 + \int_0^{+\infty} dt e^{-2t\lambda} W_+(s, t), \quad W_+(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_+^{(n)}(s, t), \quad (34a)$$

$$W_+^{(n)}(s, t) = \int_{(34c)} dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_n \prod_{i=1}^n h(s - \sum_{j=i}^n x_j - \sum_{j=i}^n y_j). \quad (34b)$$

$$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n y_i = t \quad (34c)$$

Laplace 積分の被積分函数の各項  $W_+^{(n)}(s, t)$  は次の不等式評価を満たす.

$$|W_+^{(n)}(s, t)| \leq \frac{V_+(s-t)t^{n-1}V_+(s)^{n-1}}{[(n-1)!]^2} \quad (t \geq 0). \quad (35)$$

●注意●

1) 最後の不等式評価により,  $W_+(s, t)$  を与える級数は収束し, かつ  $t$  について infra-exponential なことがわかる.

2) 散乱理論では  $W(s, t)$  は Gel'fand-Levitan-Marchenko の核函数として現れる.

同じようにして  $w_-(s)$  に対しても Laplace 積分表示が得られる.

●命題●  $w_-(s)$  は次のような Laplace 積分表示をもつ.

$$w_-(s) = 1 + \int_0^{+\infty} dt e^{-2t\lambda} W_-(s, t), \quad W_-(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_-^{(n)}(s, t), \quad (36a)$$

$$W_-^{(n)}(s, t) = \int_{(36c)} dx_0 \cdots dx_{n-1} dy_0 \cdots dy_{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} h(s + \sum_{j=0}^{i-1} x_j + \sum_{j=0}^{i-1} y_j). \quad (36b)$$

$$x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1} \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{n-1} y_i = t \quad (36c)$$

Laplace 積分の被積分函数の各項  $W_-^{(n)}(s, t)$  は次の不等式評価を満たす.

$$|W_-^{(n)}(s, t)| \leq \frac{V_-(s+t)t^{n-1}V_-(s)^{n-1}}{[(n-1)!]^2} \quad (t \geq 0). \quad (37)$$

ちなみに,  $W_{\pm}^{(n)}(s, t)$  に対して漸化式をつくることもできる.

●命題●  $W_{\epsilon}^{(n)}(s, t)$  ( $\epsilon = \pm$ ) は次の漸化式によって特徴づけられる.

$$\begin{aligned} W_{\epsilon}^{(1)}(s, t) &= \int_0^{+\infty} dx h(s - \epsilon x - \epsilon t). \\ W_{\epsilon}^{(n)}(s, t) &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^t dy h(s - \epsilon x - \epsilon y) W_{\epsilon}^{(n-1)}(s - \epsilon x - \epsilon y, t - y), \end{aligned} \quad (38)$$

特に,  $W_{\epsilon}(s, t)$  ( $\epsilon = \pm$ ) は次の積分方程式を満たす.

$$\begin{aligned} W_{\epsilon}(s, t) &= \int_0^{+\infty} dx h(s - \epsilon x - \epsilon t) \\ &\quad + \int_0^{+\infty} dx \int_0^t dy h(s - \epsilon y - \epsilon y) W_{\epsilon}(s - \epsilon x - \epsilon y, t - y). \end{aligned} \quad (39)$$

逆にこれを逐次代入法で解くと, 前述の多重積分項展開を再現する.

$a$  と  $w_{\pm}(s)$  を結ぶ前節の積分関係式に上の Laplace 積分表示を代入すると,  $a$  に対する Laplace 積分表示を得る.

●命題●  $a = a(\lambda)$  は次のような Laplace 積分表示を持つ.

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= 1 + (2\lambda)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt h(t) + (2\lambda)^{-1} \int_0^{+\infty} dt e^{-2t\lambda} A(t) \\ &= 1 + \int_0^{+\infty} dt e^{-2t\lambda} \tilde{A}(t), \end{aligned} \quad (40)$$

ここで

$$\begin{aligned} A(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} ds h(s) W_+(s, t), \\ \tilde{A}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} ds h(s) + \int_0^t ds A(s). \end{aligned} \quad (41)$$

一般に、このような Laplace 積分表示が得られると  $\lambda \rightarrow \infty$  における漸近的な性質がすぐに引き出せる。

●命題● Laplace 積分で定義される函数

$$f(\lambda) = \int_0^{+\infty} dt e^{-t\lambda} F(t)$$

は、 $F(t)$  に関する適当な増大度条件の下で、 $|\arg \lambda| < \pi/2$  という扇形領域に漸近する無限遠点の扇形近傍の上の正則函数を定め、かつ

$$f(\lambda) \sim \hat{f}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} F_n(n+1)!/\lambda^{n+1} \quad (\lambda \rightarrow \infty)$$

という漸近展開を持つ。ここで  $F_n$  は  $F(t)$  の  $t=0$  における Taylor 展開から読み取れる。

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n t^n.$$

実際にはこのようにして得られるのはただの漸近展開ではなくて“強漸近展開”と呼ばれる ( $\hat{f}(\lambda)$  を有限項で打ち切ったものと  $f(\lambda)$  との誤差がある不等式評価を満たす) ものになっている。このとき  $f(\lambda)$  は  $\hat{f}(\lambda)$  の Borel 総和であるという。もしも積分路上に  $F(t)$  の特異点が現れれば、そのままでは Laplace 積分が意味を持たないから、特異点を避けなければならない。実際によく行うのは積分路を少しだけ回転して特異点を避けることであるが、とにかく考えられる避け方がいろいろあるという意味で、不定性が生じる。これが Borel 総和可能性が破れる状況である。

