

## 平衡プラズマにおける自由境界値問題の数値解法

東京大・工 今井 仁司  
(Hitoshi IMAI)

### § 0 序

物理現象を解く場合，目的意識をは，ましても，その問題にのぞまなくてはならない。今，2次元平衡プラズマの形状決定問題を解くことを考える。これは自由境界値問題と呼ばれる一連の問題の典型的なものの一つで，しかも内部問題と呼ばれるものである。固定境界の中に自由境界があり，それを求めるのが問題となる。内部問題では解の非一意性を示した論文もあり，解の分岐が起こる，という可能性が大きい。そこで分岐構造を明らかにするという立場に立，その問題を解くことを考える。しかも電流が表面にだけ流れているという特殊なモデルを解くのであるが，この場合等角写像を用いて解いた方が差分等で直接解くより有効だと思われる。以下，A.S. Demidov が *Phys. Fluids* で示した方法に従って，もう少し分岐がわかり易いようなパラメータをとって，その数値計算例を示すことにする。

## § 1 基礎方程式

分岐現象の構造を明らかにするために後で真空容器の形を制限するが、その前に一般の容器の形において以下の仮定を満たす平衡プラズマを考える。

### 仮定

- ① Ideal MHD である。
- ② z 方向に表面電流が流れている。
- ③ プラズマは平衡である。
- ④ z 方向には一様である。

今ベクトルポテンシャルを  $A = (A_x, A_y, A_z)$  (以下添字は成分を表す), 磁場を  $B$ , 電流を  $J$ , 容器の壁 (固定境界) を  $\Gamma$ , プラズマと真空の境界 (自由境界) を  $\gamma$ , プラズマ領域を  $\Omega_p$ , 真空領域を  $\Omega_v$  とすると,  $A, B, J$  に対してはよく知られている関係式

$$(1.1) \quad B = \text{rot } A, \quad J = \text{rot } B$$

を満たす。仮定④より  $A = A(x, y)$  だから  $B, J \in A$  で表わすと

$$(1.2) \quad B = (B_x, B_y, B_z) = \left( \frac{\partial}{\partial y} A_z, -\frac{\partial}{\partial x} A_z, \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right)$$

$$(1.3) \quad J = (J_x, J_y, J_z) \\ = \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right), \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_y \right), -\Delta A_z \right)$$

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  である。仮定②より

$$J = (0, 0, \rho \delta_\gamma), \quad (\rho > 0 \text{ は表面電流密度})$$

え。

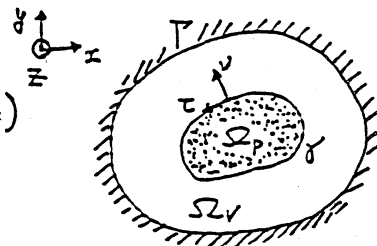


Fig. 1

度,  $d|_r$  は  $\gamma$  上の  $\delta$ -函数) とかかちけるので (1.3) とかき

$$\left. \begin{aligned} (1.4) \quad \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x &= B_z = \text{const} \\ (1.5) \quad -\Delta A_z(x, y) &= \rho \delta|_r \end{aligned} \right\} \text{ in } \Omega = \Omega_p \cup \gamma \cup \Omega_v$$

であることがわかる. 仮定③より  $|B|_r = \text{const}$  となければならぬので,  $\gamma$  上で (1.2), (1.4) を使うと

$$\begin{aligned} (1.6) \quad |B|^2 &= \text{const} = \left(\frac{\partial}{\partial x} A_z\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} A_z\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x\right)^2 \\ &= |\nabla A_z|^2 + \text{const} \end{aligned}$$

$$(1.7) \quad \therefore |\nabla A_z| = \text{const} \quad \text{on } \gamma$$

である.  $\equiv \equiv$  で  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$  である. 仮定①より  $A_z = \text{const}$  on  $\gamma$ , 当然ながら容器の壁  $\Gamma$  上で  $A_z = \text{const}$  である. 従って, (1.7) より  $\nu$  を  $\gamma$  の外向き法線方向の単位ベクトルとして

$$(1.8) \quad \frac{\partial}{\partial \nu} A_z = \text{const} \quad \text{on } \gamma$$

の定数は計算される

$$(1.9) \quad \int_{\gamma} \rho \, dl = \int_{\Omega_p} \rho \delta|_r \, dx = \int_{\Omega_p} (-\Delta A_z) \, dx = -\int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} A_z \, dl = -\frac{\partial}{\partial \nu} A_z \cdot \int_{\gamma} dl$$

$$(1.10) \quad \therefore \frac{\partial}{\partial \nu} A_z = -I_p / l_r \quad \text{on } \gamma$$

となる.  $\equiv \equiv$  で  $I_p = \int_{\gamma} \rho \, dl$  は全電流,  $l_r$  は  $\gamma$  の長さである.

