

Affine Lie環の表現論と Riemann面上の Conformal field theory

名大 理教 土屋 昭博 (Akihiro Tsuchiya)

KEK 山田 泰彦 (Yasuhiko Yamada)

§ 1. Introduction

こゝでの目的は、Affine Lie環の integrable 表現論に基づいて conformal field theory (物理では WZW-model と呼ばれている理論) を任意の Riemann 面上 (stable curve も含めて) で、operator 形式で展開することである。話の背景には、rational conformal field theory (RCFT) に関する最近の進展があり、こゝで上記の model をとり上げたのも、その典型例としての興味からである。話は WZW-model (特に $A_1^{(n)}$ -type) を中心に進めるが、一般の RCFT に共通の性質についてはそのつど comment する。なお、本稿では、多少一般性や厳密さに欠くことがある。でも、わかりやすいことを第一の目標とし、文献 [1] とは相補的となるように心がけた。

§ 2. Affine Lie 環と Virasoro algebra

Conformal field theory は conformal 変換 $z \mapsto z + \epsilon_n z^{n+1}, n \in \mathbb{Z}$ の下で不変な場の理論である。対応する Virasoro operator, L_n

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{C_0}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \quad (1)$$

が基本的役割をはたす。この Virasoro algebra のみに基づく理論では central charge が $C_0 = 1 - 6/m(m+1)$, $m=3, 4, \dots$ のときに RCFT となることが知られている。その他の C_0 に対する RCF T を得るには、Virasoro algebra (1) に適当な generator を付加して対称性を広げる必要がある。拡張された Virasoro algebra は一般に chiral algebra と呼ばれていて、W-algebra などもその中に含まれる。ここで扱う Affine Lie 環も以下に述べる意味で chiral algebra になる。

$\mathcal{G}$ を有限次元 simple Lie 環とする。 θ を highest root, $\langle, \rangle$: $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{C}$ を Cartan-Killing form で $\langle \theta, \theta \rangle = 2$ と規格化する。 $\mathcal{G}$ の basis $J^a (a=1, \dots, \dim \mathcal{G})$ を $\langle J^a, J^b \rangle = \delta^{ab}$ とするようとり、交換関係を

$$[J^a, J^b] = f^{abc} J^c \quad (2)$$

と書く。構造定数は完全反対称である。

$\mathcal{G}$ に associate した Affine Lie 環 $\hat{\mathcal{G}}$ は、 $J_n^a (n \in \mathbb{Z})$ 及び center $\mathbb{C}$ により生成され、交換関係は次で与えられる、

$$[J_n^a, J_m^b] = f^{abc} J_{n+m}^c + C \delta^{ab} n \delta_{n+m,0} \quad (3)$$

J_n^a を Current operator と呼ぶ. (3) を current algebra と呼ぶこともある. J_n^a から自然に Virasoro operator を構成することができる. Sugawara form として知られているもので, 次の形で与えられる.

$$L_n = \frac{1}{2(g^* + c)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{g}} : J_m^a J_{n-m}^a : \quad (4)$$

ここに g^* は $\mathfrak{g}$ の dual Coxeter number と呼ばれるもので, $n+1 (A_n)$, $n+1 (C_n)$, $12, 18, 30 (E_{6,7,8})$, $4 (G_2)$, $9 (F_4)$, $n-2 (SO(n))$ である. 記号 $::$ は normal ordering で次のように定義される:

$$: J_n^a J_m^b : = \begin{cases} J_n^a J_m^b & (n < m) \\ \frac{1}{2} (J_n^a J_m^b + J_m^b J_n^a) & (n = m) \\ J_m^b J_n^a & (n > m) \end{cases} \quad (5)$$

L_n 達は $C_v = \frac{c \dim \mathfrak{g}}{g^* + c}$ の Virasoro algebra (1) に従い, また

$$[L_n, J_m^a] = -m J_{n+m}^a, \quad (6)$$

が成り立つ. (1)(3)(6) が基本的な関係式である.

§3. Integrable representation of $\hat{\mathfrak{g}}$

Virasoro algebra の discrete series $C = 1 - \frac{6}{m(m+1)}$ に対応するような, $\hat{\mathfrak{g}}$ のよい表現を考えよう. Integrable highest weight representation と呼ばれているものがそれで, 以下のように与えられる.

