

対称モノイダル G -圏とそれに付随する同変 コホモロジー論について

京大 数理研 島川和久

§0. 序

(i) $\mathcal{C}$ を対称モノイダル圏、 $|\mathcal{C}|$ をその分類空間とする。
Segal, Boardman-Vogt, May 等の infinite loop space machines
を用いれば、 $|\mathcal{C}|$ から Ω -spectrum (= 無限ループ空間) が
得られることはよく知られている。そこで本稿では、 $\mathcal{C}$ が
有限群 G の作用をもつ場合を考察し、島田-島川 [5] の方法
を用いて、 $\mathcal{C}$ から G -spectrum $E(\mathcal{C})$ を構成する。さらに、
 $\mathcal{C}$ が bimonoidal の場合には $E(\mathcal{C})$ が multiplicative な
 G -spectrum になる事もあわせて述べる。

(ii) 一般に G -spectrum が与えられたとき、それから同変
コホモロジー論を構成する方法は種々考えられる。ここでは
荒木-村山 [2] の τ -cohomology theory の一般化として定義
したので、§1 では G に条件 (1.6) をつける。一般の G に
対する取扱い方については §4. 補遺 で注意する。

§ 1. G -spectra

(1.1) G を有限群. $V_0, \dots, V_\ell$ を G の実既約表現の代表系とする (V_0 は 1 次元の自明表現). $RO(G) \cong \mathbb{Z}^{\ell+1}$ の任意の

元 α は, $\alpha = \alpha_0[V_0] + \dots + \alpha_\ell[V_\ell]$ と一意的にあらわせる.

$\alpha \in RO(G)^+$, 即ち $\alpha_j \geq 0$ ($\forall j$) のとき

$$S(\alpha) = \underbrace{V_0^c \wedge \dots \wedge V_0^c}_{\longleftarrow \alpha_0 \longrightarrow} \wedge \dots \wedge \underbrace{V_\ell^c \wedge \dots \wedge V_\ell^c}_{\longleftarrow \alpha_\ell \longrightarrow}$$

とおく. ただし V_j^c は表現空間 V_j の一点コンパクト化.

とくに G の正則表現の類を $\omega = [V_0] + \dots + [V_\ell]$ とおく; したがって,

$$S(\omega) = V_0^c \wedge V_1^c \wedge \dots \wedge V_\ell^c.$$

(1.2) 各 j ($0 \leq j \leq \ell$), および G の部分群 H に対して,

ベクトル空間 V_j^H の向きを一つ決めておくと, これにより

$S(\alpha)^H$, $\alpha \in RO(G)^+$, の向きが定まる. 今, $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = \beta_1 + \dots$

$+ \beta_q \in RO(G)$; $\alpha_i, \beta_j \in RO(G)^+$ とする. G -同相写像

$$f: S(\alpha_1) \wedge \dots \wedge S(\alpha_p) \rightarrow S(\beta_1) \wedge \dots \wedge S(\beta_q)$$

が orientation preserving (又は Degree one) とは, 各 $H \subset G$ に

対して, $\deg(f^H) = 1$ となることと定義する; これは V_j^H の

向きの選び方によらない.

$$(1.3) \text{ 例. } S(\omega) \wedge S(n\omega) \rightarrow S(n\omega) \wedge S(\omega), \\ (t, x) \mapsto (x, J^n(t))$$

$J(t) = -t$ ($t \in \omega$) は Degree one G -homeo. である. 一般に

V, W を G の表現とすると,

$$\begin{aligned} V^c \wedge W^c &\xrightarrow{T} W^c \wedge V^c \Rightarrow \deg(T^H) = (-1)^{|V^H||W^H|} \\ (v, w) &\longmapsto (w, v) \\ V^c &\xrightarrow{J} V^c \Rightarrow \deg(J^H) = (-1)^{|V^H|} \\ v &\longmapsto -v \quad (v \in V) \end{aligned}$$

となる。(ただし, $|V^H|$ はベクトル空間 V^H の次元.)

(1.4) V を G の表現, $C(G)$ を G の部分群の conjugacy classes の集合とすると, 次の図式が可換:

$$\begin{array}{ccc} [V^c, V^c]^G & \longrightarrow & A(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{C(G)} [(V^H)^c, (V^H)^c] & \xrightarrow{\oplus \deg} & \bigoplus_{C(G)} \mathbb{Z}. \end{array}$$

$V \geq 2\omega$ ならば横向きの変換は同型. したがって Degree one G -maps が存在すれば, それらは (安定的には) unique up to G -homotopy.

(1.5) 一般の G については Degree one G -homeo. が常にとれるとは限らないが, 次の条件を仮定すれば, 各整数の対 (i, j) , $0 \leq i < j \leq l$ に対して, Degree one G -homeo.,

$$\varphi_{i,j} : V_j^c \wedge V_i^c \longrightarrow V_i^c \wedge V_j^c$$

を選ぶことが出来る. ((1.3) の T および J を組合せる.)

