

磁場対流系に対するトポロジカル不変量

日大工 戸次直明 (Naoaki Bekki)
College of Engineering, Nihon Univ.

I. はじめに

「結び目」と言うと「何か紐で結（ゆ）わえたもの」を思い浮かべる。登山家や船員が巧みにロープを操り、浴衣や着物を着るのにも使ってきた。我々はこの世に生を受けて、生まれ出ずる時、へその緒を通して母親と「結ばれていた」ことをのちに知る。我々は、身近のいたるところで「結び目」の恩恵を受けていると言える。位相幾何学的不変量の一つである「結び目」の発見は、火の利用や道具の使用などに先だって、人類の文化史上の一大事であったと思われる。このような身近な対象である「結び目」を自然科学の対象として初めて扱ったのは、ガウスとケルヴィン卿である。本格的に「結び目」の研究が進展し、数学の一分野として定着したのはつい最近のことで、位相幾何学、群論、整数論、代数幾何学、グラフ理論などを巻き込んで、活発に研究されている。最近では、純粋数学の枠をはるかに越えて、統計力学や非線形物理などの分野とも深く関わり合っていることが分かってきた。また、分子生物学の分野において、DNA 分子のつくる「結び目」の形は DNA 分子の細胞中での働きに重要な影響を与えていることが、最近の研究の結果、次第に明らかになってきている。遺伝子情報を含む生命の神秘を解明するための糸口として「結び目」の研究が役立つかもしれない [1]。

ここでは、磁場対流を記述する非線形常微分方程式系を数値積分することによって得たほとんど周期的と見なせる解を取り上げ、それらの周期解と「結び目」との関係について報告する。準周期解や非周期解（カオス）も含めてここでは周期解という表現を使うことにする。これまで、磁場対流を記述する系に対し、リヤプノフ指数のような計量的な性質を用いて分岐を調べてきたけれども、系のこのような計量的性質は、パラメータの変化に伴う分岐に際して変化してしまう。そこで、我々が問題にしている系の周期軌道の定性的な性質を知るために、その系のトポロジカル不変量に着目する。即ち、アンリ・ポアンカレが「カオス」を発見するに至る「着想」にもどって、まず、磁場対流を記述する 5 モード系の周期解に「結び目理論」が適用できるかどうかを調べる。これまで、磁場対流を記述する逡減 5 モード系を数値積分することによって得た周期解を調べてきた。あるパラメータ領域で、この逡減 5 モード系は、複雑に分岐を繰り返しながら、トーラス、周期解、カオス、ハ

イパーカオスなどを、を示す。カオスを含むかなり広いパラメータ領域に対して、何か不変量なるものを見つけることができれば、この不変量は分岐に際しての見かけの複雑さを越えた力学系の指導原理を導くかもしれない。実際、我々はこの不変量に相当するものの1つを発見した [2]。この不変量はトポロジカル不変量の一つである。我々の逡減5モード系は5変数の非線形1階常微分方程式であるので、たとえ散逸系であるにしても、一般に、その解が3次元多様体に埋め込まれているかどうかは自明でない。この5次元から3次元への射影あるいは埋め込み問題を直接数学的に証明するのは難しいので、数値的に調べた。5次元から生成される主要な3次元多様体の中への解のトポロジカルな性質を調べ、もし、その全てが位相同型（アンピエントイソトピー）であれば、その解が3次元多様体に埋め込まれていると仮定しても物理的に許される。今回は、トフィラーロ、ソラリ、ギルモア達が提案した近接再帰プロット法 [3] を使って、ストレンジアトラクターの中に埋め込まれた基本的な不安定周期軌道を選び出し、そのトポロジカル不変量を抽出する。このトポロジカル不変量は、トフィラーロ達の観察した不変量とは異なる。ストレンジアトラクターの5次元空間から2次元平面への射影を数値的に調べる。ストレンジアトラクターの中から選び出した近接再帰プロット法による基本的な不安定周期軌道の5次元から2次元平面への射影をトポロジカルな観点で数値的に調べる。近接再帰プロット法により、いろいろな周期の不安定周期軌道が近似的に得られる。いわば、これらの不安定周期軌道は、逡減5モード系のストレンジアトラクターの「指紋」といえる。これらの「指紋」のトポロジカル不変量を調べた結果について報告する。

