

線形擬周期的微分方程式のグリーン関数について

京大 数研 占部 実

§1. 序

与えられた線形擬周期的微分方程式を

$$(E_0) \quad \frac{dx}{dt} = P(t)x + r(t)$$

とする。ただし

$$P(t) = A(t, t, \dots, t), \quad r(t) = b(t, t, \dots, t)$$

とし, $A(u_1, u_2, \dots, u_m), b(u_1, u_2, \dots, u_m)$ は $u_1, u_2, \dots, u_m$ に関し連続微分可能で, これらに関しそれぞれ周期 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ をもち, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ は互に *incommensurable* であるとする。

(E_0) に対応してつきの一階偏微分方程式を考える:

$$(E) \quad Dx = A(u_1, u)x + b(u_1, u).$$

ただしここで $u = (u_2, u_3, \dots, u_m)$ で,

$$D = \frac{\partial}{\partial u_1} + \sum_{i=2}^m \frac{\partial}{\partial u_i}$$

である。ゆえゆえは (E_0) の擬周期解に対して (E) の周期解 $x(u_1, u)$, すなわち

$$\begin{cases} x(u_1 + \omega_1, u) = x(u_1, u), \\ x(u_1, \dots, u_i + \omega_i, \dots) = x(u_1, u) \quad (i=2, 3, \dots, m) \end{cases}$$

となるものを求める。

(E) に対しては, 任意の $\psi(u) \in C_u^1$ を与えると, $x(0, u) = \psi(u)$ となる解 $x(u_1, u)$ がつねに一つただ一つ存在する。したがって, (E) に対しては線形常微分方程式と同様であることが成立する。

すなわち, (E) に対して線形同次方程式

$$(1.1) \quad Dy = A(u_1, u)y$$

を考えると, これに対して基本行列 $\Phi(u_1, u)$, すなわち, $D\Phi = A(u_1, u)\Phi$ をみたし, しかも $\det \Phi(u_1, u)$ が決して 0 にならないような行列 $\Phi(u_1, u)$ が存在する。いま, (1.1) の任意の基本行列を $\Phi(u_1, u)$ としよう。すると, (1.1) の任意の解 $y(u_1, u)$ は

$$y(u_1, u) = \Phi(u_1, u) c(u - u_1)$$

で与えられ, また $D\Phi = A(u_1, u)\Phi$ をみたす任意の行列 $\Phi(u_1, u)$ は

$$\Phi(u_1, u) = \Phi(u_1, u) C(u - u_1)$$

で与えられる。ただしこのとき, $c(u)$, $C(u)$ はそれぞれ u に関して 1 回連続微分可能である。

また, 常微分方程式の場合と同じく, (1.1) の任意の基本行列を $\Phi(u_1, u)$ とすると, 定数変化法によって, (E) の任意の解は

$$(1.2) \quad x(u_1, u) = \Phi(u_1, u) c(u - u_1) + \Phi(u_1, u) \int_0^{u_1} \Phi^{-1}(s, u - u_1 + s) ds$$

で与えられることがわかる。

以下, われわれは (1.1) の基本行列で, $u_1 = 0$ のとき単位行列になるものを選び, それを $\Phi(u_1, u)$ で表わすことにする。このような $\Phi(u_1, u)$ に対しては, $A(u_1, u)$ が周期的であることから, つぎの等式が成り立つ:

$$(1.3) \begin{cases} \Phi(u_1 + \omega_1, u) = \Phi(u_1, u) \Phi(\omega_1, u - u_1), \\ \Phi(u_1, \dots, u_i + \omega_i, \dots) = \Phi(u_1, u) \quad (i=2, 3, \dots, m). \end{cases}$$

(E) の解 $x(u_1, u)$ を (1.2) の形で表わすとき, 容易にわかるように, この解が周期的であるための必要十分条件は, $c(u)$ が "つき" の方程式をみたすことである:

$$(\alpha) \quad c(u + \omega_1) = \Phi(\omega_1, u + \omega_1) c(u) + \Phi(\omega_1, u + \omega_1) \int_0^{\omega_1} \Phi^{-1} b(s, u + s) ds,$$

$$(\beta) \quad c(\dots, u_i + \omega_i, \dots) = c(u) \quad (i=2, 3, \dots, m).$$

かくて, (E) の周期解を求める問題は, 上の方程式をみたす $c(u)$ を求める問題になる。

ここでは, 若干の条件のもとで, 上の方程式 (α), (β) をみたす $c(u)$ を求め, その条件のもとでは, (E) の周期解が

$$(1.4) \quad x(u_1, u) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u_1, u, s) b(s, u - u_1 + s) ds$$

で与えられることを示す. (1.4) の積分の中 = 現われるとい
る $G(u, u, \Delta)$ がグリーン関数で, このあらわな形,
およびそのノルムの評価式も与える.