(1.6) 条件. 各 (i, j) について, G の部分群 H を動かすとき, 次の $I \sim IV$ の全ての場合が起こることはない:

	I	II	III	IV
$ V_i^H $	odd	odd	even	even
$ V_j^H $	odd	even	odd	even

以下では、 G は常に (1.6) を満たすものと、任意の $\alpha, \beta \in RO(G)^+$ に対し、Degree one G -homeo.

$$\varphi(\alpha, \beta) : S(\alpha) \wedge S(\beta) \rightarrow S(\alpha + \beta)$$

を $\varphi_{i,j}$ 達の合成で定義する。次の図式が可換になることに注意：

$$\begin{array}{ccc}
 S(\alpha) \wedge S(\beta) \wedge S(\gamma) & \xrightarrow{1 \wedge \varphi(\beta, \gamma)} & S(\alpha) \wedge S(\beta + \gamma) \\
 \downarrow \varphi(\alpha, \beta) \wedge 1 & & \downarrow \varphi(\alpha, \beta + \gamma) \\
 S(\alpha + \beta) \wedge S(\gamma) & \xrightarrow{\varphi(\alpha + \beta, \gamma)} & S(\alpha + \beta + \gamma)
 \end{array}$$

(1.7) G -spectra. $E = \{E_n, E_n\}$ が G -spectrum $\iff$ 各 E_n ($n=0, 1, 2, \dots$) が G -space として、 $E_n : S(\omega) \wedge E_n \rightarrow E_{n+1}$ が G -map、とくに E_n が G -CW-complex として E_n が cellular inclusion のときには、 E を G -CW-spectrum と呼ぶ。

E, F を G -CW-spectra とするとき、 E から F への G -map を (CW -spectra の場合と同様) cofinal な sub-spectrum $C \subset E$ からの equivariant な functions の同値類として定義する。

(1.8) Fixed-point spectrum. E を G -CW-spectrum, H を G の部分群とすると、CW-spectrum $E^H = \phi_H E = \{E_n', E_n'\}$ が次のように定義される：

$$E'_{nd(H)} = E_n^H, \quad E'_{nd(H)+1} = S^1 \wedge E'_{nd(H)}, \quad \dots$$

$$E'_{nd(H)} = \text{id} : S^1 \wedge E'_{nd(H)} \rightarrow E'_{nd(H)+1}, \quad \dots$$

$$E'_{(n+1)d(H)-1} : S^1 \wedge E'_{nd(H)-1} \approx S^{(\omega)^H} \wedge E_n^H \xrightarrow{E_n^H} E_{n+1}^H = E'_{(n+1)d(H)},$$

$$\therefore \tau'' : d(H) = |\omega^H|.$$

$$(1.9) \quad \underline{G\text{-sphere spectrum}}, \quad \mathcal{S}_G = \{ S(n\omega), \varepsilon_n \},$$

$$\varepsilon_n : S(\omega) \wedge S(n\omega) \approx S((n+1)\omega) \quad \text{Degree one}$$

と定義する. 任意の G の部分群 H に対し, $\phi_H \mathcal{S}_G$ は sphere spectrum と同値.

$$(1.10) \quad E, F \text{ を } G\text{-CW-spectra とするにき.}$$

$$[E, F]^G = G\text{-homotopy classes of } G\text{-maps } E \rightarrow F$$

$$\text{と置く. } \forall H \subset G \text{ に対し, } \phi_H : [E, F]^G \rightarrow [\phi_H E, \phi_H F];$$

$$\phi_H[f] = [f^H] \text{ が定義される.}$$

$$(1.11) \quad E = \{ E_n, \varepsilon_n \} \text{ } G\text{-CW-spectrum, } \alpha \in RO(G)^+ \text{ とする. } G\text{-CW-spectrum } \Sigma^\alpha E \text{ を}$$

$$\Sigma^\alpha E = E \wedge S(\alpha) = \{ E_n \wedge S(\alpha), \varepsilon_n \wedge \text{id} \}$$

$$\text{で定義する. } \forall H \subset G \text{ に対し, } \phi_H(\Sigma^\alpha E) = \Sigma^{|\alpha^H|} E^H. \text{ 写像}$$

$$\begin{array}{ccc} [E, F]^G & \xrightarrow{\Sigma^\alpha} & [\Sigma^\alpha E, \Sigma^\alpha F]^G \\ \downarrow & & \downarrow \\ [f] & \longmapsto & [f \wedge \text{id}] \end{array}$$

は同型となる. とくに $\alpha \geq 2\omega$ のとき, 右辺は AG_1 -module となり, それによって $[E, F]^G$ に AG_1 -module の構造を入れる.