フラックス定数  $K$  を

$$(1.11) \quad K = A_z|_r - A_z|_p > 0$$

とおく

$$(1.12) \quad u(x, y) = A_z|_r - A_z(x, y) \quad (x, y) \in \Omega_v$$

とおくと, 今考えたい平衡プラズマの問題は次のように書

かれる。

Prob. 1 次を満たす なるかな曲線  $\gamma$  と  $\Omega_v \cup \gamma$  でなるかな  $u$  を求めよ

$$(1.13) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_v \\ u = 0 & \text{on } \gamma \\ u = k & \text{on } \Gamma \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = I_p / l_\gamma & \text{on } \gamma \end{cases}$$

$$(1.14)$$

$$(1.15)$$

$$(1.16)$$

==  $I_p$ ,  $k$  は与えらぬ正定数で  $l_\gamma$  は  $\gamma$  の長さである。■

## § 2. 写像による変換

今分岐現象の構造を明らかにするため固定境界  $\Gamma$  は Fig. 2 のような対称性をもち、変数  $a$  によ、一意的に定まるものとする。そして対称にするプラズマも Fig. 2 に示すように 1-component プラズマと 2-component プラズマに限る。すると問題の対称性から  $1/4$  領域で問題を解けばよいことになる。

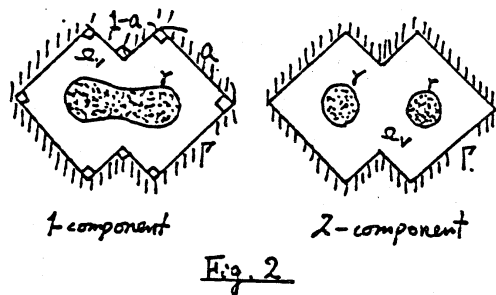


Fig. 2

従、Fig. 3 の領域で Prob. 1 を解くことを考える。簡単のため、 $I_p = 4$  に固定する。これを Prob. 2 とすると

Prob. 2 Fig. 3 の領域で Prob. 1 を解け。ただし  $\gamma$  は  $x$  軸,  $y$  軸に垂直に交わるとする。■

ここで  $x$  が  $x$  軸,  $y$  軸に垂直に交  
わるといふことは物理的には当然  
であるが数学的には  $O, E$  付近で  $u$   
が特異的でないことに対応する.

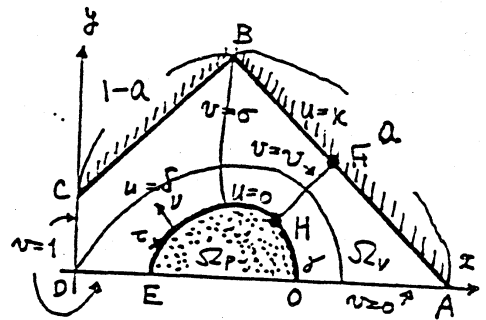


Fig. 3

即ち  $u$  は共役調和な  $v$  であること

より  $v_{OA} = 0$  とできる.  $x$  軸上  $CDE$  上で  $v$  は定数であるとする.

$x$  の定数は求めることにできる

$$(2.1) \quad v_{CDE} - v_{OA} = \int_C^E \frac{\partial v}{\partial z} dz = \int_C^E \frac{\partial v}{\partial u} u dz = 1 \quad (\because I_P = 4\pi)$$

$$(2.2) \quad \therefore v_{CDE} = 1$$

となる.  $u, v$  を使って  $\Omega_v$  を長方形領域に写す.  $x$  のために

(2.3)  $z = x + iy, w = u + iv$

とおく

$$(2.4) \quad G = \{0 < u < k, 0 < v < 1\}$$

とすると  $\Omega_v$  は  $G$  に写しれる.  $x$  の写像関数を求めるために

$$(2.5) \quad \frac{dz}{dw} = e^{A(u,v) + iB(u,v)}$$

とおく.  $A + iB$  は  $G$  で正則となる. 従って  $A, B$  のどちらか一方が求まれば他方も求まる.  $B$  は偏角を表わすので  $B$  の方が求めやすい. Prob. 1 の (1.13) ~ (1.15) に対応する  $B$  の条件は容易に求まり,

$$\Delta B = 0 \quad \text{in } G, \quad B(u, 0) = 0$$

$$(2.6) \quad \begin{cases} B(k, v) = \begin{cases} \frac{3}{4}\pi & \sigma < v < 1 \\ \frac{\pi}{4} & 0 < v < \sigma \end{cases} = \varphi(v), \\ B(u, 1) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \delta < u < \kappa \\ \pi & 0 < u < \delta \end{cases} = \chi(u) \end{cases}$$

