

The automorphism group of a compact smooth toric variety and its representations on sections of equivariant line bundles

大阪市立大学理学研究科 石田 裕昭 (Hiroaki Ishida)
Osaka City University

1 はじめに

本稿では, 非特異かつ完備なトーリック多様体上の同変直線束から誘導される, 正則な (大域) 切断のなす複素ベクトル空間上の表現について考察する. トーリック多様体の基本的な性質については [2], [3] や [4] を参照してもらいたい. また, [1] の方法を大いに参考にさせていただいた.

一般に, 群 G と空間 X 上の (左) G -同変ベクトル束 E を考えるとき, 大域切断の空間 $\Gamma(X, E)$ は次のように (左) G -加群になる: 切断 $s \in \Gamma(X, E)$ と $g \in G$ に対し

$$s^g := gsg^{-1},$$

すなわち, 次の図式を可換にするような新たな切断 s^g を定める:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{g} & L \\ \uparrow s & & \uparrow \\ X & \xrightarrow{g} & X \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}$$

本稿では X として完備かつ非特異なトーリック多様体, G として X の自己同型群の単位元成分の拡大, E として直線束の場合を論じる.

2 トーリック多様体

定義 2.1. (n 次元) トーリック多様体 X とは,

- X は基礎体 $\mathbb{C}$ 上の正規代数多様体.
- X は n 次元代数トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ をザリスキ開集合として含む.
- $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の群の演算が, X 上の $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用に拡大する.

を満たす代数多様体のことである.

ここで, 作用はすべて代数的, すなわち, 各元は (代数多様体としての) 自己同型射として作用するものとする.

以下, トーリック多様体 X の次元は n とする.

例 2.2 (アフィン空間 $\mathbb{C}^n$). n 次元アフィン空間 $\mathbb{C}^n$ はトーリック多様体である. 明らかに $\mathbb{C}^n$ は代数トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ をザリスキ開集合として含み, $(\mathbb{C}^*)^n$ 上の群の演算は, $\mathbb{C}^n$ 上の次のような $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用に拡大する: $(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ と $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ に対して,

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot (z_1, \dots, z_n) := (t_1 z_1, \dots, t_n z_n).$$

例 2.3 (複素射影空間 $\mathbb{P}^n$). n 次元複素射影空間 $\mathbb{P}^n$ は非特異かつ完備なトーリック多様体である. 実際, ザリスキ開集合

$$T := \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n \mid \text{すべての } i \text{ について } z_i \neq 0\}$$

から $(\mathbb{C}^*)^n$ への写像

$$[z_0, \dots, z_n] \mapsto \left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0} \right)$$

によって, $T \subset \mathbb{P}^n$ は $(\mathbb{C}^*)^n$ と同型であることが確かめられる (ここで, $[z_0, \dots, z_n]$ は $\mathbb{P}^n$ の斉次座標). また, 上の同型射により, $\mathbb{P}^n$ における $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用は, $(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ と $[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n$ に対して,

$$(t_1, \dots, t_n) \cdot [z_0, \dots, z_n] := [z_0, t_1 z_1, t_2 z_2, \dots, t_n z_n]$$

と定められる.

以下, トーリック多様体 X は完備かつ非特異なものとする.

トーリック多様体 X は, 次の情報 $(K; v_1, \dots, v_m)$ によって完全に決定される:

- $X_1, \dots, X_m$ を $(\mathbb{C}^*)^n$ -不変な余次元 1 の部分多様体 (これを $(\mathbb{C}^*)^n$ -**不変因子** という) とする. このとき, 頂点集合 $[m]$ 上の (有限) 単体複体 K を次で定義する:

$$K := \left\{ I \subset [m]; \bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset \right\}$$

- 格子ベクトル $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ と $t \in \mathbb{C}^*$ に対して,

$$\lambda_a(t) := (t^{a_1}, \dots, t^{a_n}) \in (\mathbb{C}^*)^n$$

と定める. 各 $(\mathbb{C}^*)^n$ -不変因子 X_i に対して, 次を満たす格子ベクトル $v_i \in \mathbb{Z}^n$ が一意的に定まる:

- すべての点 $x \in X_i$ と $t \in \mathbb{C}^*$ に対して, $\lambda_{v_i}(t) \cdot x = x$.
- すべての点 $x \in X_i$, $\xi \in T_x X / T_x X_i$ と $t \in \mathbb{C}^*$ に対して, $(\lambda_{v_i}(t))_*(\xi) = t\xi$.