§2. 周期解を求める $c(u)$ に対する必要条件

帰納法によって, 方程式 (1) から (5) の方程式が容易に
導かれる:

$$\begin{aligned} (8) \quad c(u + p\omega_1) &= \Phi(p\omega_1, u + p\omega_1) c(u) \\ &\quad + \Phi(p\omega_1, u + p\omega_1) \int_0^{p\omega_1} \Phi^{-1}(s, u+s) ds \\ &\quad (p=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

ここで, つぎの補題を用いる.

補題 $k(>0)$ は $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k (>0)$ と
incommensurable であるとする. すると,

$$p_1 < p_2 < \dots < p_i < \dots \rightarrow \infty$$

で, $p_i \rightarrow \infty$ のとき

$$(2.1) \quad p_i h \rightarrow 0 \pmod{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k}$$

とるる, 正の整数の列 $\{p_i\}$ が存在する。

(2.1) は, 任意の正数 ε に対して正の整数 j_0 が存在し, $j \geq j_0$ であればつねに

$$|p_i \pi - m_{ij} \omega_j| < \varepsilon \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

が整数 m_{ij} に対して成り立つ, とするを意味している。

上の補題によって, 以下の4)の場合には,

$$p_1 < p_2 < \dots < p_i < \dots \rightarrow \infty$$

で, $p_i \rightarrow \infty$ のとき

$$(2.2) \quad p_i \omega_1 \rightarrow 0 \pmod{\omega_2, \dots, \omega_m}$$

とるる正の整数の列 $\{p_i\}$ が存在する。このような $\{p_i\}$ に対して, つぎのことに仮定する:

仮定 (A): p_i が十分大きいときは, ある u に対して

$$\| [E - \Phi(p_i \omega_1, u + p_i \omega_1)]^{-1} \| \leq K < \infty$$

が成立する。

すると、ゆえゆえはつき'の定理を得る:

定理 1. 上の仮定が成り立つときは、方程式' (α), (β)
をみたす $c(u)$ は、存在すれば"ただ"一つで、それに対して
は

$$(2.3) \quad c(u) = \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(u)$$

が成立する。ただし

$$(2.4) \quad c_i(u) = [E - \Phi(p_i \omega_1, u + p_i \omega_1)]^{-1} \Phi(p_i \omega_1, u + p_i \omega_1) \times \\ \times \int_0^{p_i \omega_1} \Phi^{-1} b(s, u + s) ds$$

である。

逆に、上の仮定が成り立つときに、もし $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i(u)$ が
存在するならば、 $c(u) = \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(u)$ は方程式' (α),
(β) をみたす。

【証明】 定理の前半は、方程式' (α) から、すぐでてく
る。

後半を証明するのには、まず $c_i(u + \omega_1)$ を計算する。

すると、つぎの結果を得る:

$$\begin{aligned} c_i(u+\omega_i) &= \Phi_i(u) [E + T_i(u)] \left[c_i(u) + \int_0^{\omega_i} \Phi^{-1} b(\Delta, u+\Delta) d\Delta \right] \\ &\quad + \Phi_i(u) [E + T_i(u)] [E - \Phi(p_i \omega_i, u + p_i \omega_i)]^{-1} \times \\ &\quad \times \int_0^{\omega_i} [\Phi^{-1} b(\Delta, u + p_i \omega_i + \Delta) - \Phi^{-1} b(\Delta, u + \Delta)] d\Delta. \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} T_i(u) &= [\Phi_i(u) - \Phi_{p_i+1}(u) \Phi(p_i \omega_i, u + p_i \omega_i)]^{-1} \times \\ &\quad \times [\Phi_{p_i+1}(u) - \Phi_i(u)] \end{aligned}$$

で、 $\Phi_r(u) = \Phi(\omega_i, u + r\omega_i)$ である。 $p_i \rightarrow \infty$ のとき、

$$\Phi_{p_i+1}(u) = \Phi(\omega_i, u + \omega_i + p_i \omega_i) \rightarrow \Phi(\omega_i, u + \omega_i) = \Phi_i(u)$$