$\Gamma(\infty_I, \infty_J)$  が実軸に平行な一般の直線の場合にも全く同様にして Laplace 積分表示が得られる。もしも実軸に対して一定の角度をなす直線から出発すると Laplace 積分表示として積分路が同じ角度だけ傾いたもの

$$\int_0^{e^{i\theta}\infty} dt e^{-t\lambda} (\dots) \quad (42)$$

が得られる。このとき強漸近展開は  $|\arg \lambda + \theta| < \pi/2$  という扇形領域に漸近する無限遠点の扇形近傍で与えられる。



$s$ -平面上で  $h(s)$  の特異点を避けるような直線積分路を選ぶことは幾何学的な問題である。積分路を特異点にぶつからないように連続的に変形している間は Laplace 積分のあらわす関数は同じものだが、特異点を横切るときには不連続的变化が生じる。このことを  $\arg \lambda$  の変化に関して詳しく追跡したのが Voros の仕事なのだ、という言い方もできる。そういうことをもっときちんと議論するためには、 $W_I(s, t)$  の  $s$  や  $t$  に関する解析接続を実行して、現れる特異点の位置などを決めなければならない。それを徹底すれば  $t$ -平面における Ecalle の意味の “resurgence” の証明にも行き着くはずである。

積分路を変形して  $W_I(s, t)$  などの解析接続を実行する作業が複雑なので、現時点では筆者はまだそこまでやりつくしていない。ただ、ここまでの議論だけからすぐにわかることとして、

●命題●  $\operatorname{Re} s(q)$  の gradient flow (つまり  $\operatorname{Im} s(q)$  が一定で  $\operatorname{Re} s(s)$  が単調増加するような曲線族のつくる flow) のうちで  $\infty_I$  の近傍から流れ出すもので到達できるような点は  $\infty_I$  の許容領域の部分集合をなすが、そのような点では  $w_I(s, \lambda)$  に対する (34) のような Laplace 積分表示が意味を持ち、 $W_I(s, t)$  は  $t \geq 0$  上に特異性を持たない。

言葉で説明してもわかりにくいので、一例を図で説明する (図 6)。この図の状況では  $\infty_I$  から出る Stokes 曲線の両側に  $\operatorname{Re} s(q)$  の gradient flow が流れている。これは次の Stokes 曲線 (別の戻り点にぶつかってさらに枝分かれすることもある想定している) で仕切られた領域 (Stokes 領域) をちょうど覆い尽くしている。 $s$  がこの領域にある限り、 $w_I$  に対して前述のような正の実軸に沿った Laplace 積分表示ができる。実際、 $C(\infty_I, q)$  を ( $\infty_I$  のとり方も含めて) 連続的に変形して、 $\operatorname{Re} s(q)$  の gradient flow に沿うものに変えられるからである。同様のことは  $w_J$  (つまり  $e^{-s\lambda}$  を指数関数部分に持つ場合) についてもいえる。2 本の Stokes 曲線が同じ無限遠点に向かって漸近するようなときにも同様に、 $\psi_I$  や  $\psi_J$  の recessive な領域から出てくる  $\operatorname{Re} s(q)$  の gradient flow が覆う Stokes 領域において前述の Laplace 積分表示ができる。これらの有効域ををはずれると、 $t$ -平面の正実軸上に特異性 ( $h(t)$  の特異性に由来する) が顔を出す。 $a_{IJ}$  についても同様のことが言える。その場合でも  $s$ -平面上の直線積分路を実軸から少し傾ければ、特異点を避ける Laplace 積分表示を得ることができる。このとき Laplace 積分路も同じ角度だけ (42) のように実軸から傾く。