無限次元の表現を考えるので, 表現空間に filtration を入れて

おくのが便利で、物理的にはエネルギーに相当する operator L_0 の固有値によつて filtration を入れるのが canonical な方法である。 L_0 と J_n^a の交換関係から、 $\hat{\mathcal{Q}}$ を次のように分解する：

$$\hat{\mathcal{Q}} = \hat{\mathcal{Q}}_+ \oplus \mathcal{Q} \oplus \hat{\mathcal{Q}}_- \quad (7)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{Q}}_+ \ni J_n^a \quad (n > 0) & \text{annihilation operator (固有値を下げる)} \\ \hat{\mathcal{Q}}_- \ni J_n^a \quad (n < 0) & \text{creation operator (固有値を上げる)} \\ \mathcal{Q} \ni J_0^a & \text{zero mode operator (固有値を変えない)} \end{cases}$$

J_0^a は有限次元の $\mathcal{Q}$ と同じ交換関係に従うのでこれらを同一視する。

$\hat{\mathcal{Q}}$ の level l の integrable highest weight 表現 $\mathcal{H}_\lambda$ とは次の性質をもつものとして定義される。

1) ground states (最低固有値) の空間 $V_\lambda = \{|\phi\rangle \in \mathcal{H}_\lambda \mid \hat{\mathcal{Q}}_+ |\phi\rangle = 0\}$ は highest weight λ をもつ $\mathcal{Q}$ の highest weight 表現,

2) center C は id として作用 ($l \in \mathbb{Z}_{>0}$),

3) $\mathcal{H}_\lambda$ は V_λ 上 $\hat{\mathcal{Q}}_-$ で生成され、唯一つの relation

$$(J_{-1}^0)^{l - \langle 0, \lambda \rangle + 1} |\lambda\rangle = 0, \quad (8)$$

をもつ。ここに $|\lambda\rangle$ は V_λ の highest weight vector で、 J^0 は highest root θ に対応する generator である。

重要なことは、このような integrable 表現を許す λ の全体は

$$P_l^+ = \{\lambda : \text{highest weight of } \mathcal{Q} \mid 0 \leq \langle 0, \lambda \rangle \leq l\} \quad (9)$$

で与えられる有限集合となることである。

example $A_1^{(l)}$ level l

許さぬ highest weight は $P_+^+ = \{ \lambda = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \frac{l}{2} \}$ で $l+1$ 個.

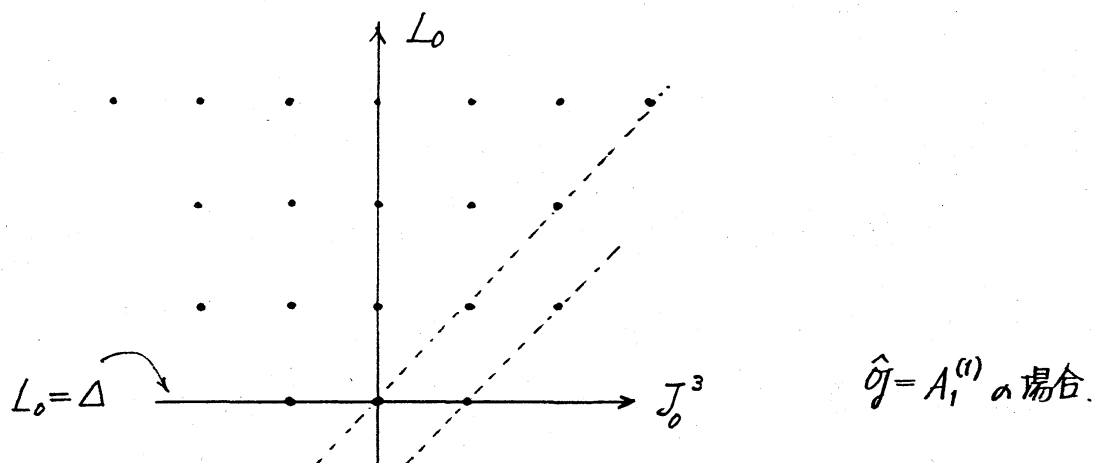
ground states V_λ は spin λ の $SU(2)$ -module で $2\lambda+1$ 次元.

highest weight vector $|\lambda\rangle \in V_\lambda \subset \mathcal{H}_l$ は relation

$$\left\{ \begin{array}{l} J_0^3 |\lambda\rangle = \lambda |\lambda\rangle, \quad J_0^+ |\lambda\rangle = 0, \\ (J_{-1}^+)^{l-2\lambda+1} |\lambda\rangle = 0, \end{array} \right. \quad (10)$$

に従う. ($J_n^\pm = J_n^1 \pm i J_n^2$)

次の図は $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現の weight diagram の模式図である.