であるから、 $\lim_{i \rightarrow \infty} T_i(u) = 0$ となり、したがって

$c(u) = \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(u)$ に対しては、方程式'(α)を得る。

$c_i(u)$ は u に対しては周期的であるから、 $c(u)$ も u に対して周期的となり、方程式'(β)は明らかに成り立つ。これで定理は証明されることになる。

上の定理により、われわれの問題は、どのような場合に、 $C_i(u)$ が収束するか、を調べることにする。

§3. $C_i(u)$ の収束

方程式 (E) において、周期的な正則行列 $S(u_1, u) \in C_{u_1, u}^1$ を用いて、変数変換

$$(3.1) \quad x = S(u_1, u) \dot{x}$$

を行くと、

$$(3.2) \quad D \dot{x} = \dot{A}(u_1, u) \dot{x} + \dot{b}(u_1, u)$$

を得る。ただし

$$\begin{cases} \dot{A}(u_1, u) = S^{-1}(u_1, u) A(u_1, u) S(u_1, u) - S^{-1}(u_1, u) D S(u_1, u), \\ \dot{b}(u_1, u) = S^{-1}(u_1, u) b(u_1, u) \end{cases}$$

である。このとき、

$$(3.3) \quad D \dot{y} = \dot{A}(u_1, u) \dot{y}$$

の基本行列で、 $u_1 = 0$ のとき単位行列となるものを $\Phi(u_1, u)$ とおくと、

$$(3.4) \quad \dot{\Phi}(u_1, u) = \bar{S}'(u_1, u) \Phi(u_1, u) \bar{S}(0, u - u_1)$$

を得る.

以下, われわれは, つぎの条件が満たされている場合について考える;

条件 (C): 適当に $\bar{S}(u_1, u)$ を選ぶとき, $\dot{\Phi}(u_1, u)$ は,

$$\dot{\Phi}(u_1, u) = U(u) \oplus V(u)$$

となる. ただし $U(u), V(u)$ は, すべての u に対して, それぞれつぎの不等式を満たす行列である:

$$\|U(u)\| \leq \theta < 1, \quad \|V^{-1}(u)\| \leq \theta_1 < 1.$$

すると, つぎの定理が得られる:

定理 2. 条件 (C) が満たされているときは, §2 の仮定 (A) は成立し, (2.4) で与えられる $C_1(u)$ は収束して

$$(3.5) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} c_i(u) = S(0, u) \overset{\circ}{c}(u)$$

とある。ただし

$$(3.6) \quad \overset{\circ}{c}(u) = \int_{-\infty}^0 P_0 \overset{\circ}{\Phi}^{-1} \overset{\circ}{k}(s, u+s) ds - \int_0^{\infty} P_1 \overset{\circ}{\Phi}^{-1} \overset{\circ}{k}(s, u+s) ds$$

で、 P_0, P_1 は $\overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u)$ の分解に対して単位行列を分解したと想像される、それぞれ、つぎの形の行列である：

$$(3.7) \quad P_0 = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}.$$

[証明] (1.3) によって

$$\overset{\circ}{\Phi}(p\omega_1, u+p\omega_1) = \overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u+p\omega_1) \overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u+(p-1)\omega_1) \cdots \overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u+\omega_1) \\ (p=1, 2, 3, \dots)$$

とあるので、条件 (C) から

$$\overset{\circ}{\Phi}(p\omega_1, u+p\omega_1) = U(u+p\omega_1) U(u+(p-1)\omega_1) \cdots U(u+\omega_1) \\ \oplus V(u+p\omega_1) \cdots V(u+\omega_1) \\ (p=1, 2, 3, \dots)$$

を得る。これより、容易に

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [E - \overset{\circ}{\Phi}(p\omega_1, u + p\omega_1)]^{-1} = P_0$$

を得る。(3.4) を用いて計算すると、上の式から、

$$\lim_{p_i \rightarrow \infty} [E - \overset{\circ}{\Phi}(p_i\omega_1, u + p_i\omega_1)]^{-1} = S(0, u) P_0 S^{-1}(0, u)$$