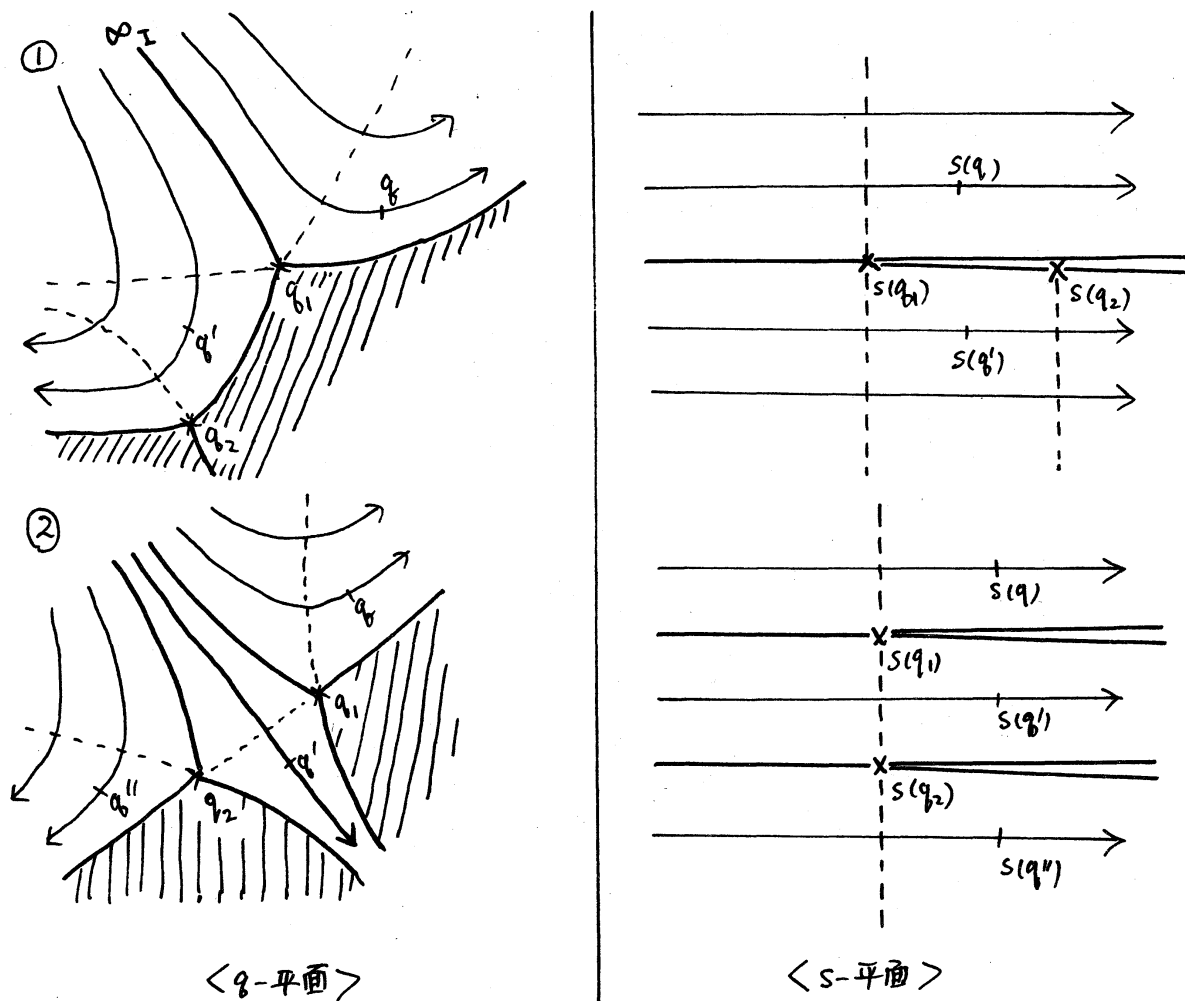


図 6.  $W_I(s, t)$  が  $t \geq 0$  上に特異点を持たない状況

## 6. 大域的接続問題の簡単な計算例

Olver の方法による接続公式の導出の考え方をいくつかの例で示す. 以下に示すのは典型的な例で, もっと複雑な場合も Stokes 曲線と主曲線の配置が描ければ大体において問題は解けることになっている. なお, どの例も  $\lambda > 0$  で考えている.

Olver の方法では 互いにそれぞれの許容領域をたどって到達できるような 3 個の無限遠点  $\infty_I, \infty_J, \infty_K$  の組に注目し, 対応する  $\psi_I, \psi_J, \psi_K$  の間の 1 次関係式を無限遠点での考察により決める. そのような 3 個ずつの接続関係 (いわば基本的接続公式) を組み合わせて行くことにより  $\psi_I$  全体の接続関係が決まって行く.

### ●例 0 : 基本的接続公式の一例

3本の Stokes 曲線  $S_I, S_J, S_K$  が共通の戻り点  $q_1$  を出てそれ以外の戻り点にぶつからずに無限遠点  $\infty_I, \infty_J, \infty_K$  に至っているような場合を説明しておく。(これは Olver の本に出ているもの。) 話を具体的にするため, 図のように cut を入れて  $s(q)$  の分枝を決めておく. ただし,  $\psi_I$  の許容領域は  $\infty_I$  の方からこの cut を越えて次の sheet へ入り込んでいるので注意が必要である.

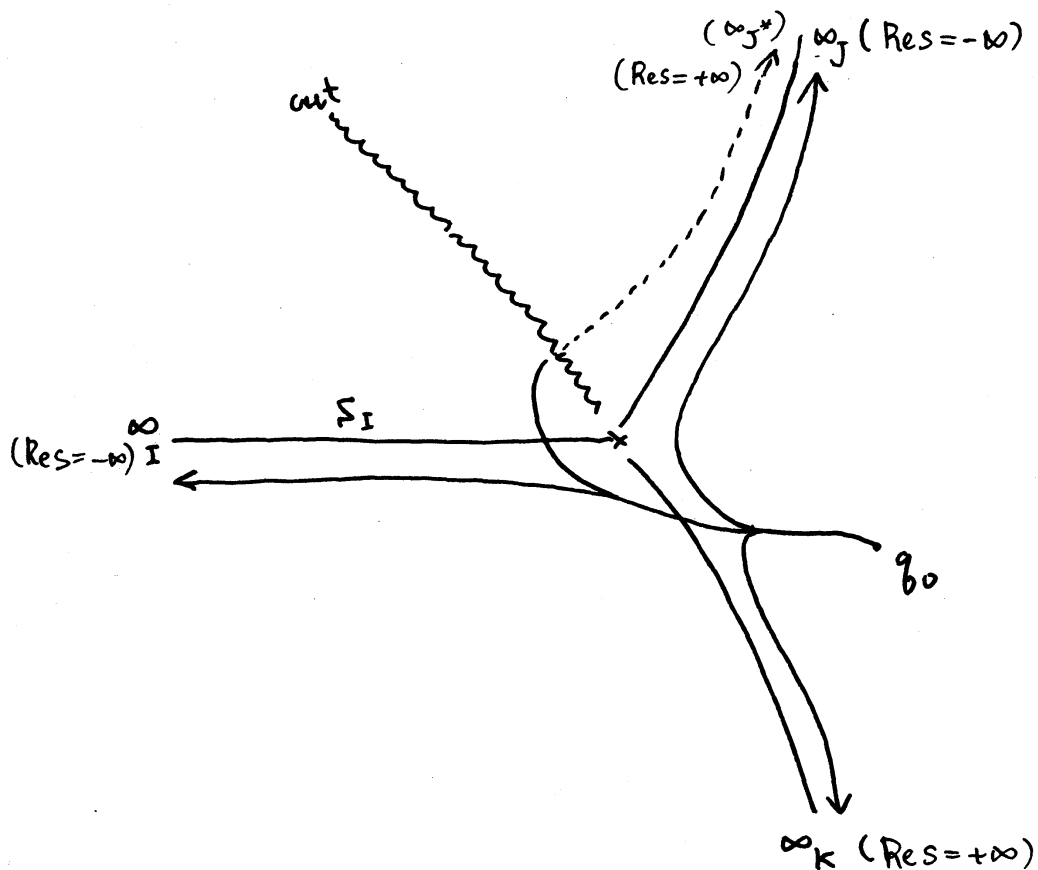


図 7. 基本的接続公式の一例 (例 0)

$$\operatorname{Re} s(\infty_I) = -\infty,$$

$$\operatorname{Re} s(\infty_J) = -\infty,$$

$$\operatorname{Re} s(\infty_K) = +\infty,$$

(43)