L_0 の固有値は最低固有値 $\Delta_\lambda + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で、 Δ_λ は次で与えられる.

$$\Delta_\lambda = \frac{\langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle}{g^* + 1} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, \quad \rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha: \text{pos}} \alpha. \quad (11)$$

$L_0 = -$ 一定の各 sub space は $\hat{\mathfrak{g}}$ の有限次元表現になっている. 大切なことは、水平方向ばかりでなく、 $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{t}$ の方向の $SL(2, \mathbb{C})$ -sub module もすべて有限次元である点である. 言い換えれば $\mathfrak{t}$ は $\mathfrak{t}$ の generator (正確には real roots という) はすべて

locally nilpotent である。このことは integrable 表現を特徴づける重要な性質である。

§3. Field operators

2次元場の理論の立場からは L_n, J_n^a は次のような field operator の Laurent expansion である:

$$\left\{ \begin{array}{l} T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}, \quad L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z), \\ J^a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n^a z^{-n-1}, \quad J_n^a = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n J_n^a(z). \end{array} \right. \quad (12)$$

交換関係 (1), (6) は次のように書き直される:

$$\left\{ \begin{array}{l} [L_n, T(z)] = z^n \left(z \frac{d}{dz} + 2(n+1) \right) T(z) + \frac{c}{12} (z^{n+1})''', \\ [L_n, J^a(z)] = z^n \left(z \frac{d}{dz} + (n+1) \right) J_n^a(z). \end{array} \right. \quad (13)$$

L_n は conformal 変換 $z \mapsto z + \epsilon_n z^{n+1}$ の生成子である。たゞ、及び、この変換の下での analytic j -form の変換性

$$\psi(z) dz^j \mapsto \psi(z) dz^j + \epsilon_n z^n \left(z \frac{d}{dz} + j(n+1) \right) \psi(z) dz^j \quad (14)$$

を考慮すれば、 $J^a(z), T(z)$ は operator valued analytic 1-form, z -form (up to anomaly) と見なすべきことがわかる。この意味で $J^a(z)dz, T(z)dz^2$ を current 及び energy-momentum tensor と呼ぶ。

さて、上記では勝手に z なる変数を考えその対する form など考えたわけだが、当然この z は適当な Riemann 面の適

当は local coordinate として解釈されるべきである。a priori には operator たちは Riemann 面のことを知らないのであるから、そのような幾何学的 data は operand が荷うべきである。次の § で各幾何学的 data に対応して定まる current algebra の表現空間 (正しくはその dual) を定義する。

§ 4. Gauge condition

まず手始めに、 $\mathcal{H}_\lambda$ 上での $J^a(z)$ の作用を調べてみよう。今、

$|\phi\rangle \in V_\lambda$ を grand states からとると、 $\mathcal{Q}_+ |\phi\rangle = 0$ から

$$J^a(z) |\phi\rangle = \sum_{n \leq 0} J_n^a |\phi\rangle z^{-n-1} \quad (15)$$

を得る。従って $J^a(z) dz$ は $z=0$ に高々 1 位の極をもつ meromorphic 1-form (の germ) である。もう 1 回 $J^b(w)$ を作用させると