(1.12) X, E を G -CW-spectra とする. $\forall \gamma \in RO(G)$ に対

し,

$$\hat{E}^{\gamma}(X) = \operatorname{colim}_{\substack{\beta - \alpha = \gamma \\ \alpha, \beta \in RO(G)^+}} [\Sigma^{\alpha} X, \Sigma^{\beta} E]^G$$

と置く. ただし (極限は

$$[\Sigma^{\alpha} X, \Sigma^{\beta} E]^G \xrightarrow{\Sigma^{\delta}} [\Sigma^{\delta} \Sigma^{\alpha} X, \Sigma^{\delta} \Sigma^{\beta} E]^G \xrightarrow{\cong} [\Sigma^{\alpha+\delta} X, \Sigma^{\beta+\delta} E]^G$$

についてとるものとする. (後の写像は Degree one G -homeo $\varphi(\alpha, \delta)$, $\varphi(\beta, \delta)$ で定義されるもの.)

とくに, X が G -CW-complex のとき,

$$\begin{aligned} \hat{E}^{\gamma}(X) &= \hat{E}^{\gamma}(S_G \wedge X) \\ &= \operatorname{colim}_n [S(n\omega - \gamma) \wedge X, E_n]^G \end{aligned}$$

と置くことにより, [1] の意味における $RO(G)$ -graded, AG -module valued cohomology theory が得られる: $\forall \varepsilon \in RO(G)^+$

に対し, suspension 同型 $\sigma^{\varepsilon}: \hat{E}^{\gamma}(X) \rightarrow \hat{E}^{\gamma+\varepsilon}(\Sigma^{\varepsilon} X)$ が ~~定義~~

$$\operatorname{colim}_n [S(n\omega - \gamma) \wedge X, E_n]^G \rightarrow \operatorname{colim}_n [S(n\omega - \gamma - \varepsilon) \wedge (S^{\varepsilon} E) \wedge X, E_n]^G$$

で定義出来る.

(1.13) Sign convention. $\alpha, \beta \in RO(G)^+$ とすると, 次の [2]

式が可換:

$$\begin{array}{ccc} & \hat{E}^{\gamma+\alpha}(\Sigma^{\alpha} X) & \longrightarrow \hat{E}^{\gamma+\alpha+\beta}(\Sigma^{\beta} \Sigma^{\alpha} X) \\ \nearrow & & \downarrow (\tau(\alpha, \beta) \wedge 1)^* \\ \hat{E}^{\gamma}(X) & & \\ \searrow & \hat{E}^{\gamma+\beta}(\Sigma^{\beta} X) & \longrightarrow \hat{E}^{\gamma+\alpha+\beta}(\Sigma^{\alpha} \Sigma^{\beta} X) \end{array}$$

ここで, $\tau(\alpha, \beta) = \varphi(\beta, \alpha)^{-1} \cdot \varphi(\alpha, \beta)$; $S(\alpha) \wedge S(\beta) \xrightarrow{\cong} S(\beta) \wedge S(\alpha)$.

さるに, $(\tau(\alpha, \beta) \wedge 1)^* = p_{\alpha, \beta} (\tau \wedge 1)^*$ と書ける. たゞし,
 $p_{\alpha, \beta}$ は G -map: $S(\alpha + \beta) \xrightarrow{\varphi} S(\alpha) \wedge S(\beta) \xrightarrow{\tau} S(\beta) \wedge S(\alpha) \xrightarrow{\varphi} S(\alpha + \beta)$
 で代表される $A(G)$ の unit である.

(1.14) Fixed-point cohomology. 部分群 $H \subset G$ に対し,
 自然変換

$$\phi_H: \widehat{E}^Y(X) \longrightarrow \widehat{\phi_H E}^{Y^H}(X^H)$$

が存在して, 次の図式が可換:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{E}^Y(X) & \longrightarrow & \widehat{\phi_H E}^{Y^H}(X^H) \\ \downarrow \sigma^E & & \downarrow \\ \widehat{E}^{Y+E}(\Sigma^E X) & \longrightarrow & \widehat{\phi_H E}^{Y^H+E^H}(\Sigma^{E^H} X^H). \end{array}$$

(1.15) Ring G -spectra. $E = \{E_n, \varepsilon_n\}$ を G -spectrum
 とする. G -maps

$$\mu_{m,n}: E_m \wedge E_n \longrightarrow E_{m+n}, \quad \iota_n: S(n\omega) \longrightarrow E_n$$

が存在して, 次の図式を (up to G -homotopy) 可換にすると
 き, E を ring G -spectrum と呼ぶことにする:

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} (S(\omega) \wedge E_m \wedge 1 \wedge E_n) & \xrightarrow{\varepsilon_m \wedge 1} & E_{m+1} \wedge E_n & & \\ \uparrow = & & & \searrow \mu_{m+1,n} & \\ S(\omega) \wedge (E_m \wedge E_n) & \xrightarrow{1 \wedge \mu_{m,n}} & S(\omega) \wedge E_{m+n} & \xrightarrow{\varepsilon_{m+n}} & E_{m+n+1} \\ \downarrow \nu & & & \nearrow \mu_{m,n+1} & \\ E_m \wedge (S(\omega) \wedge E_n) & \xrightarrow{1 \wedge \varepsilon_n} & E_m \wedge E_{n+1} & & \end{array}$$

ここで, $\nu(S, u, v) = (u, J^m(S), v)$; $S \in S(\omega), u \in E_m, v \in E_n$,

$$(2) \quad E_m \wedge E_n \wedge E_p \longrightarrow E_m \wedge E_{n+p}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ E_{m+n} \wedge E_p & \longrightarrow & E_{m+n+p} \end{array},$$

$$(3) \quad S(m\omega) \wedge E_n \longrightarrow E_m \wedge E_n \longleftarrow E_m \wedge S(n\omega)$$

$$\begin{array}{ccc} \searrow \varepsilon_{m+n-1} \cdots \varepsilon_n & \downarrow \mu & \downarrow \nu' \\ & E_{m+n} & \longleftarrow S(n\omega) \wedge E_m \end{array}$$

ここで, $\nu'(u, s) = (J^{mn}(s), u)$; $u \in E_m, s \in S(n\omega)$.

更に,

$$\begin{array}{ccc} E_m \wedge E_n & \xrightarrow{T} & E_n \wedge E_m \\ \mu_{m,n} \searrow & & \swarrow \mu_{n,m} \\ & E_{m+n} & \end{array}$$

において, $\mu_{n,m} \circ T \xrightarrow[\cong]{G} J^{mn} \mu_{m,n}$ (stably) のとき, $\mathbb{E}$ を可換な ring G -spectrum と呼ぶ。ring- G -spectrum $\mathbb{E}$ に対しては, "積"

$$\mu : \hat{\mathbb{E}}^\alpha(X) \otimes_{A(G)} \hat{\mathbb{E}}^\beta(Y) \longrightarrow \hat{\mathbb{E}}^{\alpha+\beta}(X \wedge Y)$$

が定義される。

§2. 対称モノイダル G -圏の delooping

(2.1) topological G -category $\mathbb{Z}$ が "対称モノイダル

G -圏 (sym. mon. G -cat.) $\xLeftrightarrow[\text{def.}] G\text{-functor } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\oplus} \mathbb{Z}$,

$0 \in \mathcal{E}^G$, および次の coherent natural G -isomorphisms が存在する:

$$a \oplus (b \oplus c) \cong (a \oplus b) \oplus c$$

$$a \oplus 0 \cong a \cong 0 \oplus a$$

$$a \oplus b \cong b \oplus a$$

(2.2) $\mathcal{E}$ に対し, Γ - G -category $\hat{\mathcal{E}} : \Gamma^{\text{op}} \rightarrow (G\text{-categories})$ を次のように定義する. ([5], §2 参照.)

$$(i) \quad \hat{\mathcal{E}}(\underline{0}) = *$$

(ii) $n \geq 1$ のとき, (a) $\hat{\mathcal{E}}(\underline{n})$ の objects は $\langle a_S, \alpha_{S,T} \rangle$ の全体. ただし,

$$\begin{cases} a_S = 0_{\mathcal{E}}; & \forall S \in \underline{n} = \{1, 2, \dots, n\}, a_\emptyset = 0 \\ \alpha_{S,T} : a_{S \cup T} \xrightarrow{\sim} a_S \oplus a_T; & S, T \in \underline{n}, S \cap T = \emptyset \end{cases}$$

で, $\alpha_{S,T}$ は [5] Def. 2.1 の条件を満たすもの. $0_{\hat{\mathcal{E}}}(\underline{n})$ は $\prod_S 0_{\mathcal{E}} \times \prod_{S,T} M_{\mathcal{E}}$ の部分空間と考える.

(b). $a = \langle a_S, \alpha_{S,T} \rangle, b = \langle b_S, \beta_{S,T} \rangle \in 0_{\hat{\mathcal{E}}}(\underline{n})$ のとき, a から b への morphism とは, $f = \langle f_S \rangle; f_S : a_S \rightarrow b_S$ で次の図式を可換にするもの:

$$\begin{array}{ccc} a_{S \cup T} & \xrightarrow{f_{S \cup T}} & b_{S \cup T} \\ \downarrow \alpha_{S,T} & & \downarrow \beta_{S,T} \\ a_S \oplus a_T & \xrightarrow{f_S \oplus f_T} & b_S \oplus b_T \end{array}$$

(c) $\langle a_s, \alpha_{s,T} \rangle \in \widehat{O\zeta}(\underline{\eta})$, $g \in G$ のとき.

$$g \langle a_s, \alpha_{s,T} \rangle = \langle g a_s, g \alpha_{s,T} \rangle.$$

(iii) $\theta : \underline{m} \rightarrow \underline{\eta} \Rightarrow \theta^* : \widehat{\zeta}(\underline{\eta}) \rightarrow \widehat{\zeta}(\underline{m})$, $\theta^* \langle a_s, \alpha_{s,T} \rangle$
 $= \langle b_u, \beta_{u,v} \rangle$; $b_u = a_{\theta u}$, $\beta_{u,v} = \alpha_{\theta u, \theta v}$ ($u, v \in \underline{m}$).