定義 2.4. $\Sigma := (K; v_1, \dots, v_n)$ をトーリック多様体 X の**扇 (fan)** という.

非特異かつ完備なトーリック多様体 X の扇 Σ について, 次が知られている:

命題 2.5. 1. K の $(n-1)$ 次元単体 I について, $\{v_i\}_{i \in I}$ は $\mathbb{Z}^n$ の基底をなす.

2. 単体 $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in K$ に対して, $\mathbb{R}^n$ の部分集合 σ_I を

$$\sigma_I := \{a_1 v_{i_1} + \dots + a_k v_{i_k}; \text{すべての } j \text{ で } a_j \geq 0\}$$

で定義する (これを, 扇 Σ の錐という). このとき, 任意の 2 つの単体 $I, J \in K$ について,

$$\sigma_I \cap \sigma_J = \sigma_{I \cap J}$$

が成り立つ.

3. 扇 Σ のすべての錐の和集合は $\mathbb{R}^n$ 全体になる. すなわち,

$$\bigcup_{I \in K} \sigma_I = \mathbb{R}^n.$$

扇 Σ から完備かつ非特異なトーリック多様体 X が完全に復元される. 添字の集合 $I \subset [m]$ に対して,

$$U_I := \{z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m; i \notin I \text{ に対し, } z_i \neq 0\}$$

とし, 頂点集合 $[m]$ 上の単体複体 K に対して

$$U(K) := \bigcup_{I \in K} U_I \subset \mathbb{C}^m$$

と定義する.

定義 2.6. $U(K)$ を *coordinate subspace arrangement complement in $\mathbb{C}^m$* という.

注意 2.7. $U(K)$ は非特異なトーリック多様体である. これは, トーリック多様体 $\mathbb{C}^m$ の $(\mathbb{C}^*)^m$ -不変なザリスキ開部分集合であることからわかる.

$(\mathbb{C}^*)^m$ から $(\mathbb{C}^*)^n$ への準同型

$$\mathcal{V}(t_1, \dots, t_m) := \prod_{i=1}^n \lambda_{v_i}(t_i)$$

を考える. このとき,

定理 2.8. $\mathcal{V} : (\mathbb{C}^*)^m \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$ は, $\ker \mathcal{V} \cong (\mathbb{C}^*)^{m-n}$ をファイバーに持つ主ファイバー束 $\tilde{\mathcal{V}} : U(K) \rightarrow X$ に拡張する.

$$\begin{array}{ccc} U(K) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{V}}} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{C}^*)^m & \xrightarrow{\mathcal{V}} & (\mathbb{C}^*)^n \end{array}$$

注意 2.9. 実は X が完備, 非特異でなくても, 次の 2 条件を満たせば定理 2.8 がいえる:

- X は軌道体 (orbifold) である.
- $v_1, \dots, v_m$ が $\mathbb{Z}^n$ を張る.

もちろん, X が完備かつ非特異であれば上の 2 条件を満足している.

系 2.10. 特に, $X \cong U(K)/\ker \nu$.

3 トーリック多様体上の直線束

次の事実が知られている:

命題 3.1. トーリック多様体 X 上の複素直線束 $L \rightarrow X$ に対し, 全空間 L への $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用で, 底空間 X への作用の制限が, X における $(\mathbb{C}^*)^n$ -作用と一致するものが存在する.

この事実から, 次がわかる:

命題 3.2. 全空間 L はトーリック多様体である.