II. 磁場対流を記述する非線形常微分方程式系モデル

簡単のため、空間は2次元のブシネスク流体に対して垂直上方に印加磁場がある場合を考える。磁場対流を記述する偏微分方程式系をコンシステントに切断5モード常微分方程式系に逡減する導出は、戸次と唐木沢（BK）[4] によって初めて与えられた。類似のモデルを、ケンブリッジ大学のKnobloch と Proctor（KP）[5] が導出しているけれども、彼等が導出した固有関数は間違っており、正確な固有関数を使ったガラーキン近似では彼等のモデルではなくてBKのモデルになってしまうという矛盾があった。しかし、KPのモデルは固有関数が間違っているにもかかわらず、BKのモデルとKPのモデルは数学的に等価である。ここでは、その詳細については文献 [6,7] に譲るとして、BKのモデルは

$$\dot{a}(t) = \sigma \left[-a(t) + rb(t) - qd(t) \left(1 + \frac{w(3-w)}{\zeta^2(4-w)} e(t) \right) \right],$$

$$\dot{b}(t) = -b(t) + a(t) - a(t)c(t),$$

$$\dot{c}(t) = w[-c(t) + a(t)b(t)], \quad (1)$$

$$\dot{d}(t) = -\zeta[d(t) - a(t)] - \frac{w}{\zeta(4-w)} a(t)e(t),$$

$$\dot{e}(t) = -\zeta(4-w)[e(t) - a(t)d(t)],$$

で与えられる。ただし、 $a(t)$ は速度の1次摂動、 $b(t)$ と $c(t)$ は温度の1次摂動と2次摂動、 $d(t)$ と $e(t)$ は磁場の1次摂動と2次摂動に、それぞれ、対応している。また、 t は特徴的な時間スケールで規格化された時間を表わし、ドットはその時間に関する微分を表わす。5つのパラメータ (σ, ζ, r, q, w) は、それぞれ、粘性プラントル数、磁気プラントル数、規格化されたレイリー数、規格化されたチャンドラセカル数、アスペクト比に関係した幾何学的な定数、である。切断5モード常微分方程式系は、ローレンツ方程式と同じように、重要な対称性を持っている。即ち、このモデルは、変換：

$$(a, b, c, d, e) \rightarrow (-a, -b, c, -d, e), \quad (2)$$

に対して不変である。また、位相空間における流れの発散は、式(1)より

$$\frac{\partial}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial}{\partial b} \dot{b} + \frac{\partial}{\partial c} \dot{c} + \frac{\partial}{\partial d} \dot{d} + \frac{\partial}{\partial e} \dot{e} = -[1 + \sigma + w + \zeta(5-w)], \quad (3)$$

となり、常に負である。このことは、このモデルが散逸系であることの当然の帰結であり、式(1)の解(軌道)が最終的には位相空間上の測度ゼロの集合に吸引されることを意味する。規格化された熱流束の大きさを知る目安として、ヌッセルト数：

$$Nu = 1 + 2\alpha(t), \quad (4)$$

を導入すると便利である。一方、定常解は、式(1)より

$$b = \frac{a}{1+a^2}, \quad c = \frac{a^2}{1+a^2}, \quad d = \frac{\mu a}{\mu+a^2}, \quad e = \frac{\mu a^2}{\mu+a^2},$$

$$r = 1 + a^2 + \frac{\zeta^2(4-w)^2(1+a^2)(a^2+\zeta^2/w)}{w\{a^2+\zeta^2(4-w)/w\}^2} q, \quad (5)$$