(2.4) (2.3) で定義した $\widehat{\zeta}(\underline{\eta})$ の objects と $\widehat{\zeta}(\underline{\eta})$ morphisms
 の空間を考えることにより, 2つの Γ - G -spaces

$$O\widehat{\zeta} : \underline{\eta} \longmapsto O\widehat{\zeta}(\underline{\eta}),$$

$$M\widehat{\zeta} : \underline{\eta} \longmapsto M\widehat{\zeta}(\underline{\eta})$$

と $\widehat{\zeta}(\underline{\eta})$ Γ - G -spaces の maps

$$O\widehat{\zeta} \xrightarrow{\text{identity}} M\widehat{\zeta} \xrightarrow[\text{Target}]{\text{source}} O\widehat{\zeta},$$

$$M\widehat{\zeta} \times_{O\widehat{\zeta}} M\widehat{\zeta} \xrightarrow{\text{composition}} M\widehat{\zeta}$$

が得られる.

(2.5) 任意の pointed G -space X に対して, G -category
 $X \otimes \zeta$ を次のように定義する:

$$O(X \otimes \zeta) = \coprod_n X^n \times O\widehat{\zeta}(\underline{\eta}) / \Gamma$$

$$M(X \otimes \zeta) = \coprod_n X^n \times M\widehat{\zeta}(\underline{\eta}) / \Gamma$$

ととき, $X \otimes \zeta$ の構造写像は, (2.4) の Γ - G -maps から得
 られるものとする.

(2.6) 命題. $X \otimes \mathbb{C}$ の分類空間 $|X \otimes \mathbb{C}|$ は G -space として

$$X \otimes_{\Gamma} G = \coprod_n X^n \times |\hat{\mathbb{C}}(n)| / \Gamma$$

に natural に同相である. ここで G は $n \mapsto |\hat{\mathbb{C}}(n)|$ ($\hat{\mathbb{C}}(n)$ の分類空間) なる Γ - G -space.

略証. 次の図式を考えればよい.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \xrightarrow{X \otimes} & & \\
 O\hat{\mathbb{C}}(0) & O\hat{\mathbb{C}}(1) & \cdots & O\hat{\mathbb{C}}(n) & \cdots & \rightarrow & O(X \otimes \mathbb{C}) \\
 M\hat{\mathbb{C}}(0) & M\hat{\mathbb{C}}(1) & \cdots & M\hat{\mathbb{C}}(n) & \cdots & \rightarrow & M(X \otimes \mathbb{C}) \\
 \text{geom.} \downarrow & & & & & & \downarrow \\
 \text{real.} \downarrow & & & & & & \downarrow \\
 N_g\hat{\mathbb{C}}(0) & N_g\hat{\mathbb{C}}(1) & \cdots & N_g\hat{\mathbb{C}}(n) & \cdots & \rightarrow & N_g(X \otimes \mathbb{C}) \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\
 |\hat{\mathbb{C}}(0)| & |\hat{\mathbb{C}}(1)| & \cdots & |\hat{\mathbb{C}}(n)| & \cdots & \rightarrow & X \otimes \mathbb{C} \cong |X \otimes \mathbb{C}|
 \end{array}$$

ここで、横の列は Γ - G -space, たての列は simplicial space で、右端および下端は、それらから得られる coend. iterated coend は coend のとり方の順序を変えても natural に同型である.

(2.7) 図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & \delta_* \times 1 & \nearrow & X \times C(1) & \nwarrow \gamma \times \varepsilon^* \\
 & & & \downarrow & \\
 * \times C(1) & & & X \otimes C & \\
 & \nwarrow \gamma \times \delta_* & & \uparrow & \nearrow \varepsilon_* \times 1 \\
 & & & * \times C(0) & \\
 & & & & X \times C(0), \quad 0 \xrightleftharpoons[\varepsilon]{\delta} 1
 \end{array}$$

は可換. したがって G -map

$$X \wedge C(\underline{1}) = X \wedge |\underline{1}| \rightarrow |X \otimes \underline{1}|$$

が導かれる.

(2.8) 定理. $X \otimes \underline{1}$ は再び, 対称モノイダル G -圏になる.