となっているので Liouville-Green 形の厳密解は

$$\psi_I = w_I(ds/dq)^{-1/2} e^{s\lambda}, \quad w_I(\infty_I) = 1,$$

$$\begin{aligned}\psi_J &= w_J(ds/dq)^{-1/2}e^{s\lambda}, \quad w_J(\infty_J) = 1, \\ \psi_K &= w_K(ds/dq)^{-1/2}e^{-s\lambda}, \quad w_K(\infty_K) = 1,\end{aligned}\tag{44}$$

という形になる. 求めるのは

$$\psi_I = c_{IJ}\psi_J + c_{IK}\psi_K \tag{45}$$

という形の1次関係式. この式の両辺を  $q \rightarrow \infty_J, \infty_K$  で考える. [もちろん3つの許容領域の共通部分を通して  $\infty_J, \infty_K$  へ接近する. この場合の許容領域は前述の  $f(q) = q^2 - E$  の場合の  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  と同様で,  $\psi_I, \psi_J, \psi_K$  のいずれに関しても3本の Stokes 曲線を全部含む.]  $q \rightarrow \infty_J$  においては

$$\begin{aligned}\psi_I &\sim ie^{2s(q_1)\lambda} \cdot w_I(\infty_J)(ds/dq)^{-1/2}e^{-s\lambda}, \\ \psi_J &\sim w_J(\infty_J)(ds/dq)^{-1/2}e^{s\lambda}, \\ \psi_K &\sim w_K(\infty_J)(ds/dq)^{-1/2}e^{-s\lambda},\end{aligned}\tag{46}$$

となっている. ここで,  $\psi_I$  の漸近形の最初の一組の因子は上で注意したような cut を越えるところでの  $s(q)$  のずれから出て来る.  $q \rightarrow \infty_K$  ではこういう問題はなく

$$\begin{aligned}\psi_I &\sim w_I(\infty_K)(ds/dq)^{-1/2}e^{s\lambda}, \\ \psi_J &\sim w_J(\infty_K)(ds/dq)^{-1/2}e^{s\lambda}, \\ \psi_K &\sim w_K(\infty_K)(ds/dq)^{-1/2}e^{-s\lambda},\end{aligned}\tag{47}$$

となる.  $e^{\pm s\lambda}$  のいずれが指数的に大きいかに注意して1次関係式を眺めれば,  $q \rightarrow \infty_J, \infty_K$  のいずれにおいても左辺は必ず指数的に大きく, 右辺の2つの項は一方が指数的に大きく, 他方は小さい. 指数函数をかけて定数が残るように極限をとることにより,  $c_{IJ}, c_{IK}$  を決める関係式が得られる. 結果として

$$\psi_I = \frac{a_{IK}}{a_{JK}}\psi_J + i\frac{a_{IJ}e^{2\omega\lambda}}{a_{JK}}\psi_K \tag{48}$$

という接続公式を得る. ここで

$$a_{IJ} \stackrel{\text{def}}{=} w_I(\infty_J), \quad \text{etc...}, \tag{49}$$

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} s(q_1) = \int_{q_0}^{q_1} dq f(q)^{1/2}, \tag{50}$$

とおいた。また  $a_{JK} = a_{KJ}$  という関係式をつかって分母を揃えた。

●注意●正確に言えば、 $a_{IJ}$  の定義では cut を越える前進路をとらなければならないから、 $\infty_J$  ではなくて別の sheet にある無限遠点 ( $\infty_J$  と区別して  $\infty_{J^*}$  とでも書くべき) で境界値を考えることになる。対応する  $a$ -係数は  $a_{IJ^*}$  と記すべきもの。同じことは、ここでは使っていないが、 $a_{JI}$  についても言える。これも  $\infty_J$  の側から cut を越える前進路に関して定義されるので  $a_{JI^*}$  とでも記すべき。しかし、このように Riemann 面上の路が異なるにもかかわらず、実は  $a_{IJ^*} = a_{JI^*}$  となる。(これは接続公式の分析からもわかるし、多重積分項展開からもわかる。) また  $\infty_I$  から  $\infty_J$  へ向かう前進路はもともと cut を越えるものしかない。そういう訳で、単に  $a_{IJ}$ ,  $a_{JI}$  と書いても大した混乱は起きないだろう。

●例1：調和振動子  $f(q) = q^2 - E$ ,  $E > 0$

幾何学的な状況はすでに第3節で説明した通り。  $\psi_1, \dots, \psi_4$  をそこで導入した Liouville-Green 型の解とする。基本的な状況は例0の方法を適用できるものになっている。さらに  $a_{IJ}$  に対する多重積分項展開で積分路を変形して無限遠方に追いやる論法 (Olver の本に書いてある) から

$$a_{12} = a_{13} = a_{42} = a_{43} = 1 \quad (51)$$

となることがわかる。(従って、今の場合自明でない  $a_{IJ}$  は  $a_{23} = a_{32}$  のみ。) これらに注意すると、次のような接続公式が得られる。

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{a_{23}} \psi_2 + i \frac{e^{-\pi i E \lambda / 4}}{a_{23}} \psi_3, \\ \psi_4 &= i \frac{e^{-\pi i E \lambda / 4}}{a_{23}} \psi_2 + \frac{1}{a_{23}} \psi_3. \end{aligned} \quad (52)$$

これから、特に、

$$\psi_1 \propto \psi_4 \Leftrightarrow 1 + e^{-\pi i E \lambda / 4} = 0 \quad (53)$$