であることがわかる。(1.16)に対応して(2.5)より

$$(2.7) \quad e^{-A(u, v)} = \left| \frac{dw}{dz} \right| \Big|_r = \left| \frac{\partial u}{\partial v} \right| \Big|_r = \frac{4}{\ell_r} = \text{const}$$

$$(2.8) \quad \therefore A(0, v) = A_0 = \text{const} \quad \text{on } \gamma$$

$$(2.9) \quad \therefore 0 = \frac{\partial}{\partial v} A(0, v) = -\frac{\partial B}{\partial u}(0, v)$$

$$(2.10) \quad \therefore \frac{\partial B}{\partial u}(0, v) = 0$$

従って(1.16)を $u$ が満たせば(2.10)が成立する。逆に(2.10)を $B$ が満たせば(2.9)より(2.8)が出る

$$(2.11) \quad \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial v}{\partial u} = c = \text{const} \quad \text{on } \gamma$$

が出る。よって

$$(2.12) \quad 1 = \int_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial u} dl = \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial v} dl = \frac{\partial u}{\partial v} \cdot \frac{\ell_r}{4}$$

$$(2.13) \quad \therefore \frac{\partial u}{\partial v} = 4/\ell_r \quad \text{on } \gamma$$

となつて(1.16)が満たされる。

さて $B$ を具体的に求めるには $\sigma, \delta$ を決定しなければならない。また写像関数(2.5)を定めるためには $B$ から $A$ を求めるわけであるが、このとき定数の任意性が残る。 $B$ から一意的に定まる部分を $A_1(u, v)$ とし、定数部分を(2.8)より $A_0$ とすると

$$(2.14) \quad A(u, v) = A_0 + A_1(u, v)$$

と書ける.  $\sigma, \delta, A_0$  の決定は Prob. 2 を解く = とを式で表現すればよい.  $\gamma$  のために次の関数を導入する.

$$(2.15) \quad I(v) = e^{-A_0} \cdot \text{Im} [Z(0, v) - Z(0, 0)] = \int_0^v \cos B(0, \gamma) d\gamma$$

$$(2.16) \quad S(v) = \int_0^v e^{A(k, \gamma)} d\gamma$$

$I(v)$  は Fig. 3 における  $Z(0)$  と  $H$  の  $y$  座標の差を表わし,  $S(v)$  は  $A$  と  $H$  の距離である. 従って,  $\sigma, \delta, A_0$  は

(i)  $\delta > 0$  のとき (2-component プラズマのとき)

$$(2.17) \quad I(1) = 0, \quad S(1) = 1, \quad S(\sigma) = a$$

(ii)  $\delta = 0$  のとき (1-component プラズマのとき)

$$(2.18) \quad S(1) = 1, \quad S(\sigma) = a$$

を満たすものとして決定される.  $\gamma$  は  $x$  軸の上になければならぬ, 即ち  $I(v) > 0$ ,  $0 < v < 1$  でなく  $z$  はならぬ" が  $\gamma$  が満たされることは示すことができる.

以上で Prob. 2 と等価な問題を考えることができる. (Fig. 4 参照)

Prob. 3 次のを満たす  $A(u, v) + iB(u, v)$  を求めよ. 但し  $A$  と  $B$  は共役調和で

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta B_{\sigma, \delta}(u, v) = 0 \quad \text{in } G \\ B_{\sigma, \delta}(u, 0) = 0 \\ B_{\sigma, \delta}(k, v) = \varphi_{\sigma}(v) \\ B_{\sigma, \delta}(u, 1) = \psi_{\delta}(u) \end{array} \right.$$

$$(2.20)$$

$$(2.21)$$

$$(2.22)$$

$$(2.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial u} B_{\sigma, \delta}(0, v) = 0 \\ \text{かつ} \\ A_{\sigma, \delta}(u, v) \text{ は (2.14) の形で } A_{\sigma, \delta}, B_{\sigma, \delta} \text{ は (2.17), (2.18) を満たす} \end{array} \right.$$

を満たす. ここで  $a, k$  は与えられた正定数で  $\frac{1}{2} < a \leq 1$  である.