を得る。これによって、§2 の仮定 (A) はいまの場合成り立つことがわかる。

また、上の計算から、つぎのこともわかる：

$$(3.8) \quad c_i(u) = S(0, u) [E - W_i(u)]^{-1} \overset{\circ}{c}_i(u).$$

ただし

$$(3.9) \quad W_i(u) = [E - \overset{\circ}{\Phi}(p_i\omega_1, u + p_i\omega_1)]^{-1} S^{-1}(0, u + p_i\omega_1) \times \\ \times [S(0, u + p_i\omega_1) - S(0, u)],$$

$$(3.10) \quad \overset{\circ}{c}_i(u) = [E - \overset{\circ}{\Phi}(p_i\omega_1, u + p_i\omega_1)]^{-1} \overset{\circ}{\Phi}(p_i\omega_1, u + p_i\omega_1) \times \\ \times \int_0^{p_i\omega_1} \overset{\circ}{\Phi}^{-1} \overset{\circ}{\ell}(s, u + s) ds$$

である。

さて、任意の正の整数 p に対して、

$$\overset{\circ}{\Phi}^{-1}(p\omega_1, u + p\omega_1) = U^{-1}(u + \omega_1) \cdots U^{-1}(u + p\omega_1)$$

$$\oplus V^{-1}(u+\omega_1) \dots V^{-1}(u+p\omega_1),$$

$$\overset{\circ}{\Phi}^{-1}(-p\omega_1, u-p\omega_1) = \overset{\circ}{\Phi}(p\omega_1, u)$$

$$= U(u)U(u-\omega_1) \dots U(u-(p-1)\omega_1)$$

$$\oplus V(u)V(u-\omega_1) \dots V(u-(p-1)\omega_1)$$

が成り立つ。すると、 $P_0 \overset{\circ}{\Phi}^{-1}(t, u+t)$, $P_1 \overset{\circ}{\Phi}^{-1}(t, u+t)$ の
行ベクトルをそれぞれ $z_i^*(t, u)$, $z_k^*(t, u)$ で表わし、
ノルムとして成分の maximum をとると、条件 (c) により、

$$(3.11) \quad \begin{cases} \|z_i^*(-p\omega_1, u)\| \leq \theta^p, \\ \|z_k^*(p\omega_1, u)\| \leq \theta_1^p \end{cases} \quad (p=1, 2, \dots)$$

を得る。

さて、 $\overset{\circ}{\Phi}(t, u+t)$ は微分方程式

$$\frac{d}{dt} \overset{\circ}{\Phi}(t, u+t) = \overset{\circ}{A}(t, u+t) \overset{\circ}{\Phi}(t, u+t)$$

をみたしているから、

$$\frac{d}{dt} \overset{\circ}{\Phi}^{-1}(t, u+t) = -\overset{\circ}{\Phi}^{-1}(t, u+t) \overset{\circ}{A}(t, u+t)$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z_i^*(t, u) = -z_i^*(t, u) \dot{A}(t, u+t), \\ \frac{d}{dt} z_k^*(t, u) = -z_k^*(t, u) \dot{A}(t, u+t) \end{cases}$$

が成り立つ。又、 $\dot{A}(t, u+t)$ の有界性から、(3.11) より、

$$(3.12) \quad t \leq 0 \quad \text{に対して} \quad \|z_i^*(t, u)\| \leq C e^{\sigma t},$$

$$(3.13) \quad t \geq 0 \quad \text{に対して} \quad \|z_k^*(t, u)\| \leq C_1 e^{-\sigma_1 t}$$

を得る。ただし C, C_1 は u に無関係な定数で、

$$(3.14) \quad \sigma = -\frac{1}{\omega_1} \log \theta > 0, \quad \sigma_1 = -\frac{1}{\omega_1} \log \theta_1 > 0$$

で表す。

(3.10) より、

$$(3.15) \quad c_i^{(1)}(u) = P_0 \dot{c}_i(u), \quad c_i^{(2)}(u) = P_1 \dot{c}_i(u)$$

と表わす。

$$(3.16) \quad \dot{c}_i(u) = c_i^{(1)}(u) + c_i^{(2)}(u)$$

で、

$$C_i^{(1)}(u) = P_0 [E - \overset{\circ}{\Phi}(p_i \omega_1, u + p_i \omega_1)]^{-1} P_0 \overset{\circ}{\Phi}(p_i \omega_1, u + p_i \omega_1) \times \\ \times \int_0^{p_i \omega_1} \overset{\circ}{\Phi}^{-1} \overset{\circ}{b}(s, u+s) ds,$$

$$C_i^{(2)}(u) = P_1 [E - \overset{\circ}{\Phi}(p_i \omega_1, u + p_i \omega_1)]^{-1} \overset{\circ}{\Phi}(p_i \omega_1, u + p_i \omega_1) \times \\ \times \int_0^{p_i \omega_1} P_1 \overset{\circ}{\Phi}^{-1} \overset{\circ}{b}(s, u+s) ds$$

を得る.