となり、よく知られた調和振動子の固有値

$$E\lambda = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (54)$$

を再現する。(  $E < 0$  にはもともと固有値はない。 )

最後の事実は次のようにも定式化できる。いま  $q$ -平面の“実軸上の Jost 函数”  $a = a(\lambda, E)$  を、散乱理論の設定に習って、

$$\psi_1 \sim a(ds/dq)^{-1/2} e^{s\lambda} \quad (q \rightarrow +\infty) \quad (55)$$

で定義する。(図に示した cut を避けて  $+\infty$  に向かう。) 接続公式導出の副産物として  $a$  を計算することができる。その結果は

$$a = \frac{1 + e^{-\pi i E \lambda / 4}}{a_{23}}. \quad (56)$$

$a$  の零点は固有値であり、従って再び同じ結論に至る。[  $E < 0$  では Stokes 曲線の配置が変わり、 $\infty_4$  は  $\psi_1$  の許容領域の境界に入ってくる。その結果、Voros の論文を見てもわかるように、 $a = a_{14}$  となる。]

$a_{23}$  に対しては、 $q$ -平面の虚軸がちょうど  $s$ -平面上で実軸に対応し、その上で前述のように多重積分表示や Laplace 積分表示を作れる。従って  $\arg \lambda = 0$  を中心とする開き  $\pi$  の扇形領域で強漸近展開をもつ。いいかえれば、漸近級数の Borel 総和可能性が成り立っている。

●例 2 : 4 次振動子  $f(q) = (q^2 - \alpha^2)(q^2 + \beta^2)$ ,  $\alpha > 0, \beta > 0$

戻り点は  $q = \pm\alpha, \pm i\beta$  の 4 点で、Stokes 曲線などの様子は図 8 の通り。  $s(q)$  を次で定義している。

$$s(q) = \int_0^q dq f(Q)^{1/2}, \quad f(Q=0)^{1/2} = +i\alpha\beta. \quad (57)$$

戻り点での値は

$$\begin{aligned} s(\pm\alpha) &= \pm i\omega_1, \quad \omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\alpha dt \sqrt{(\alpha^2 - t^2)(\beta^2 + \beta^2)} > 0, \\ s(\pm i\beta) &= \mp \omega_2, \quad \omega_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\beta dt \sqrt{(\alpha^2 + t^2)(\beta^2 - t^2)} > 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Stokes 曲線は  $q = \pm i\beta$  を結ぶ有限のものが 1 本で、あとは無限遠に延びるものが 10 本あるが、そのうち 8 本は同じ無限遠点に向かって漸近するもの同志が対をなしている。これらの無限遠点を  $\infty_2, \infty_3, \infty_4, \infty_5$  とおく。残りの 2 本 (実軸に沿っている) の向かう無限遠点 ( $q = \pm\infty$ ) を  $\infty_1, \infty_6$  と名付ける。これらの無限遠点に付随する Liouville-Green 型の解は

$$\begin{aligned} \psi_I &= w_I (ds/dq)^{-1/2} e^{s\lambda} \quad (I = 1, 2, 4), \\ \psi_I &= w_I (ds/dq)^{-1/2} e^{-s\lambda} \quad (I = 3, 5, 6), \\ w_I(\infty_I) &= 1. \end{aligned} \quad (59)$$