となる。ただし、 $\mu = \zeta^2(4-w)/w$ とする。特に、 $q=0$ (磁場なし) のとき、式(5)より

$$a = \pm\sqrt{r-1}, \quad (6)$$

となって、ローレンツモデルの定常解と一致する。この定常解の安定性は、定常解(5)の回りについて、式(1)を線形化すれば、得られる ($\propto \exp[st]$) :

$$s^5 + d_1 s^4 + d_2 s^3 + d_3 s^2 + d_4 s + d_5 = 0, \quad (7)$$

ただし、 d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 は、5つのパラメータと式(5)と結び付いている振幅 a を含む多少複雑な係数である。サブクリティカル分岐点 r_H は、解析的な表式はやや複雑であるけれども、 $s = \pm i\omega$ を式(7)に代入することによって得られる。特に、 $q = 0$ (磁場なし) のときは、

$$r_H = \frac{3 + \sigma + w}{\sigma - 1 - w} \sigma, \quad (8)$$

となって、ローレンツモデルの場合と一致し、 $r_H \leq r$ に対して、定常解は安定ではなくなり、ストレンジ・アトラクターが唯一の安定なアトラクターになる。

III. トーラスとカオス

磁場対流を記述する偏微分方程式系は勿論、切断5モード常微分方程式系を任意の初期値に対して解析的に解くことは不可能である。したがって、ここでは、式(1)を数値積分することにより、数値解を調べることにする。数値積分は4次のルンゲ・クッタ法を使う。パラメータのうち磁気プランドル数については、ローレンツ型アトラクターの分岐よりも周期解からカオスへの分岐という点に興味があるので、磁気プランドル数が小さい場合 ($\xi < 1$) を考える。このとき、不安定化の要因による力 (r) と安定化の要因による力 (q) との間に位相差が生じて、周期解が存在しうる (必要条件)。ここでは、トーラスからカオスへの分岐が生じうるパラメータを選んだ場合を調べる。トーラスからカオスへの分岐が存在するとき、レイリー数を徐々に大きくしていくと、 $r^{(0)} \leq r$ に対して、静止解から Hopf 分岐を通してリミットサイクル (線形周期解) が現われる ($r^{(0)} = (\sigma + \xi) \left(\frac{1 + \xi}{\sigma} + \frac{\xi}{1 + \sigma} q \right)$)。したがって、 $0 \leq r \leq r^{(0)}$ に対しては、静止解だけが安定であり、対流は起こらない。レイリー数をさらに大きくしていくと、トーラスが現われる。このとき、リヤプノフスペクトルの符号は、 $(0.000, 0.000, -, -, -)$ となる。レイリー数を固定し、磁気プランドル数を変化させて、トーラス解の回転数を調べてみると、ファレイ樹に関連した振動数同期を繰り返して、その回転数がパラメータの変化に対して「悪魔の階段」を構成していることを示した [8]。更に、パラメータの値を変化させると、 T^2 トーラスが更にホップ分岐し、 T^3 トーラス (1次独立な周波数成分が3つ存在する) 上の準周期運動が生じる。ルエル、ターケンス、ニューハウス (RTN) の理論は、乱流に対するランダウの考え方を根本的に否定したけれども、微分方程式系で T^3 トーラスの発生を確認する適切なモデルはほとんどなかった。実際、あるパラメータ領域で、我々の5モ

ード系は、 T^3 トーラスの発生を示す。これは、例えば、5つのリヤプノフ指数を順に $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4 \geq \lambda_5$ とすると、 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.000$ 、 $\lambda_4 < 0$ 、 $\lambda_5 < 0$ となるからである。更に、パラメータを変化させると $\lambda_1 > 0$ となり、トーラスからカオス（図1）に至ることがわかる。

IV. トポロジカル不変量の抽出

逓減5モード系（1）は、トーラスとカオスを含むパラメータ領域で、非常に複雑な分岐を示す。図1に示されるような非周期軌道（カオス）から、分岐に際しての見かけの複雑さを越えたトポロジカル不変量を発見したい。次のようなレシピに従って、トポロジカル不変量を抽出する：（1）近接再帰プロット法 [3] を使う；（2）ストレンジアトラクターの中に埋め込まれた基本的な不安定周期軌道を選び出す。