略証. 次の順序で示す.

$$(i) \quad \underline{1}, \underline{1} : \text{sym. mon. } G\text{-cat} \Rightarrow (\underline{1} \times \underline{1})^\wedge = \hat{\underline{1}} \times \hat{\underline{1}} \\ \Rightarrow X \otimes (\underline{1} \times \underline{1}) \cong (X \otimes \underline{1}) \times (X \otimes \underline{1}).$$

$$(ii) \quad \underline{1} \times \underline{1} \xrightarrow{\oplus} \underline{1} \text{ は sym. mon. } G\text{-functor} \Rightarrow \\ (\underline{1} \times \underline{1})^\wedge \xrightarrow{\hat{\oplus}} \hat{\underline{1}} \text{ (}\Gamma\text{-}G\text{-functor)}$$

が導かれる.

$$(iii) \quad (ii) \text{ より } G\text{-functor } X \otimes \underline{1} \times X \otimes \underline{1} \cong X \otimes (\underline{1} \times \underline{1}) \\ \xrightarrow{\oplus} X \otimes \underline{1} \text{ が定義され, これにより, } X \otimes \underline{1} \text{ は sym. mon. } \\ G\text{-cat. となる.}$$

(2.9) 定義. 対称モノイダル G -圏 $\underline{1}$ に対し,

$$B\underline{1} = S(\omega) \otimes \underline{1}$$

と置く. これは対称モノイダル G -圏となる. 以下帰納的に

$$B^{n+1}\underline{1} = S(\omega) \otimes B^n\underline{1}, \quad n \geq 1$$

と置く. (3.7) より G -maps

$$S(\omega) \wedge |B^n\underline{1}| \xrightarrow{\varepsilon_n} |B^{n+1}\underline{1}|$$

が存在する.

(2.10) 系. $E(\zeta) = \{ |B^n \zeta|, \varepsilon_n \}$ は G -spectrum.

(2.11) 注意. 適当な条件の下では ε_n の adjoint

$$|B^n \zeta| \longrightarrow \Omega^\omega |B^{n+1} \zeta|$$

は G -homotopy equivalence になる.

§3. G -pairings

(3.1) $\zeta, \mathcal{D}, \mathcal{E}$: sym. mon. G -categories, $P: \zeta \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$: G -functor とする. (定義) P が G -pairing
 $\iff$ natural G -isomorphisms

$$\delta: P(a \oplus a', b) \xrightarrow{\cong} P(a, b) \oplus P(a', b)$$

$$\delta': P(a, b \oplus b') \xrightarrow{\cong} P(a, b) \oplus P(a, b')$$

が存在して, P は各変数について sym. mon. G -functor になり, 次の図式が可換:

$$P(a, b \oplus b') \oplus P(a', b \oplus b') \cong (P(a, b) \oplus P(a, b')) \oplus (P(a', b) \oplus P(a', b'))$$

$\Downarrow \delta'$

$$P(a \oplus a', b \oplus b')$$

$\Downarrow$

$\Downarrow \delta$

$$P(a \oplus a', b) \oplus P(a \oplus a', b') \cong (P(a, b) \oplus P(a', b)) \oplus (P(a, b') \oplus P(a', b')).$$

とくに, ζ が 2つの sym. mon. structure $(\oplus, 0), (\otimes, 1)$

をもち, $\otimes: (\zeta, \oplus) \times (\zeta, \oplus) \rightarrow (\zeta, \oplus)$

が G -pairing になるとき, ζ を 対称バイモノイダル G -圏
 (symmetric bimonoidal G -category) と呼ぶ.

$\mathcal{C}$ を対称バイモノイダル G -圏とし、 $\oplus$ に関して、 $B^n \mathcal{C}$ を構成する ($B^0 \mathcal{C} = \mathcal{C}$).

(3.2) 定理. 任意の整数の組 (m, n) ; $m, n \geq 0$ に対して、 G -pairing $P_{m,n} : B^m \mathcal{C} \times B^n \mathcal{C} \rightarrow B^{m+n} \mathcal{C}$ で次の性質をみたすものが存在する.

$$(i) \quad P_{0,0} = \otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

(ii) 次の図式が coherent な natural G -isom. を除いて可換.

$$\begin{array}{ccc} B^m \mathcal{C} \times B^n \mathcal{C} \times B^p \mathcal{C} & \longrightarrow & B^m \mathcal{C} \times B^{n+p} \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^{m+n} \mathcal{C} \times B^p \mathcal{C} & \longrightarrow & B^{m+n+p} \mathcal{C} \end{array},$$

$$\begin{array}{ccc} B^m \mathcal{C} \times B^n \mathcal{C} & \xrightarrow{T} & B^n \mathcal{C} \times B^m \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^{m+n} \mathcal{C} & \longrightarrow & B^{n+m} \mathcal{C} \end{array}$$

ここで、 $\tau_{m,n}$ は (m, n) に対して定まる $B^{m+n} \mathcal{C}$ のある自己同型.