証明. 命題 3.1 より, L に $(\mathbb{C}^*)^n$ が効果的に作用しているとする. 示すべきことは, L に $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ の埋め込みとその作用を与えることである. L を $(\mathbb{C}^*)^n \subset X$ に制限したものを $L|_{(\mathbb{C}^*)^n}$ は自明な直線束であり, さらにいたるところ 0 でない $(\mathbb{C}^*)^n$ -不変な切断 $s: (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow L|_{(\mathbb{C}^*)^n}$ がとれる. $(\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^*$ の L への埋め込みを, $(t, t') \in (\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^*$ に対して

$$(t, t') \mapsto t's(t)$$

で定める. この埋め込まれた $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ の群演算が L への作用に拡大することを確認する. $t' \in \mathbb{C}^*$ は各ファイバーにスカラー倍として作用することに注意する. さらに $(\mathbb{C}^*)^n$ の L への作用と, $\mathbb{C}^*$ の作用 (スカラー倍) が可換であることから, $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ の L への求める作用を得た. $\square$

系 3.3. X 上の任意の複素直線束 $L \rightarrow X$ は, ある同伴直線束 (associated line bundle) $U(K) \times_{\ker \nu} \mathbb{C}$ と同型である.

証明. 節 2 の構成方法と, 上の命題に注意すれば明らかである. $\square$

命題 3.4. f_1, f_2 をそれぞれ $L \rightarrow X$ の束同値写像とする. すなわち, 同型射 $f_i: L \rightarrow L$ であって, 各ファイバーにおける制限が線形同型写像である ($i = 1, 2$). それぞれの底空間 X への制限 $f_1|_X, f_2|_X$ が一致している, すなわち, $f_1|_X = f_2|_X$ ならば, ある定数 $c \in \mathbb{C}^*$ が存在して,

$$f_1 = cf_2.$$

つまり, 任意の束同値写像は (スカラー倍を除いて) 底空間における制限によって決まる.

証明. 与えられた f_1, f_2 に対して, $f_2^{-1} \circ f_1: L \rightarrow L$ を考える. 仮定より明らかに, 底空間 X

への制限 $(f_2^{-1} \circ f_1)|_X$ は恒等写像 id_X である。従って、射 $f_2^{-1} \circ f_1 : L \rightarrow L$ は各ファイバー $L_x (x \in X)$ ごとに線形変換を引き起こす。各ファイバー L_x は 1 次元ベクトル空間であるから、0 でない $u \in L_x$ に対して

$$f_2^{-1} \circ f_1(u) = c(x)u$$

となるような可逆な関数 $c : X \rightarrow \mathbb{C}^*$ を得る。一方で、 X の完備性より、 c は定数値関数であり、命題がいえた。□

上の命題 3.4 は、最初の問題はトーリック多様体の自己同型群を見ればよい、ということ を主張している。次節では、トーリック多様体の自己同型群について知られていることを紹介する。

4 トーリック多様体の自己同型群

商空間としてのトーリック多様体の構成 (系 2.10) は、トーリック多様体 X の自己同型群 $\text{Aut}(X)$ のよい記述を与える。

定義 4.1. 群 G とその部分群 H に対して、 $C_G(H), N_G(H)$ でそれぞれ H の G における中心化群 (centralizer), 正規化群 (normalizer) を表し、トーリック多様体 X に対して $\widetilde{\text{Aut}}^0(X), \widetilde{\text{Aut}}(X)$ をそれぞれ次で定義する:

- $\widetilde{\text{Aut}}^0(X) := C_{\text{Aut}(U(K))}(\ker \mathcal{V})$
- $\widetilde{\text{Aut}}(X) := N_{\text{Aut}(U(K))}(\ker \mathcal{V})$

定義 4.1 の $\widetilde{\text{Aut}}^0(X), \widetilde{\text{Aut}}(X)$ の元は、定義より明らかに $U(K)$ における $\ker \mathcal{V}$ の軌道を $\ker \mathcal{V}$ の軌道へ移す。従って、トーリック多様体 X の自己同型群 $\text{Aut}(X)$ への自然な準同型 $\widetilde{\text{Aut}}(X) \rightarrow \text{Aut}(X)$ が誘導される。

命題 4.2. 次が成り立つ:

- 自然な準同型 $\widetilde{\text{Aut}}(X) \rightarrow \text{Aut}(X)$ は全射である。
- $\widetilde{\text{Aut}}^0(X)$ は $\widetilde{\text{Aut}}(X)$ の単位元成分 (identity component) であり、アフィン代数群である。