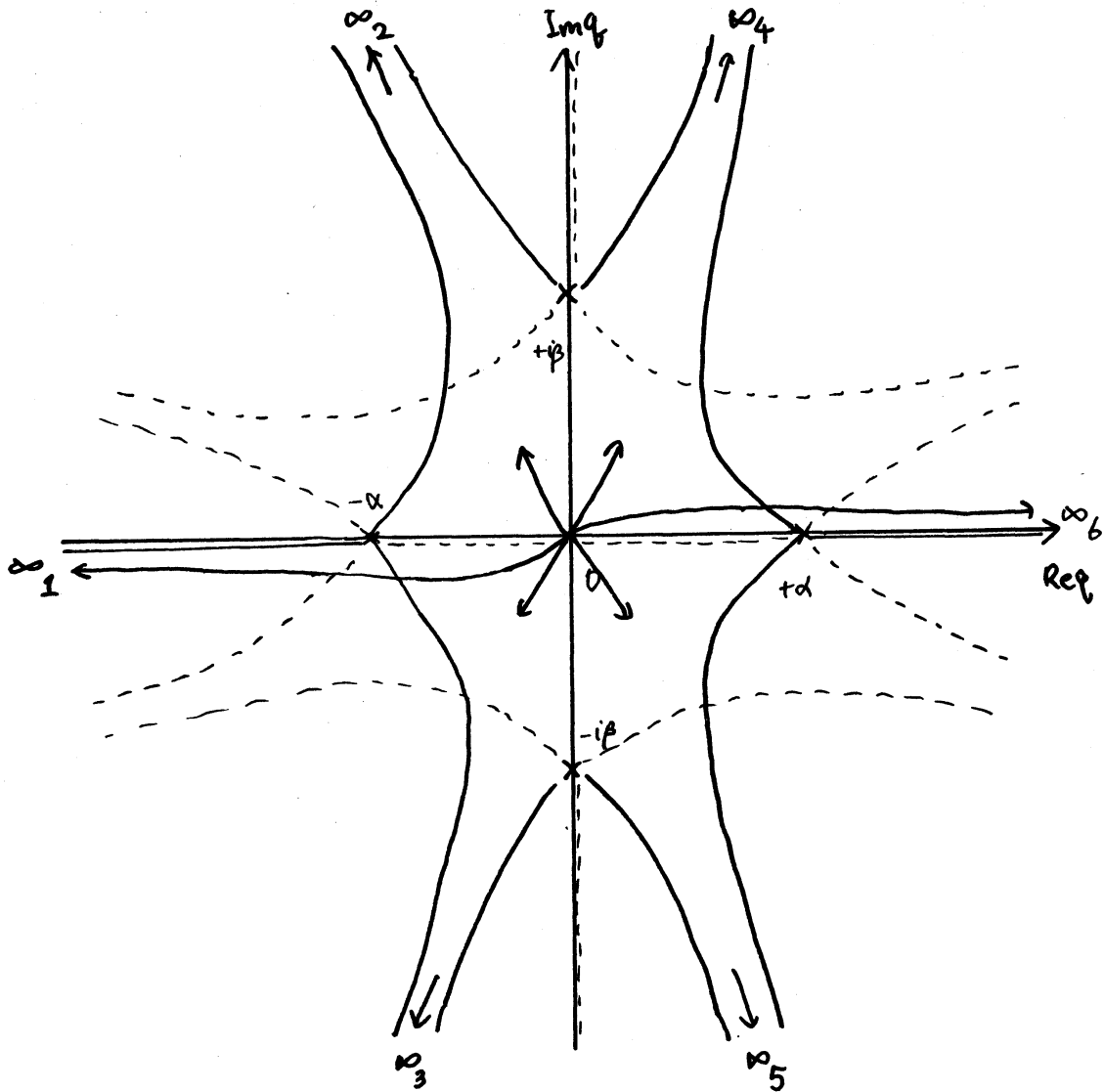


図 8. 4次振動子 (例 2)

今の場合, Stokes 曲線の様子は例 0 で扱ったものとは異なる (Voros が例外的な場合とみなす) ものになっているが, 許容領域の重なり具合を確かめつつ無限遠での振る舞いを比較することはまったく同じようにできる. 比較する無限遠点をいろいろ取り替えると, 次のような接続公式を得る.

$$\psi_1 = \frac{1}{a_{23}} \psi_2 + i \frac{e^{-2i\omega_1\lambda}}{a_{23}} \psi_3, \quad (60.1)$$

$$\psi_2 = \frac{a_{25}}{a_{45}} \psi_4 + i \frac{e^{-2\omega_2\lambda}}{a_{45}} \psi_5, \quad (60.2)$$

$$\psi_3 = -i \frac{e^{2\omega_2\lambda}}{a_{45}} \psi_4 + \frac{a_{34}}{a_{45}} \psi_5, \quad (60.3)$$

$$\psi_4 = \frac{a_{34}}{a_{23}}\psi_2 - i\frac{e^{2\omega_2\lambda}}{a_{23}}\psi_3, \quad (60.4)$$

$$\psi_5 = i\frac{e^{-2\omega_2\lambda}}{a_{23}}\psi_2 + \frac{a_{25}}{a_{23}}\psi_3, \quad (60.5)$$

$$\psi_6 = i\frac{e^{-2i\omega_1\lambda}}{a_{45}}\psi_4 + \frac{1}{a_{45}}\psi_5. \quad (60.6)$$

ただし,  $a_{IJ} =_{\text{def}} w_I(\infty_J)$ . (60.2-3) と (60.4-5) は矛盾してはならないはずで, 無矛盾性の条件を書いてみると

$$a_{34}a_{25} - a_{23}a_{45} = e^{-4\omega_2\lambda} \quad (61)$$

という関係式を得る. 後で述べるように, この種の関係式は Voros の計算結果 (discontinuity formula, Voros 代数) と密接な関係があるらしい.

$q$ -平面の実軸上の Jost 函数  $a = a(\lambda)$  は次のようになる.

$$a = \frac{a_{25} + e^{-4i\omega_1\lambda}a_{34} + 2e^{-2(\omega_2+i\omega_1)\lambda}}{a_{23}a_{45}}. \quad (62)$$

この式の分子は少しバランスが悪いが, これは  $\psi_1, \psi_6$  の選び方によるもので, 位相因子を少しずらして

$$ae^{2i\omega_1\lambda} = \frac{e^{2i\omega_1\lambda}a_{25} + e^{-2i\omega_1\lambda}a_{34} + 2e^{-2\omega_2\lambda}}{a_{23}a_{45}} \quad (63)$$

と書いてやるとなにかもっともらしい形になる.

$a_{IJ}$  の Laplace 積分表示については以下のようなことが言える.  $a_{23}$  と  $a_{45}$  に対しては  $s$ -平面上で実軸に平行な直線の前進的積分路が  $\infty_2$  と  $\infty_3, \infty_4$  と  $\infty_5$  の間にあるので, Laplace 積分表示としては積分路を正の実軸に選んだものが作れる. これに対して,  $a_{25}$  と  $a_{34}$  については  $s$ -平面の実軸から少しだけ傾けないと直線の前進的積分路がとれないので, Laplace 積分も積分路を少し傾けたものになる. もう少し正確に言えば,  $a_{25}$  は  $0 < \theta < \pi/4$  という  $\theta$  について, また  $a_{34}$  は  $0 > \theta > -\pi/4$  という  $\theta$  について (42) の形の Laplace 積分表示をもつ. ( $\pi/4$  という数字は Stokes 曲線の位相的な配置が変化を起こさない範囲として出て来る [3].) これらは Stokes 曲線の配置とか  $\text{Re } s(q)$  の gradient flow の流れ方を見ればわかる.