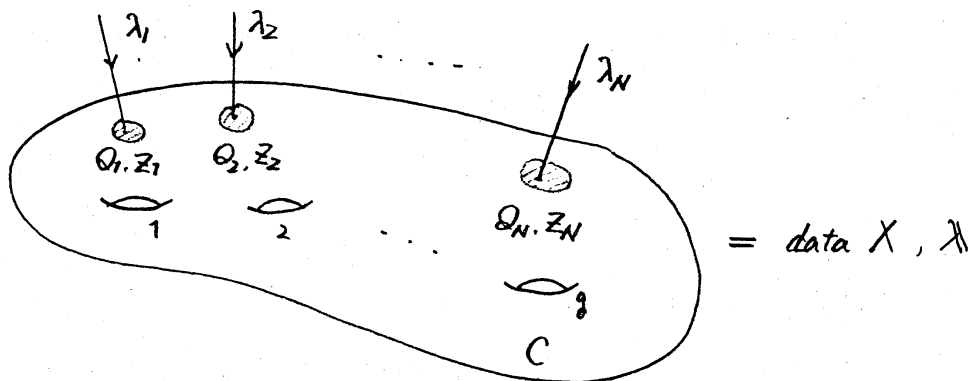
$$\begin{aligned} J^b(w) J^a(z) |\phi\rangle &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \leq 0} J_m^b J_n^a |\phi\rangle w^{-m-1} z^{-n-1} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \leq 0} \left\{ f^{bac} J_{n+m}^c |\phi\rangle + m \delta_{n+m,0} \ell \delta^{ab} |\phi\rangle \right\} w^{-m-1} z^{-n-1} \\ &\quad + \sum_{m \leq 0} \sum_{n \leq 0} J_n^a J_m^b |\phi\rangle w^{-m-1} z^{-n-1} \\ &= \left\{ \frac{\ell \delta^{ab}}{(w-z)^2} + \frac{f^{bac}}{w-z} J^c(z) \right\} |\phi\rangle + \sum_{n, m \leq 0} J_n^a J_m^b |\phi\rangle w^{-m-1} z^{-n-1}, \end{aligned} \quad (16)$$

を得る。従って $J^b(w) J^a(z) dw dz$ は $z=0, w=0$ に 1 位の極をもつ他に、diagonal $z=w$ に 2 次までの極をもつ。(16) の関係式は、current の operator product expansion

$$J^a(z)J^b(w) = \frac{\ell \delta^{ab}}{(z-w)^2} + \frac{f^{abc}}{z-w} J^c(w) + \text{regular at } z=w \quad (17)$$

にまとめられる。これは交換関係 (3) と等価である。

さて、 N, g を整数として、次のような幾何学的 data を用意する。



$$X = (C, Q_1, \dots, Q_N, z_1, \dots, z_N), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \quad (18)$$

ここに、 C は種数 g の Riemann 面 (又は stable curve) (Q_i, z_i) は C 上の点とその周りの local coordinate ($z_i(Q_i) = 0$). $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ は integrable highest weights である。今、

$$\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{\lambda_N} \quad (19)$$

とすると、各成分には current $J^a(z_i)$ たちが (15)(16) に示したように作用している。 f を $H^0(C, \mathcal{O}(*\sum_{i=1}^N Q_i))$ から任意にとり、 Q_i のまわりでの展開を $f(z_i)$ と書く*。

$$J^a[f] = \sum_{i=1}^N \text{Res}_{Q_i} (f(z_i) J^a(z_i) dz_i) \quad (20)$$

は、 $\mathcal{H}_\lambda$ 上に作用し、交換関係

$$[J^a[f], J^b[g]] = f^{abc} J^c[fg] + \ell \delta^{ab} \sum_{i=1}^N \text{Res}_{Q_i} (dfg) \quad (21)$$

* 関数形も展開ごとに異なるから $f_i(z_i)$ と書くべきかも知れない。

に従う。留数定理から最後の項は zero になることに注意しよう。このことから $\mathcal{H}_\lambda$ の dual space $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ での方程式

$$\langle \Psi | \sum_{i=1}^N \text{Res}_{Q_i} (f(z_i) J^\alpha(z_i) dz) = 0, \quad \text{for } \forall f \in H^1(C, \mathcal{O}(*\sum_{i=1}^N Q_i)) \quad (22)$$

が意味をもつ。これを Gauge condition と呼び、その解空間を $\mathcal{V}_\lambda^\dagger(X)$ と書く。 $\mathcal{V}_\lambda^\dagger(X)$ は data X に依存して定まる $\mathcal{H}_\lambda^\dagger$ の subspace である。方程式 (22) は operator valued 1-form $J^\alpha(z) dz$ に対する留数定理と見なせる。

§5. 相関関数, Primary fields

(15) で $\lambda=0$ の場合、 V_0 は 1 次元で、base を $|0\rangle \in V_0$ とすると

$$J^\alpha(z) |0\rangle = \sum_{n \leq 0} J_n^\alpha |0\rangle z^{-n-1}$$

となる。すなわち $J^\alpha(z) dz$ は $|0\rangle$ の上で正則にふるまう。 $\lambda \neq 0$ のときに $J^\alpha(z) dz |\phi\rangle$ が $z=0$ で極をもつのは 原点に current の源となる場 $\phi_\lambda(z)$ (V_λ -valued) があって (ie. $|\phi\rangle = \phi_\lambda(0) |0\rangle$) $J^\alpha(z)$ がこの場を感知したものと考えられる。 $J^\alpha(z)$ に 極を生み出すべく導入された場 $\phi(z)$ を primary field といい、定義として次の operator product expansion に従う。

$$J^\alpha(z) \phi_\lambda(w) = \frac{t^\alpha}{z-w} \phi_\lambda(w) + \text{regular at } z=w \quad (23)$$