（1）近接再帰プロット法：近接再帰プロット法を使うための準備として、非周期軌道（カオス）に対する時系列データを選ぶ。この時系列データを $x(i) = (a(i), b(i), c(i), d(i), e(i))$ ($i = 1 \sim N$) とする。このとき、不安定周期軌道間の距離を次のように定義する：

$$\delta = |x(i+n) - x(i)| \leq 1. \quad (9)$$

ただし、 δ はその最大値で規格化されているものとする。また、 n を近似的な周期に対応するように選ぶと、少なくとも1つは δ を最小にする i が存在する。

（2）基本的な不安定周期軌道：図1のカオスの時系列データ ($N = 2^{13}$) に対して、 $n = 7 \cdot 2^6$ を選ぶと、図2を得る。この再帰プロットの図から、 δ を限り無くゼロにする i が存在することがわかる。また、図2より、 $i = 2581$ を選ぶと、非周期軌道（カオス）から抽出された周期 $7m$ (m は自然数) の軌道が近似的に再構成できる。図3は、 $(b(i), c(i))$ 平面上に射影された $m = 1, 2, 3$ の場合の再構成された周期軌道である。非周期軌道（カオス）は、フーリエ級数展開のように、基本周期の高調波の重ね合わせで近似できることがわかる。このように、近接再帰プロット法により、いろいろな周期の不安定周期軌道が近似的に得られる。いわば、これらの不安定周期軌道は、逓減5モード系のストレンジアトラクターの「指紋」といえる。

V. 議論

ストレンジアトラクターの中に埋め込まれた基本的な不安定周期軌 ($m=1$) のトポロジカル不変量の抽出の詳細については、文献[2]に譲るとして、ここでは、結果だけを引用することにする。5次元から生成される主要な3次元多様体の中へのこの不安定周期軌道 ($m=1$) のトポロジカルな性質を調べた

結果, その全てが位相同型 (アンビエントイソトピー) であった。則ち, 基本的な不安定周期軌道 ($m=1$) が 3 次元多様体に埋め込まれていると仮定してもよい。以上の結果より, 図 4 を得る。図 4 のライデマイスター移動 [1] によって, 図 5 を得る: 図 4 と図 5 とは位相同型 (アンビエントイソトピー) であり, 基本的な不安定周期軌道 ($m=1$) のトポロジカル不変量は, 図 5 のようなトーラス結び目であるということがわかった。このトーラス結び目に対するザイフェルト行列 $S[1]$ は,

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

で与えられる。従って, アレキサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ は, このザイフェルト行列より,

$$\begin{aligned} \Delta_K(t) &= t^{-3} \cdot \det(S - tS^T) \\ &= t^{-3} - t^{-2} + t^{-1} - 1 + t - t^2 + t^3 \end{aligned}$$

となる。このアレキサンダー多項式より, トーラス結び目に対する種数が 3, および, Betti 数が 6 であることがわかる。これらの不変量は, 非周期軌道 (カオス) から抽出された不安定周期軌道の「指紋」ともいうべきトポロジカル不変量である。

文献

- [1] 村杉邦男: 「結び目理論とその応用」 (日本評論社, 1993).
- [2] N. Bekki: IFS Report #858 of the University of Texas at Austin(1999); J. Phys. Soc. **69**, 295(2000).
- [3] N.B. Tufillaro, H.G. Solari and R. Gilmore: Phys. Rev. A **41**, 5717(1990).
- [4] N. Bekki and T. Karakisawa: Phys. Plasmas **2**, 2945(1995).
- [5] E. Knobloch and M.R.E. Proctor: J.Fluid Mech. **108**, 291(1981).
- [6] E. Knobloch *et al.*: Phys. Plasmas **3**, 2475(1996).
- [7] N. Bekki and T. Karakisawa: Phys. Plasmas **3**, 2477(1996).
- [8] N. Bekki and T. Karakisawa: J. Phys. Soc. **69**, 2443(2000).