さて, (3.12) を用いると, $p_i \rightarrow \infty$ と可成り,

$$P_0 \overset{\circ}{\Phi}(p_i \omega_1, u + p_i \omega_1) \int_0^{p_i \omega_1} \overset{\circ}{\Phi}^{-1} \overset{\circ}{b}(s, u+s) ds \\ = \int_{-p_i \omega_1}^0 P_0 \overset{\circ}{\Phi}^{-1} \overset{\circ}{b}(s, u + p_i \omega_1 + s) ds \\ \rightarrow \int_{-\infty}^0 P_0 \overset{\circ}{\Phi}^{-1} \overset{\circ}{b}(s, u+s) ds$$

と成る = ことを証明可成り ことが出来る. ことから,

$$(3.17) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} C_i^{(1)}(u) = \int_{-\infty}^0 P_0 \overset{\circ}{\Phi}^{-1} \overset{\circ}{b}(s, u+s) ds$$

と成る = ことがわかる. $C_i^{(2)}(u)$ に対しては, (3.13) を用い

ると,

$$(3.18) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} C_i^{(2)}(u) = - \int_0^{\infty} P_1 \overset{\circ}{\Phi}^{-1} \overset{\circ}{b}(s, u+s) ds$$

とあることが証明される。かくて, (3.16) により,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \dot{C}_i(u) = \dot{C}(u)$$

を得る。(3.9) により, $\lim_{i \rightarrow \infty} W_i(u) = 0$ であるから,
(3.8) より (3.5) を得る。これで定理は証明された。

(3.5) により,

$$(3.19) \quad c(u) = S(0, u) \dot{C}(u)$$

と表わせば,

$$(3.20) \quad c(u) = \int_{-\infty}^0 \tilde{P}_0(u) \Phi^{-1} b(s, u+s) ds \\ - \int_0^{\infty} \tilde{P}_1(u) \Phi^{-1} b(s, u+s) ds$$

とある。ただし

$$(3.21) \quad \begin{cases} \tilde{P}_0(u) = S(0, u) P_0 S^{-1}(0, u) \\ \tilde{P}_1(u) = S(0, u) P_1 S^{-1}(0, u) \end{cases}$$

である。このとき,

$$\tilde{P}_0^2(u) = \tilde{P}_0(u), \quad \tilde{P}_1^2(u) = \tilde{P}_1(u),$$

$$\tilde{P}_0(u) + \tilde{P}_1(u) = E$$

であることは明らかである。また、明らかに $\tilde{P}_0(u), \tilde{P}_1(u)$ は u に関して一回連続微分可能であり、しかも u に関して周期的である。

(3.20) で与えられる $c(u)$ が条件 $(\alpha), (\beta)$ を満たしていることは、直接に検証もできる。

§4. グリーン関数

条件 (C) が満たされているときは、定理 2 により、(E) の任意の周期解 $x(u, u)$ は、(1.2) を用いて、つぎのようにならされることのできる：

$$\begin{aligned} x(u, u) &= \Phi(u, u) \int_{-\infty}^0 \tilde{P}_0(u-u_1) \Phi^{-1}(s, u-u_1+s) b(s, u-u_1+s) ds \\ &\quad - \Phi(u, u) \int_0^{\infty} \tilde{P}_1(u-u_1) \Phi^{-1}(s, u-u_1+s) b(s, u-u_1+s) ds \\ &\quad + \Phi(u, u) \int_0^{u_1} [\tilde{P}_0(u-u_1) + \tilde{P}_1(u-u_1)] \Phi^{-1}(s, u-u_1+s) b(s, u-u_1+s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{u_1} \Phi(u, u) \tilde{P}_0(u-u_1) \Phi^{-1}(s, u-u_1+s) b(s, u-u_1+s) ds \\ &\quad - \int_{u_1}^{\infty} \Phi(u, u) \tilde{P}_1(u-u_1) \Phi^{-1}(s, u-u_1+s) b(s, u-u_1+s) ds, \end{aligned}$$