このことと (61) 式を見比べると面白いことがわかる. いま (61) を次のように書き直してみる.

$$a_{34} = \frac{a_{23}a_{45}}{a_{25}} + \frac{e^{-4\omega_2\lambda}}{a_{25}}. \quad (61.1)$$



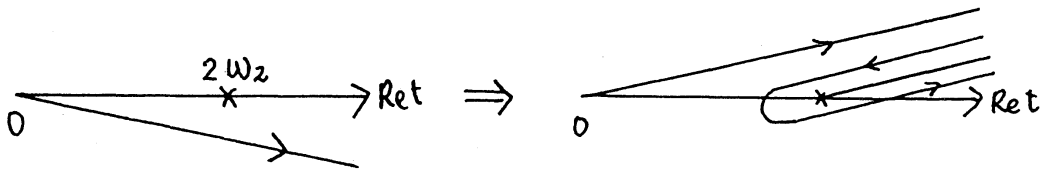
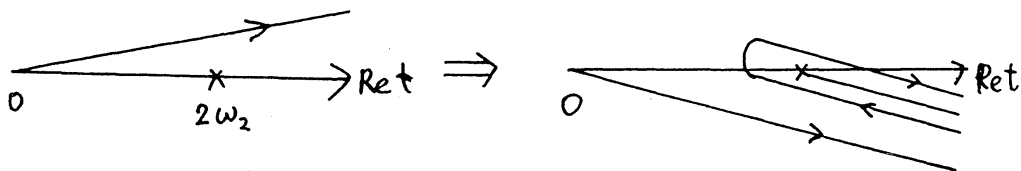
(A<sub>34</sub>)(A<sub>25</sub>)

図 9. (61.1), (61.2) の解釈

この式の左辺は Laplace 積分表示として正実軸を少し下に回転した積分路をもつ。  $A_{34}(t)$  は  $t > 0$  の下側 (偏角  $0^\circ$  から  $-45^\circ$  まで) で正則。他方、右辺では  $e^{-4\omega_2\lambda}$  以外の各因子は正実軸を少し上に回転した積分路の Laplace 積分を持つ。さて、ここで左辺の Laplace 積分表示から積分路を少しずつ上側へ回転することを考える。(これは  $A_{34}(t)$  を  $t > 0$  の下側から解析接続することに対応する。) 積分路を回転して実軸を越えるところまで行くと、特異点をまわる周回積分がおつりとして現れるはず。(61.1) の右辺第 2 項の存在はまさに  $t = 2\omega_2$  でそのような特異点が現れていることを示している。状況は図 9 で示したようになっているらしい。今度は (61) を

$$a_{25} = \frac{a_{23}a_{45}}{a_{34}} + \frac{e^{-4\omega_2\lambda}}{a_{34}} \quad (61.2)$$

というように書き直してみよう。(61.1) と同じように、この式は  $A_{25}$  を  $t > 0$  の上側から解析接続するとき  $t = 2\omega_2$  で特異点が現れることを示している。このように、特異点のまわりでの解析接続の状況は  $a_{ij}$  達の間の代数的な関係式として記述できる。これは確かに Voros の主張と一致しているし、Ecalte の言うところの本来の意味の “resurgence” (特異

点のまわりでの discontinuity や alien derivation をとる演算で一連の関数が閉じていること) も実現している。

●例3 : 4次振動子  $f(q) = (q^2 - \alpha^2)(q^2 - \beta^2)$ ,  $\alpha > \beta > 0$

戻り点は  $q = \pm\alpha, \pm\beta$  ですべて実軸上にある。(実軸上でみれば, いわゆる二重井戸になっている。)  $s(q)$  を次のように定義する。

$$s(q) = \int_0^q dQ f(Q)^{1/2}, \quad f(Q=0)^{1/2} = \alpha\beta > 0. \quad (63)$$

戻り点での  $s(q)$  の値は

$$\begin{aligned} s(\pm\alpha) &= \pm(\omega_4 + i\omega_3), \quad \omega_3 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\beta dt \sqrt{(\beta^2 - t^2)(\alpha^2 - t^2)} > 0, \\ s(\pm\beta) &= \pm\omega_4, \quad \omega_4 \stackrel{\text{def}}{=} \int_\beta^\alpha dt \sqrt{(t^2 - \beta^2)(\alpha^2 - t^2)} > 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Stokes 曲線などの様子は遠方では例2と同じなので, 無限遠点  $\infty_I$ ,  $I = 1, \dots, 6$  を同じようにとる. Liouville-Green 型の解の形も同じ. 例2の6個の接続公式にあたるものを求めると, 次のようになる。

$$\psi_1 = \frac{1}{a_{23}} \psi_2 + i \frac{e^{-2(\omega_4 + i\omega_3)\lambda}}{a_{23}} \psi_3, \quad (65.1)$$

$$\psi_2 = \frac{a_{25}}{a_{45}} \psi_4 + i \frac{e^{2\omega_4\lambda}}{a_{45}} \psi_5, \quad (65.2)$$

$$\psi_3 = -i \frac{e^{2\omega_4\lambda}}{a_{45}} \psi_4 + \frac{e^{4\omega_4\lambda} a_{34}}{a_{45}} \psi_5, \quad (65.3)$$

$$\psi_4 = \frac{e^{4\omega_4\lambda} a_{34}}{a_{23}} \psi_2 - i \frac{e^{2\omega_4\lambda}}{a_{23}} \psi_3, \quad (65.4)$$

$$\psi_5 = i \frac{e^{2\omega_4\lambda}}{a_{23}} \psi_2 + \frac{a_{25}}{a_{23}} \psi_3, \quad (65.5)$$

$$\psi_6 = i \frac{e^{-2(\omega_4 + i\omega_3)\lambda}}{a_{45}} \psi_4 + \frac{1}{a_{45}} \psi_5. \quad (65.6)$$