5 主定理

最初の問題を考えるにあたって、与えられた直線束 $L \rightarrow X$ に対して、大域切断のなす複素ベクトル空間を記述する必要がある。 α を $\ker \mathcal{V}$ の 1-次元表現とし、 α に随伴する直線束の全空間を L_α とする; すなわち、 $U(K) \times \mathbb{C}$ への右 $\ker \mathcal{V}$ -作用を

$$(z, u) \cdot k := (k^{-1} \cdot z, \alpha(k^{-1})(u))$$

と定め、その作用による商空間を L_α と定める。任意の直線束 $L \rightarrow X$ はある α が存在して $L \cong L_\alpha$ となることを注意しておく。

命題 5.1. 直線束 $L_\alpha \rightarrow X$ の大域切断の空間 $\Gamma(X, L_\alpha)$ は、次の空間と同一視される：

$$\{f \in \mathcal{O}(U(K)); f(z \cdot k) = \alpha(k^{-1})f(z)\} := S_\alpha$$

(ここで、 $\mathcal{O}(U(K))$ は $U(K)$ 上の正則 (regular) な関数全体のなす環を表す)。

注意 5.2. $U(K)$ の定義より、 $\mathcal{O}(U(K))$ は m 変数の多項式環と同型になる。

証明. $q : U(K) \times \mathbb{C} \rightarrow L_\alpha$ を商写像とする。任意の切断 $s : X \rightarrow L_\alpha$ は閉写像であることから、部分集合 $q^{-1}(s(X))$ は $U(K) \times \mathbb{C}$ の閉集合である。さらに第一射影の制限 $p : q^{-1}(s(X)) \rightarrow U(K)$ は同型射であることから、特に $q^{-1}(s(X))$ はある関数 $f : U(K) \rightarrow \mathbb{C}$ のグラフである。このとき、 $q^{-1}(s(X))$ が $\ker \mathcal{V}$ -不変であることから、関数 f は S_α の元である。

逆に任意の $k \in \ker \mathcal{V}$ に対して $f(z \cdot k) = \alpha(k^{-1})f(z)$ を満たす関数 f に対して、切断 s_f を各点 $[z] \in X$ において次のように定義する：

$$s_f([z]) := [z, f(z)],$$

ここで $[z], [z, u]$ はそれぞれ $z \in U(K), (z, u) \in U(K) \times \mathbb{C}$ の $\ker \mathcal{V}$ の軌道を表す。 f の性質より s_f は well-defined であり、これが同型対応を与える。 $\square$

L_α には自然な左 $\widetilde{\text{Aut}}^0(X)$ -作用が入る； $U(K) \times \mathbb{C}$ への左 $\widetilde{\text{Aut}}^0(X)$ -作用を、

$$g \cdot (z, u) := (g \cdot z, u)$$

で定める。 $\widetilde{\text{Aut}}^0(X)$ の定義から、この作用は L_α 上の作用を誘導する。以上のことから、次の主定理を得る：

定理 5.3. $\widetilde{\text{Aut}}^0(X)$ -同変直線束 $L_\alpha \rightarrow X$ の大域切断の空間に表れる表現は、 $\mathcal{O}(U(K))$ の部分加群 S_α と同型である。ここで、 S_α への $\widetilde{\text{Aut}}^0(X)$ -作用は $f \in S_\alpha$ と $g \in \widetilde{\text{Aut}}^0(X)$ に対して

$$f^g(z) := f(g^{-1} \cdot z)$$

と定める。

証明. 命題 5.1 の同一視を用いる。 $f \in S_\alpha$ に対して、対応する切断を $s_f : X \rightarrow L_\alpha$ と書くこ

とにする. このとき, $g \in \widetilde{\text{Aut}}^0(X)$ を作用させると,

$$\begin{aligned} s_f^g([z]) &= gs_f g([z]) \\ &= gs_f([g^{-1} \cdot z]) \\ &= g \cdot [g^{-1} \cdot z, f(g^{-1} \cdot z)] \\ &= [z, f(g^{-1} \cdot z)] \\ &= [z, f^g(z)] \end{aligned}$$

とかける. したがって定理を得た. □

参考文献

- [1] David A. Cox *The Homogeneous Coordinate Ring of a Toric Variety*, arXiv:alg-geom/9210008v2, 21 Jun 1993.
- [2] G. Ewald, *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, Graduate texts in Math. 168, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.
- [3] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press, Princeton, 1993.
- [4] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988.