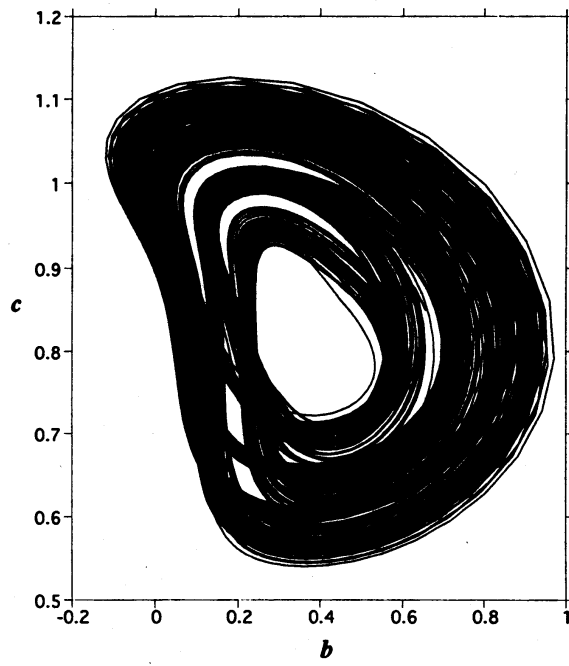


图 1

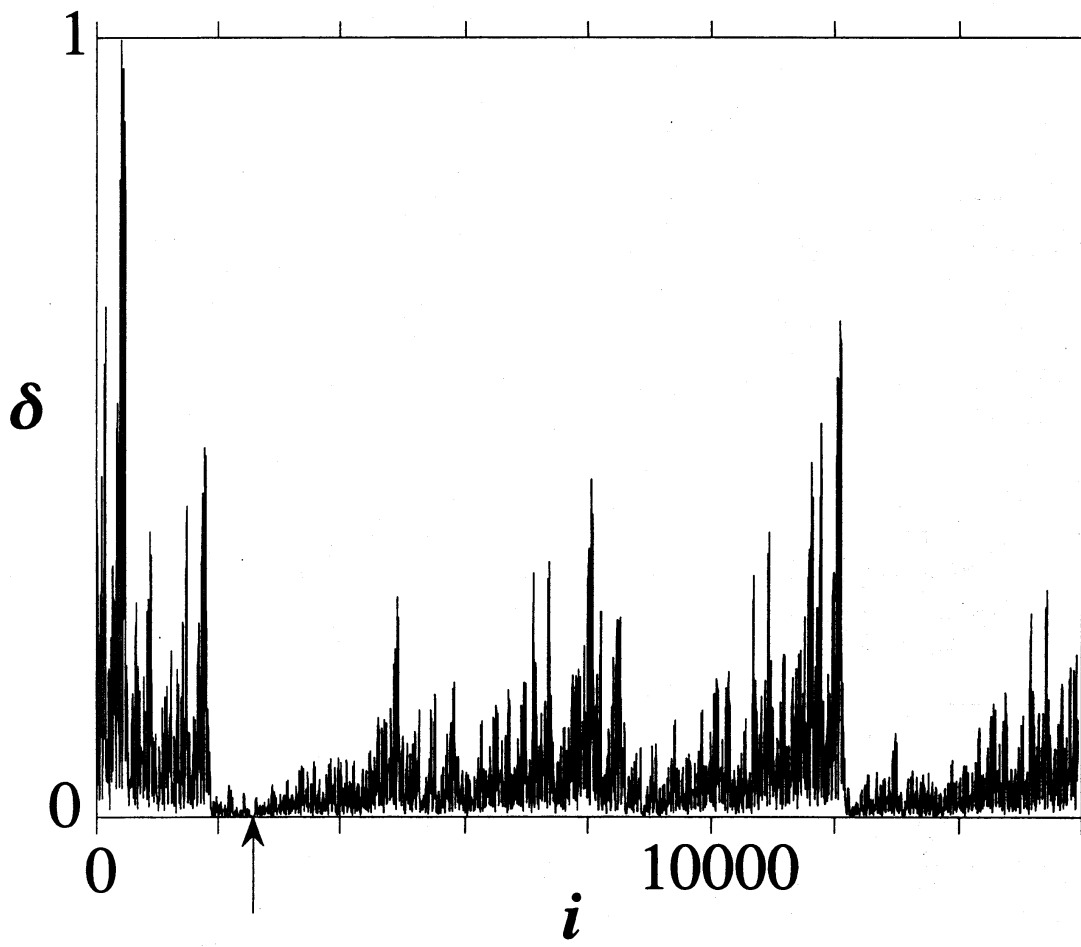


图 2