(2.14) ~ (2.23) を満たす  $B_{\sigma, \delta}(u, v)$ ,  $\gamma$  から一意的に定まる  $A_{\sigma, \delta}(u, v)$  は具体的に求めることができた.

$$(2.24) \quad B_{\sigma, \delta}(u, v) = \frac{\pi}{2} v + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{1-(-)^n}{2} + \cos(n\pi\sigma) \right\} \cdot \frac{\cosh(n\pi u)}{\cosh(n\pi k)} \cdot \sin(n\pi v) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \cdot \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} \delta \cdot \frac{\sinh\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} v\right\}}{\sinh\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k}\right\}} \cdot \cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} u\right\}$$

$$(2.25) \quad A_{\sigma, \delta}(u, v) = \frac{\pi}{2} u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \frac{1-(-)^n}{2} + \cos(n\pi\sigma) \right\} \cdot \frac{\sinh(n\pi u)}{\cosh(n\pi k)} \cdot \cos(n\pi v) \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \cdot \sin\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} \delta \cdot \frac{\cosh\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} v\right\}}{\sinh\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k}\right\}} \cdot \sin\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{k} u\right\}$$

である.

### § 3 数値計算例

分岐について  $\gamma$  の構造をみるには次のようにすればわかり易い.  $a$  を分岐変数にとり, まず  $k > 0$  を定める. (2.24) の  $B_{\sigma, \delta}$  を使,  $I_{\sigma, \delta}(1)$  の  $\gamma$  ラフを  $\sigma$ - $\delta$  平面で作る, (2.17), (2.18) を  $I_{\sigma, \delta}(1)$  が満たすよう  $(\sigma, \delta)$  をプロットしてゆけば  $\sigma$  と  $\delta$  は互に独立変数ではなくなる.  $\sigma$  に対して  $a(\sigma) = s(\sigma)$  を

プロットしてゆけばよい。この  $a = a(\sigma)$  曲線に対して  $a$  を与えたとき (即ち容器の形を決めるということ)、 $a(\sigma)$  曲線との交点の数が Prob. 2 の解の数となる。

数値計算例を Fig. 5 ~ Fig. 11 に示す。Fig. 5 ~ Fig. 7 は  $k = 0.2$  , Fig. 8 ~ Fig. 11 は  $k = 1.0$  である。Fig. 5 と Fig. 8 は  $a = a(\sigma)$  の様子を示した。上側の曲線が 1-component プラズマ ( $\delta = 0$ ) のときのもので下の曲線が 2-component プラズマ ( $\delta > 0$ ) のときのものである。今  $a = 0.57$  としてみると Fig. 5 において  $a = a(\sigma)$  との交点は 3 つあるため平衡解は 3 つあることになる。それを図示したのが Fig. 6, 7, Fig. 9 ~ 11 である。 $k = 0.2$  のときは都合で 2 つしか示していない。  $\sigma$  -  $\delta$  面のメッシュのとり方が粗いため  $a = a(\sigma)$  のグラフはガタガタしているが傾向はよく表われていると思う。これから分岐の様子がわかる。  $a$  が 1 に近いときは解は 1 つしかなく、  $a$  が小さくなるにつれて解は 2 個、3 個となり、ゆく。また特に Fig. 11 が  $u$  と  $v$  が形が円でないのは  $\sigma$ ,  $\delta(\sigma)$  の値によって  $A_{1,\sigma\delta}(u,v)$  が特異的になり数値誤差が相当出ているためと思われる。この点は今検討中である。

### 参考文献

A.S. Demidov ; " The form of a steady plasma subject to the skin  
9.