すなわち,

$$(4.1) \quad \chi(u_1, u) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u_1, u, s) \psi(s, u - u_1 + s) ds.$$

ただし

$$(4.2) \quad G(u_1, u, s) = \begin{cases} \Phi(u_1, u) \tilde{P}_0(u - u_1) \Phi^{-1}(s, u - u_1 + s) & (s \leq u_1), \\ -\Phi(u_1, u) \tilde{P}_1(u - u_1) \Phi^{-1}(s, u - u_1 + s) & (s > u_1) \end{cases}$$

である。(4.2) で与えられる $G(u_1, u, s)$ が核関数グリーン関数である。

グリーン関数 $G(u_1, u, s)$ に対してはつぎの定理が成り立つ:

定理 3.

$$(4.3) \quad \|G(u_1, u, s)\| \leq \begin{cases} M e^{\sigma_0 |u_1| + \sigma_1 s} & (s \leq 0, s \leq u_1) \\ M e^{\sigma_0 |u_1| - \sigma_1 s} & (s > 0, s > u_1). \end{cases}$$

ただし, M, σ_0 は u_1, u, s に無関係な定数で, σ, σ_1 は (3.14) で与えられる定数である。

[証明] (3.4), (3.21), (4.2) により

$$G(u_1, u, \lambda) = S(u_1, u) \overset{\circ}{G}(u_1, u, \lambda) S^{-1}(\lambda, u - u_1 + \lambda)$$

である。ただし

$$\overset{\circ}{G}(u_1, u, \lambda) = \begin{cases} \overset{\circ}{\Phi}(u_1, u) P_0 \overset{\circ}{\Phi}^{-1}(\lambda, u - u_1 + \lambda) & (\lambda \leq u_1), \\ -\overset{\circ}{\Phi}(u_1, u) P_1 \overset{\circ}{\Phi}^{-1}(\lambda, u - u_1 + \lambda) & (\lambda > u_1) \end{cases}$$

である。

さて、任意の正の整数 p に対して、

$$\overset{\circ}{\Phi}(p\omega_1, u + p\omega_1) = \overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u + p\omega_1) \cdots \overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u + \omega_1),$$

$$\overset{\circ}{\Phi}(-p\omega_1, u - p\omega_1) = \overset{\circ}{\Phi}^{-1}(p\omega_1, u)$$

$$= [\overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u) \overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u - \omega_1) \cdots \overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u - (p-1)\omega_1)]^{-1}$$

$$= \overset{\circ}{\Phi}^{-1}(\omega_1, u - (p-1)\omega_1) \cdots \overset{\circ}{\Phi}^{-1}(\omega_1, u)$$

で、しかも $\overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u)$ は u に関して周期的であるから

$$\|\overset{\circ}{\Phi}(\omega_1, u)\|, \|\overset{\circ}{\Phi}^{-1}(\omega_1, u)\| \leq \kappa$$

が成り立つ正数 $\kappa > 1$ が存在する。したがって

$$\|\overset{\circ}{\Phi}(p\omega_1, u + p\omega_1)\| \leq \kappa^p$$

$$(p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

が成り立つ。しかも

$$\frac{d}{dt} \dot{\Phi}(t, u+t) = \dot{A}(t, u+t) \dot{\Phi}(t, u+t)$$

が成り立つから,

$$\|\dot{\Phi}(t, u+t)\| \leq C_0 e^{\sigma_0 |t|}$$

が成り立つような正数 C_0 が存在する. ただしここで

$$\sigma_0 = \frac{1}{\omega_1} \log \kappa$$

である. すると (3.12), (3.13) により,

$$\|\dot{G}(u, u, \lambda)\| \leq \begin{cases} M_0 e^{\sigma_0 |u_1| + \sigma \lambda} & (\lambda \leq 0, \lambda \leq u_1) \\ M_0 e^{\sigma_0 |u_1| - \sigma \lambda} & (\lambda \geq 0, \lambda > u_1) \end{cases}$$

を得る. これより (4.3) はすぐでてくる. これで定理は証明された.

§5. あと書き

擬周期系のグリーン関数に関しては目下研究中で, ここで述べたことはその研究の中間報告である. 結果は, まだ満足のできる段階にまで至っていない. 最大の問題は, 条件 (C) がどの程度の必然性をもっているか, である. 目下の点について研究を進めている, ことを記しておく.