ここに t^α は V_λ における $J^\alpha = J_0^\alpha$ の表現行列である。

Current と primary field の言葉を用いて §4 の gauge 条件を書き直すことができる。今 data $X, \mathcal{H}$ 及び $\phi_i \in V_{\lambda_i} (i=1, \dots, N)$ を固定して、次のような関数を考える。(相関関数という)

$$\langle J^{a_1}(p_1) \cdots J^{a_N}(p_N) \phi_{\lambda_1}(Q_1) \cdots \phi_{\lambda_N}(Q_N) \rangle_X \quad (24)$$

これは、各 p_i について C 上の meromorphic 1-form であって、極は (17), (23) で示したもののみを許すとする。

定理. $M \in \mathbb{Z}_0$ に関する 相関関数の総体 は (primary field に対する integrability の条件の下で) gauge 条件の解 $\langle \Psi | \in \mathcal{U}_\lambda^+$ と一対一に対応する。

証明. (24) を次の公式によって $\phi_i \in \mathcal{H}_{\lambda_i}$ にまで拡張する。

$$\begin{aligned} & \oint \frac{dz}{2\pi i} z^M \langle J^a(z) J^{a_1}(p_1) \cdots J^{a_N}(p_N) \phi_1(Q_1) \cdots \phi_N(Q_N) \rangle \\ &= \langle J^{a_1}(p_1) \cdots J^{a_N}(p_N) \phi_1(Q_1) \cdots J_z^a \phi_i(Q) \cdots \phi_N(Q_N) \rangle. \end{aligned} \quad (25)$$

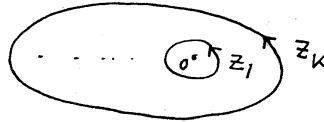
左辺の contour integration が右辺では $\phi_i \in \mathcal{H}_{\lambda_i}$ への J_z^a への作用に読みかえられている。この読みかえが $\hat{\mathcal{O}}_J$ -module としての $\mathcal{H}_\lambda$ の構造と consistent であることは (17), (23) で保証している。

かくして、(24) から積分をくり返すことにより

$$\langle \Psi | : \mathcal{H}_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\lambda_N} \rightarrow 0 \quad (26)$$

が定まる。(注. より正確には、integrability の条件 (8) が (24) の相関関数において満たされていること、すなわち、

$$\oint \frac{dz_k}{2\pi i} \frac{1}{z_k} \cdots \oint \frac{dz_1}{2\pi i} \frac{1}{z_1} J^a(z_k) \cdots J^a(z_1) |\lambda\rangle = 0 \quad (27)$$



が必要である。)

並に $\langle \Psi |$ から 相関関数への対応は期待値

$$\langle \Psi | J^a_1(z_1) \cdots J^a_n(z_n) | \phi_1 \rangle \otimes \cdots \otimes | \phi_n \rangle \quad (28)$$

を求めることにより与えられる。■

§6. $g=0$ の場合

$g=0$ の場合に gauge 条件 (22) を解析しよう。 $\mathbb{P}^1$ に canonical coordinate z をとり、 $Q_1, \dots, Q_N$ の座標を $a_i = z(Q_i)$ 、 z のまわりでの local coordinate を $z_i = z - a_i$ とする。 meromorphic function $f \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(*\sum_{i=1}^N Q_i))$ として $f(z) = (z - a_i)^{-n}$ をとると

$$\begin{cases} f(z_i) = z_i^{-n} \\ f(z_j) = (z_j + (a_j - a_i))^{-n} = (a_j - a_i)^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} \left(\frac{z_j}{a_j - a_i} \right)^r \end{cases} \quad (j \neq i) \quad (29)$$

を得る。従って gauge condition は次のようになる。

$$\langle \Psi | \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{on } i\text{-th component}}}{[J^a_{-n}]} + \overset{\text{zero mode or}}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{on the other components}}}{(\text{annihilation operators})}} \right\} = 0 \quad (30)$$