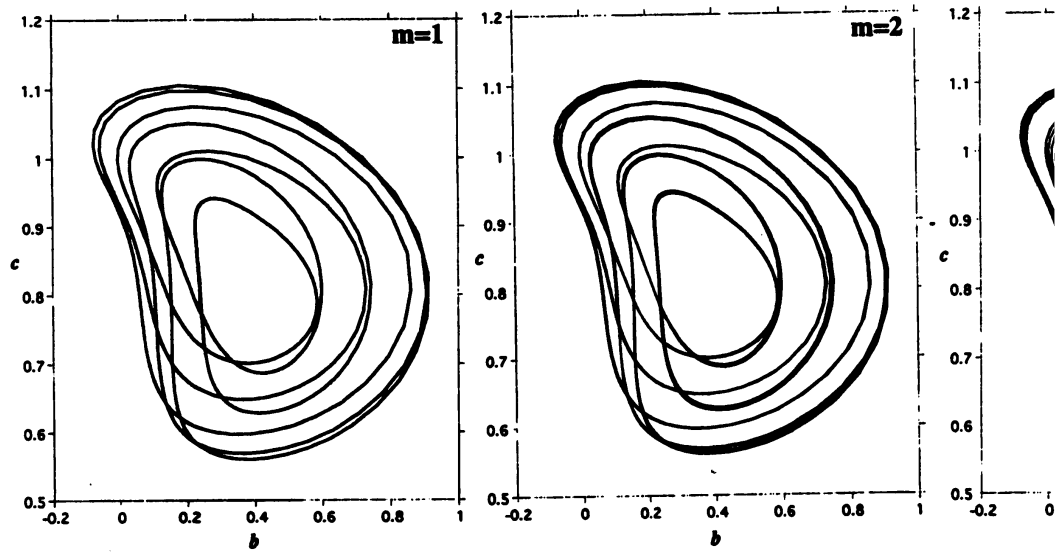


图 3

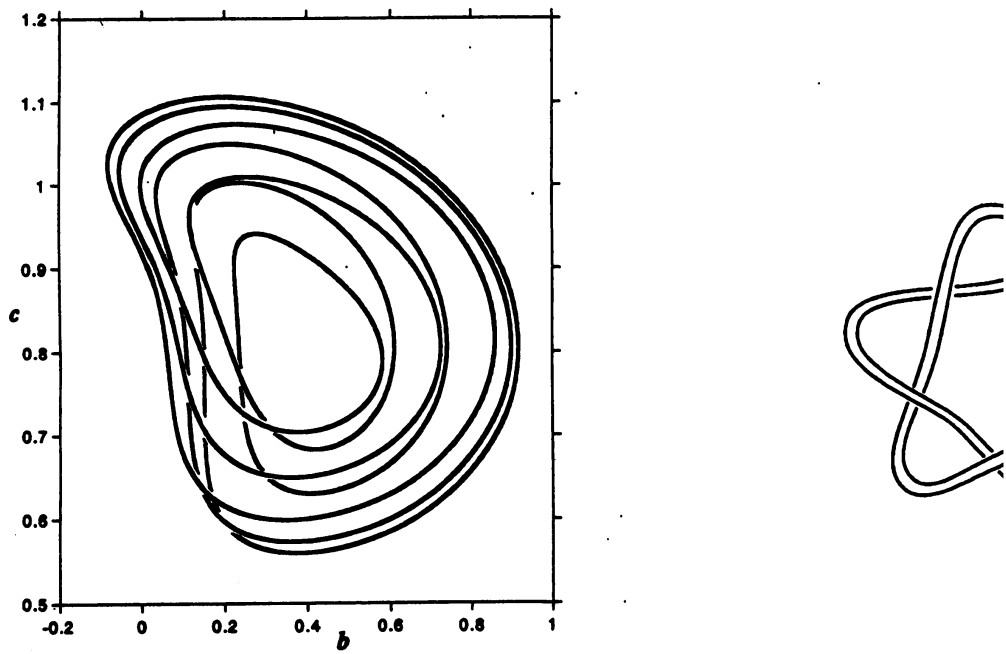


图 4