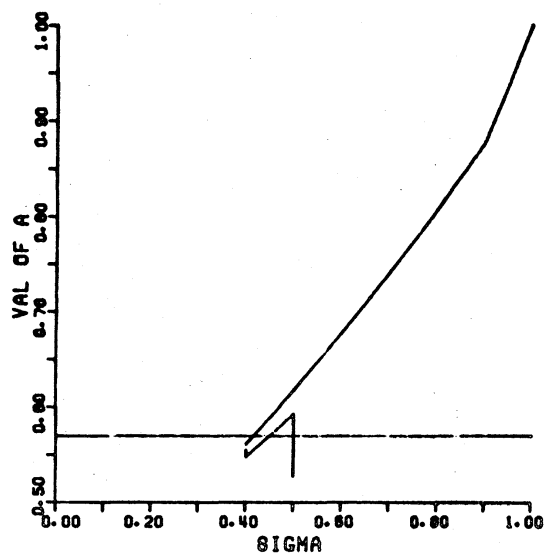
effect in a Tokamak with non-circular cross-section "

Nucl. Fusion, 15, 765-768, (1975)

A.S. Demidov ; " Equilibrium form of a steady plasma "

Phys. Fluids, 21 (6), 902-904, (1978)

## FIGURE OF A(KAPP, SIGM)



KAPP=0.20  
A =0.5700  
NUM =2.  
A1 =0.5613  
DEL=0.0000  
SIG=0.4000  
ERR=-0.0087  
A2 =0.5746  
DEL=0.1000  
SIG=0.5000  
ERR=0.0046

Fig. 5

## THE FORM OF PLASMA THE FORM OF PLASMA

KAPP=0.2000  
A0 =0.5700  
A =0.5634  
DELT=0.0000  
SIGM=0.4000

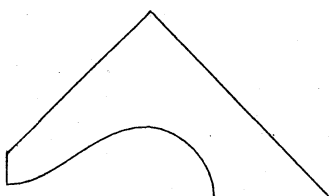


Fig. 6

KAPP=0.2000  
A0 =0.5700  
A =0.5745  
DELT=0.1000  
SIGM=0.5000

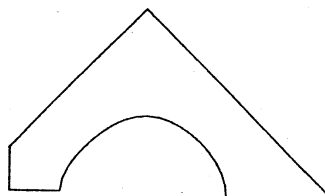
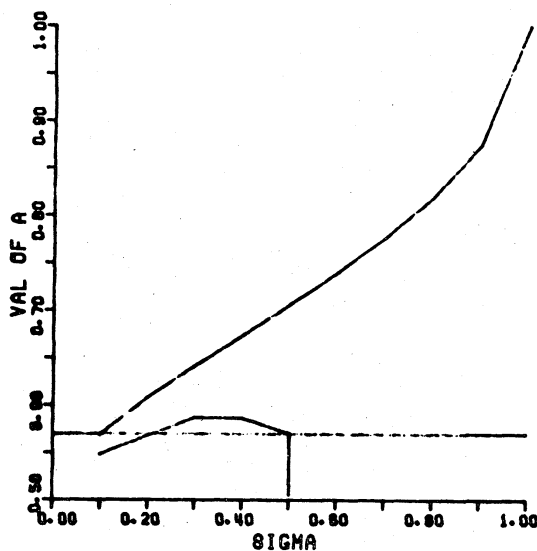


Fig. 7

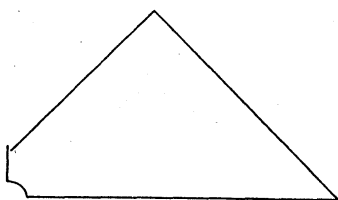
FIGURE OF  $A(KAPP, SIGM)$ 

KAPP=1.00  
 A = 0.5700  
 NUM = 2.  
 A1 = 0.5687  
 DEL=0.0000  
 SIG=0.1000  
 ERR=-0.0013  
 A2 = 0.5706  
 DEL=0.9000  
 SIG=0.5000  
 ERR=0.0006

Fig. 8

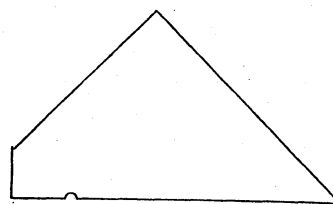
## THE FORM OF PLASMA THE FORM OF PLASMA

KAPP=1.0000  
 AO = 0.5700  
 A = 0.5708  
 DELT=0.0000  
 SIGM=0.1000

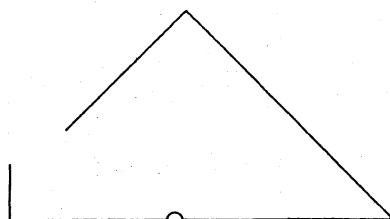
Fig. 9

## THE FORM OF PLASMA

KAPP=1.0000  
 AO = 0.5700  
 A = 0.5762  
 DELT=0.6300  
 SIGM=0.2000

Fig. 10

KAPP=1.0000  
 AO = 0.5700  
 A = 0.6380  
 DELT=0.9000  
 SIGM=0.5000

Fig. 11