この条件をくり返し使えば $\langle \Psi |$ の値は $V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_N}$ 上の

値から unique に定まる。従って 次の結果を得る。

$$\text{命題 } 0 \rightarrow \mathcal{V}_\lambda^+(P^1) \rightarrow \text{Hom}_g(V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_N}, \mathbb{C}) \quad (31)$$

ここで g -invariant part をと、ているのは $f = \text{const.}$ に対する gauge 条件を考慮に入れたためである。(31) の image は integrability の条件 (8) (or (27)) に対する ややめんどうな議論を要するのでここでは省略する。($N=2$ までは $\ker=0$)

example $A_1^{(1)}$ の場合.

$\text{Hom}_g(V_i \otimes V_j \otimes V_k, \mathbb{C})$ は $\text{spin } i, j, k$ が CG 条件

$$|i-j| \leq k \leq i+j, \quad i+j+k \in \mathbb{Z} \quad (32)$$

をみたすときにのみ 1次元であとは 0次元である。これが $\mathcal{V}_\lambda^+$ から来るためには ± 1 に level による制限

$$i+j+k \leq l \quad (33)$$

が加わる。(32) (33) を合わせて l -constrained CG 条件 と呼ぶ。

§7. 有限次元性

我々の最初の基本的結果は次の定理である。

$$\text{定理 } \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{V}_\lambda^+(X) < \infty. \quad (34)$$

以下に証明の方針を示す。 $g=0$ の場合に $\mathcal{H}_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_{\lambda_N}$ 上の未知関数が $V_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes V_{\lambda_N}$ 上の関数に帰着してしまふのは、すべての creation operator J_{-n}^a ($n>0$) が他の点の annihilation op. で書けてしまふからで、その根拠は 1点にのみ n 位の極を

もつ有理型関数の存在であった。一般の genus では gap の存在のため有限個の creation operator が消えないで残ってしまう。実際 abelian current の場合には、gauge 条件、解は Jacobian 上の多項式の数だけ (無限個) 存在する。non-abelian でも $\ell \rightarrow \infty$ では事情は同じでやはり解空間は ℓ 次元になる。ところが、level 有限のときは、integrability のため、生き残った creation operator のうち real roots (正の generator) はすべて locally nilpotent になり無限次元を与えない。そこで残る問題は imaginary roots (負の generator) の挙動である。これについても無限次元が出て来ないことは annihilation ideal (の radical) が bracket で閉じていることを主張する Gabber の定理によって示される。かくして求める有限次元性が示された。

remark abelian current の理論では、fermion operator (Vertex operator) の一価性を課すと解は唯一つに定まった。non-abelian の場合も free boson で表示できる ADE 型 level 1 の場合には、同様の mechanism で有限次元性を理解することができる。

remark 次元の概算: 生き残る creation operator J_{-n}^a は $a = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$, $n \in \text{gap}(\mathfrak{g})$ で $g \cdot \dim \mathfrak{g}$ 個あり、その各々はおおよそ ℓ 乗すると 0 になると考えられ、従って

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}_0^+ \simeq \ell^{g \cdot \dim \mathfrak{g}} \quad (N=0 \text{ case}) \quad (35)$$

を得る。 $g \dim \mathfrak{g}$ は flat G -bundle の moduli の次元でもある。

§8. 微分方程式

これまでの議論では、幾何学的 data $X=(C, Q_i, \Sigma)$ を fix してきたが、これを punctured stable curve の moduli space 上に family で展開することができる。moduli space の各点 X には前 § で定義した $\mathcal{V}_\lambda^+(X)$ がはりついているわけだが、実はこれらの sub-space たちをつなげる integrable connection が入ることがわかる。

この connection の由来は、moduli deformation = Virasoro action という Ward identity にある。Virasoro の作用が moduli の変形をひきおこすことは、abelian current の理論でも見られた様に、conformal field theory に共通の事情である。ここで現われる moduli の変形は compactification divisor D を保つ $\mathbb{A}^1(-\log D)$ の形のものであり、この connection に関して flat という方程式は D に確定特異点をもつ holonomic system になる。

