

Bergman spaces, Bloch functions and martingales

相工大 村本克志 (Katsushi Muramoto)

1. 準備と定理

複素平面 $\mathbb{C}$ の単位円板を D , その境界を ∂D と表す. ∂D 上の BMO 函数と BMO martingale の関係は良く知られている. 本稿では D 上の BMOA (= Bloch) 函数と martingale の関係を調べる.

解析函数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が D 上の Bloch 函数とは

$$\|f\|_B = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty.$$

D 上の Bloch 函数の全体を $B(D)$ と表す. 解析函数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ が D 上の BMOA 函数とは

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{\Delta: \text{ball in } D} \left\{ \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} |f(z) - f_{\Delta}|^2 dA(z) \right\}^{1/2} < \infty,$$

ただし, dA は面積要素, $|\Delta| = \int_{\Delta} dA$, $f_{\Delta} = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} f(z) dA(z)$.
 D 上の BMOA 函数全体を $BMOA(D)$ で表す. 解析函数 f :
 $D \rightarrow \mathbb{C}$ に対し 2 次の不等式が成立する.

$$\|f\|_{BMO} \leq \|f\|_B \leq 2\sqrt{2} \|f\|_{BMO}$$

Coifman, Rochberg and Weiss [3], Muramato [8].

次に, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ と $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ を与えておき, この空間上の複素ブラウン運動 (B_t) が定義されているものとする.
 $(Z_t^x) = (X_t^x + \sqrt{-1} Y_t^x)$ が $x \in D$ を出発する D ブラウン運動とは,

$$Z_0^x = x, \quad d\langle Z^x, Z^x \rangle_t = \frac{1}{2} (1 - |Z_t^x|^2)^2 d\langle B, B \rangle_t,$$

詳しく述べると

$$d\langle Z^x, Z^x \rangle_t = d\langle X^x, X^x \rangle_t + d\langle Y^x, Y^x \rangle_t$$

$$d\langle X^x, X^x \rangle_t = d\langle Y^x, Y^x \rangle_t = \frac{1}{2} (1 - |Z_t^x|^2)^2 dt$$

$$d\langle X^x, Y^x \rangle_t = d\langle Y^x, X^x \rangle_t = 0$$

簡単の爲に, $(Z_t) = (Z_t^0)$ とする, C^2 函数 $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ に対

し

$$u(Z_t^x) - u(Z_0^x) = \text{local. mart.} + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta_D u(Z_s^x) ds$$

が成立する。ここで Δ_D は Laplace - Beltrami operator of Poincaré disk D である。解析函数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned} E[|f(Z_t^x) - f(Z_0^x)|^2] &= E\left[\int_0^t |f'(Z_s^x)|^2 d\langle Z^x, Z^x \rangle_s\right] \\ &= E\left[\int_0^t |f'(Z_s^x)|^2 (1 - |Z_s^x|^2)^2 ds\right] \end{aligned}$$

が成立する (Meyer [7])。

Holomorphic martingale (U_t) を $\mathcal{B}$ -martingale とは, 定数 $c \geq 0$ が存在し, 任意の stopping time T に対し

$$E[|U_T - U_0|^2] \leq c^2 E[T].$$

上の不等式を満たす最小の c を $\|U\|_{\mathcal{B}}$ と表す。

以上の準備の下で次の定理が成立する。

定理 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ を解析函数とする.

(i) 任意の $x \in D$ に対し

$$\|f(z^x)\|_{\mathcal{B}} \leq \|f\|_{\mathcal{B}} \quad (\leq 2\sqrt{2} \|f\|_{\text{BMO}})$$

(ii) ある $x \in D$ に対し

$$(\|f\|_{\text{BMO}} \leq) \|f\|_{\mathcal{B}} \leq \|f(z^x)\|_{\mathcal{B}}$$

2. 定理の証明

$x \in D$ と stopping time T を固定しておく.

$$E[|f(z_T^x) - f(z_0^x)|^2]$$

$$= E\left[\int_0^T |f'(z_\lambda^x)|^2 d\langle z^x, z^x \rangle_\lambda\right]$$

$$\leq \|f\|_{\mathcal{B}}^2 E\left[\int_0^T \frac{1}{(1-|z_\lambda^x|^2)^2} d\langle z^x, z^x \rangle_\lambda\right]$$

$$\leq \|f\|_{\mathcal{B}}^2 E[T].$$

これから (i) の不等式が得られる.