略証. (i) X, Y pointed G -space とするとき、 G -同型 $\tau : X \otimes (Y \otimes \mathcal{C}) \cong Y \otimes (X \otimes \mathcal{C})$ が存在する.

(ii) $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ G -pairing とするとき、 G -pairings

$$(X \otimes \mathcal{C}) \times \mathcal{D} \rightarrow X \otimes \mathcal{E} \quad (\Leftarrow \hat{\mathcal{C}}(\underline{n}) \times \mathcal{D} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}(\underline{n})),$$

$$\mathcal{C} \times (Y \otimes \mathcal{D}) \rightarrow Y \otimes \mathcal{E} \quad (\Leftarrow \mathcal{C} \times \hat{\mathcal{D}}(\underline{n}) \rightarrow \hat{\mathcal{E}}(\underline{n}))$$

が定義され、次の図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \otimes (Y \otimes \varepsilon) \\
 & \nearrow & \downarrow \cong \tau \\
 (X \otimes \zeta) \times (Y \otimes \partial) & & \\
 & \searrow & \\
 & & Y \otimes (X \otimes \varepsilon).
 \end{array}$$

(iii) (ii) を用いて $P_{m,n} : B^m \zeta \times B^n \zeta \rightarrow B^{m+n} \zeta$ を帰納的に構成する: $X_1, \dots, X_{m+n} = S(\omega)$, $B^m \zeta = X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes \zeta$, $B^n \zeta = X_{m+1} \otimes \dots \otimes X_{m+n} \otimes \zeta$ とおくとき、

$$\begin{array}{ccc}
 (X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes \zeta) \times (X_{m+1} \otimes \dots \otimes X_{m+n} \otimes \zeta) & \xrightarrow{P_{m,n}} & X_1 \otimes \dots \otimes X_{m+n} \otimes \zeta \\
 \downarrow T & & \downarrow \tau_{m,n} \\
 (X_{m+1} \otimes \dots \otimes X_{m+n} \otimes \zeta) \times (X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes \zeta) & \xrightarrow{P_{n,m}} & X_{m+1} \otimes \dots \otimes X_{m+n} \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_m \otimes \zeta
 \end{array}$$

となる。ここで、 $\tau_{m,n}$ は置換 $\begin{pmatrix} 1 & \dots & m+n \\ m+1 & \dots & m+n & 1 & \dots & m \end{pmatrix}$ に対応する同型 (ii) の τ 達の合成)。

(3.3) G -pairings $P_{m,n}$ は G -maps $\mu_{m,n} : |B^m \zeta| \times |B^n \zeta| \rightarrow |B^{m+n} \zeta|$ を誘導する。また $\iota_0 : S^0 \rightarrow |\zeta|$ ($\iota_0(1)$ は $1 \in 0\zeta$ の類) を suspend して G -maps $\iota_n : S(n\omega) \rightarrow |B^n \zeta|$ が得られる。

(3.4) 系. $E(\zeta) = \{|B^n \zeta|, \varepsilon_n\}$ は可換な ring G -spectrum になる。

§ 4. 補遺

G を有限群, $RO(G)$ をその実表現環とする.

(4.1) $\Xi = \{G, I, \{V(\alpha); \alpha \in I^+\}, \{\varphi(\alpha, \beta); \alpha, \beta \in I^+\}\}$

を次の data から成る系とする.

(i) I は $RO(G)$ の部分群, $I^+ = I \cap RO(G)^+$,

(ii) $V(\alpha)$ は $\alpha \in I^+$ を代表する G -module,

(iii) $\varphi(\alpha, \beta): V(\alpha) \times V(\beta) \xrightarrow{\sim} V(\alpha+\beta)$ は表現の同型で, 次の図式を可換にするもの:

$$\begin{array}{ccc} V(\alpha) \times V(\beta) \times V(\gamma) & \xrightarrow{1 \times \varphi(\beta, \gamma)} & V(\alpha) \times V(\beta+\gamma) \\ \downarrow \varphi(\alpha, \beta) \times 1 & & \downarrow \varphi(\alpha, \beta+\gamma) \\ V(\alpha+\beta) \times V(\gamma) & \xrightarrow{\varphi(\alpha+\beta, \gamma)} & V(\alpha+\beta+\gamma) \end{array}$$

以下では, I は 1 (自明表現) 及び $d\omega$ (ω は正則表現, d はある正整数) を含むものと仮定する.