(65.2-3) と (65.4-5) の無矛盾性の条件から

$$a_{25} a_{34} - a_{23} a_{45} e^{-4\omega_4\lambda} = 1 \quad (66)$$

という関係式がでてくる。

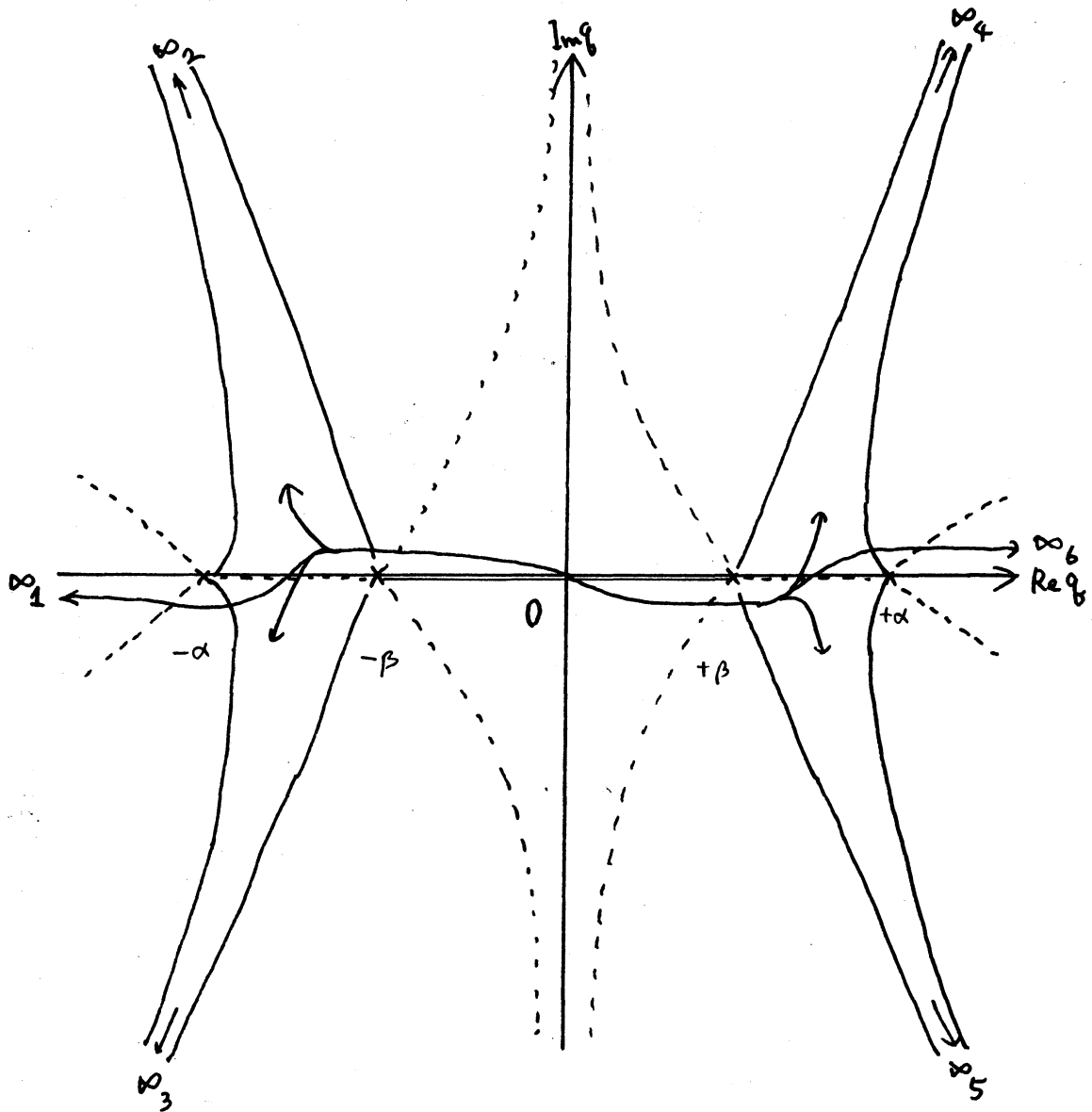


図 10. 4 次振動子 (例 3)

$q$ -平面の実軸上の Jost 函数  $a = a(\lambda)$  は

$$a = \frac{a_{25} + a_{34}e^{-4i\omega_3\lambda} + 2e^{-2i\omega_3\lambda}}{a_{23}a_{45}}. \quad (67)$$

これもまた,

$$ae^{2i\omega_3\lambda} = \frac{a_{25}e^{2i\omega_3\lambda} + a_{34}e^{-2i\omega_3\lambda} + 2}{a_{23}a_{45}} \quad (68)$$

というように位相因子だけずらして眺めた方がよいらしい。Jost 函数の表示に  $e^{\pm 2i\omega_3\lambda}$  という,  $\lambda \rightarrow 0$  に関して “subdominant” でない指数函数しか現れないのは一見 “トンネル効果” (2つのポテンシャル井戸の間でおこる量子論的效果) の存在と矛盾するようにも思

えるが、よく見ると、 $a_{IJ}$  の間の 2 次関係式のなかに  $e^{-4\omega_4\lambda}$  という “subdominant” な項が入っている。これがまわりまわってトンネル効果に寄与するらしい。

$a_{IJ}$  の Laplace 積分表示についても例 2 と同様のことが言える。

[September 1990]

### 参考文献

- [1] W. Wasow, Linear turning point problem, Springer-Verlag 1985.
- [2] F.W.J. Olver, Asymptotics and special functions, Academic Press 1974.
- [3] A. Voros, The return of quartic oscillator, Ann. Inst. H. Poincaré, Section A, 39 (1983), 211-338.
- [4] E. Delabaere, H. Dillinger, and F. Pham, Développements semi-classiques exacts des niveau d'énergie d'un oscillateur à une dimension, C. R. Acad. Sci. Série I, 310 (1990), 141-146.
- [5] J. Ecalle, Les fonctions résurgentes, I-III, Publ. Math. Orsay 1981, 1985.
- [6] C. Gérard and A. Grigis, Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential varrier, J. Diff. Eq. 72 (1985), 149- .
- [7] A. Grigis, Sur l'équation de Hill analytique, Sem. Bony-Sjöstrand-Meyer 1984/85; Estimations asymptotique des intervalles d'instabilité pour l'équation de Hill, pre-print 1987.