次に, $0 \leq a < \|f\|_B$ とする. $x \in D$ が存在し

$$a < (1 - |x|^2) |f'(x)|.$$

$T(\varepsilon) = \inf \{ t > 0 ; |Z_t^x - Z_0^x| \geq \varepsilon \} \wedge 1$ とおく. このとき
ある $r > 0$ に対し

$$E \left[\int_0^{T(r)} a^2 ds \right] < E \left[\int_0^{T(r)} (1 - |Z_s^x|^2)^2 |f'(Z_s^x)|^2 ds \right]$$

$$= E \left[|f(Z_{T(r)}^x) - f(Z_0^x)|^2 \right]$$

$$\leq \|f(Z^x)\|_B E[T(r)]$$

$$a^2 E[T(r)] < \|f(Z^x)\|_B E[T(r)]$$

よ, 2 (ii) の不等式 $\|f\|_B \leq \|f(Z^x)\|_B$ が得られ, 定理が証明された.

3. B-martingale について

複素ブラウン運動 (B_t) は $\|B\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{2}$ の $\mathcal{H}$ -martingale である。実際, stopping time T に対し

$$E[|B_T - B_0|^2] = 2E[T].$$

Holomorphic martingale (M_t) を $\mathcal{M}^2$ -martingale とは

$$\|M\|_2 = E\left[\sup_t |M_t|^2\right]^{1/2} < \infty.$$

この martingale 全体を $\mathcal{M}^2$ で表す。上の例から, $\mathcal{H} \neq \mathcal{M}^2$ である。

ところで, 解析関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ に対し

$$\tilde{f}(z, w) = f(z) \quad (|z|^2 + |w|^2 = 1)$$

とおく。簡単のため $f(0) = 0$ とする。また, $(Z_t), (W_t)$ を独立な $\mathcal{H}$ -ブラウン運動とし, $\mu = \inf\{t > 0; |Z_t|^2 + |W_t|^2 \geq 1\}$ とおく。また, $N_t = \tilde{f}(Z_{t \wedge \mu}, W_{t \wedge \mu})$ とおくと

$$\|N\|_2^2 = E\left[\sup_t |\tilde{f}(Z_{t \wedge \mu}, W_{t \wedge \mu})|^2\right]$$

$$\leq 4 E[|\tilde{f}(Z_\mu, W_\mu)|^2] = 4 E[|f(Z_\mu)|^2]$$

$f \in B(D)$ であるば

$$\|N\|_2^2 \leq 4 E[\mu] \|f(Z)\|_{83}^2$$

あるいは定数 $C \geq 0$ が存在し, $\|N\|_2 \leq C \|f(Z)\|_{83}$ が成立する. この意味で $B(D) \subset \mathcal{M}^2$ が成立する.

一般には $\mathcal{M}^2$ と D 上の Bergman 空間が対応し, martingale の立場から構造を研究できるのではないかと思われるが, 今後の仕事に待たなければならぬ.

文献

- [1] S. Axler, The Bergman space, the Bloch space, and commutators of multiplication operators, Duke Math. J. 53 (1986), 315-332.
- [2] A. Beardon II, Analytic functions of bounded mean oscillation, Aspect of contemporary complex analysis, Academic Press, New York, 1980, pp. 3-36.

- [3] R. R. Coifman, R. Rochberg, and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Annals of Math.* 103 (1976), 611 - 635.
- [4] R. Durrett, *Brownian motion and martingales in analysis*, Wadsworth, Belmont, California, 1984.
- [5] Y. Gotoh, On BMO functions on Riemann surface, *J. Math. Kyoto Univ.* 25 (1985), 313 - 339.
- [6] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1981.
- [7] P. A. Meyer, *Géométrie stochastique sans larmes*, *Sém. de Prob. XV*, *Lecture Notes in Math.*, 850, Springer, 1981, pp. 44 - 102.
- [8] K. Muramoto, Harmonic Bloch and BMO functions on the unit ball in several variables, *Tokyo J. Math.* 11 (1988), 381 - 386.

- [9] W. Rudin, Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^N$, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
- [10] R. M. Timoney, Bloch functions in several complex variables, I, Bull. London Math. Soc. 12 (1980), 241-267.