(4.2) 例. $I = RO(G)$ の場合を考える. §1 と同様, G の既約表現の代表系 $V_0, \dots, V_\ell$ を選んで,

$$V(\alpha) = \underbrace{V_0 \times \dots \times V_0}_{\leftarrow \alpha_0 \rightarrow} \times \dots \times \underbrace{V_\ell \times \dots \times V_\ell}_{\leftarrow \alpha_\ell \rightarrow}$$

と置く. $\varphi(\alpha, \beta)$ を与える為には, 各 (i, j) , $0 \leq i < j \leq \ell$ に対して, G -同型 $\varphi_{i,j}: V_j \times V_i \xrightarrow{\sim} V_i \times V_j$ で, 次の図式

$$\begin{array}{ccc}
 V_k \times V_j \times V_i & \longrightarrow & V_k \times V_i \times V_j \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 V_j \times V_k \times V_i & & V_i \times V_k \times V_j \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 V_j \times V_i \times V_k & \longrightarrow & V_i \times V_j \times V_k
 \end{array}$$

が可換となるものを定めればよい. くに実数 $a_i^j \neq 0, b_i^j \neq 0$ を選んで, $\varphi_{i,j}(y, x) = (a_i^j x, b_i^j y); x \in V_i, y \in V_j$ とおけばよい.

(4.3) $H \subset G$ 部分群とし, $\text{res}_H^G: \text{RO}(G) \rightarrow \text{RO}(H)$ を表現の制限とする. このとき $\text{res}_H^G \Xi = \{H, \text{res}_H^G I, \{V(\text{res}_H^G \alpha)\}, \{\varphi(\text{res}_H^G \alpha, \text{res}_H^G \beta)\}\}$ が定義される.

(4.4) Ξ : orientable $\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall \alpha \in I^+, \forall H \subset G$ に対して, $V(\alpha)^H$ の向きを決めて,

$$\varphi(\alpha, \beta)^H: V(\alpha)^H \times V(\beta)^H \rightarrow V(\alpha + \beta)^H$$

が orientation preserving になる時,

§1 で扱ったのは, $I = \text{RO}(G)$ で Ξ : orientable の場合,

(4.6) G-spectra, $\alpha \in I^+$ に対し, $S(\alpha) = V(\alpha)^G$ とする. §1 と同様に G -spectrum (G -CW-spectrum) を定義する. ただし, $\omega \notin I$ ($d\omega \in I$) のときには, $E = \{E_n, \varepsilon_n\}$ において, $\varepsilon_n: S(d\omega) \wedge E_n \rightarrow E_{n+1}$ と思う.

(4.7) 定義. E : G -spectrum, $\alpha \in I^+$ のとき,

$$\Sigma^\alpha E = \{E_n \wedge S(\alpha), \varepsilon_n \wedge id\}$$

と $h^* \subset G$ -CW-spectra X, E , $\forall \gamma \in I$ に対して, §1 同様
 {4(d, β)} を用いて,

$$h_{\Sigma}^{\gamma}(X; E) = \operatorname{colim}_{\substack{\beta - \alpha = \gamma \\ \alpha, \beta \in I^+}} [\Sigma^\alpha X, \Sigma^\beta E]^G$$

と置く。(勿論, これは Σ のとり方に依存する.)

$$\forall \varepsilon \in I^+ \text{ に対し, } \sigma^\varepsilon : h_{\Sigma}^{\gamma}(X; E) \xrightarrow{\approx} h_{\Sigma}^{\gamma+\varepsilon}(\Sigma^\varepsilon X; E)$$

が定義される:

$$\operatorname{colim} [\Sigma^\alpha X, \Sigma^\beta E]^G \xrightarrow{\approx} \operatorname{colim} [\Sigma^{\alpha-\varepsilon} \Sigma^\varepsilon X, \Sigma^\beta E]^G$$

(4.8) Restriction to subgroups. $E = \{E_n, \varepsilon_n\}$ を G -
 spectrum, H を G の部分群とする. G の作用を H に制限する
 ことにより, E は H -spectrum と思ふことが出来, 次の自然
 変換

$$\operatorname{rest}_H^G : h_{\Sigma}^{\gamma}(X; E) \longrightarrow h_{\operatorname{rest}_H^G \Sigma}^{\operatorname{rest}_H^G(\gamma)}(X; E)$$

が定義される. rest_H^G は suspension と可換である.

(4.9) Fixed-point theory. Σ が orientable のときは
 §1 と同様にして, Fixed-point coh. theory が定義され, 自
 然変換 $\phi_H : h_{\Sigma}^{\gamma}(X; E) \longrightarrow h^{\gamma^H}(\Sigma^H X; E^H)$ が得られ
 る.

参考文献

- [1] Araki, S. and Murayama, M., G -homotopy types of G -complexes and representations of G -cohomology theories. Publ. RIMS, 14(1978), 203 - 222.
- [2] ———, τ -cohomology theories. Japan. J. Math., 4(1978), 363 - 416.
- [3] Kosniowski, G., Equivariant cohomology and stable cohomotopy, Math. Ann., 210(1974), 83 - 104.
- [4] Segal, G., Equivariant stable homotopy theory, Actes. Congres Intern. Math., 2(1970), 59 - 63.
- [5] Shimada, N. and Shimakawa, K., Delooping symmetric monoidal categories, Hiroshima Math. J., 9(1979), 627 - 645.