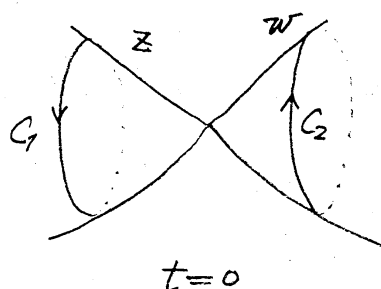
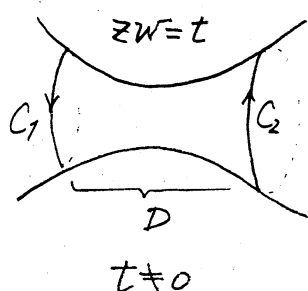
この微分方程式は $\mathcal{D}$ -module の言葉を使って定式化されるが詳細は略す。^[1]

§9. Factorization properties

connection が入っていることにより、divisor 以外の各 open strata では $\mathcal{V}_\lambda^+(X)$ は次元一定である。実は divisor まで込めて $\mathcal{V}_\lambda^+(X)$ は次元一定であり、すなわち moduli space 上の vector bundle をなすことが示される。このことは、gauge 条件、及

微分方程式の divisor でのふるまいを調べて得られる。

まず、gauge 条件から調べてみる。2つの local coordinates z, w を $zw=t$ でつないで得られる 1-parameter family を考える。 $t=0$ は double point singularity である。



図の領域 D 上で $f(z)=z^n$ ie. $f(w)=(\frac{t}{w})^n$ は正則であるから Operator valued form についての Cauchy の定理 (= gauge 条件と等価) によって

$$\int_{C_1} \frac{dz}{2\pi i} z^n J^n(z) + \int_{C_2} \frac{dw}{2\pi i} \left(\frac{t}{w}\right)^n J^n(w) = 0, \quad (36)$$

$$\therefore [J_n^a]_{C_1} + t^n [J_n^a]_{C_2} = 0,$$

を得る。 $t \rightarrow 0$ の limit では

$$\begin{cases} [J_n^a]_{C_1} = [J_n^a]_{C_2} = 0, & n > 0, \\ [J_0^a]_{C_1} + [J_0^a]_{C_2} = 0, \end{cases} \quad (37)$$

となり、各 double point には primary field が現われ、それらは互いに dual な表現に属することがわかる。この primary field を 中間状態 と呼ぶ。この中間状態もまた integrable な表現に属するということは自明ではないが示すことができる。

逆に $t=0$ での任意の解をふくらませて、 $t \neq 0$ の微分方程式の解を形式的に次のようにつくることができる。

$$\text{Diagram with a loop labeled } t = \sum_{\phi \in \mathcal{H}_\lambda} t^{\Delta\phi} \text{Diagram with a loop labeled } \phi \quad (38)$$

和は ground state 以外も含めたすべての中間状態 $\phi \in \mathcal{H}_\lambda$ にわたってとる。(38)の関係式は factorization 又は sewing operation として物理で知られているものであるが、我々の立場では微分方程式の形式解を与えるものであり、確定特異点型の一般論によりその収束性が示される。

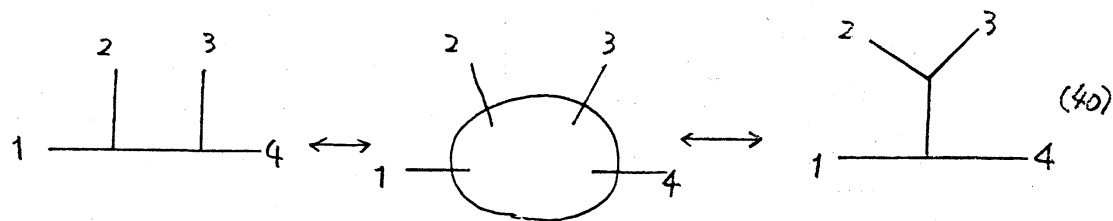
§ 10. monodromy

Factorization の性質によつて、最も縮退した状況へ持っていくことにより canonical な解の basis をとることができる。これらの basis は中間状態を飛ぶ可能な表現たち(及び3点関数に多重度がある場合はそれを指定する index)によって label される。

example $A_1^{(1)}$ level l .

$$\text{Diagram with a circle and four external lines labeled } \frac{1}{2} = \mathbb{C} \text{Diagram with a horizontal line labeled } 0 \text{ and four external lines labeled } \frac{1}{2} \oplus \mathbb{C} \text{Diagram with a horizontal line labeled } 1 \text{ and four external lines labeled } \frac{1}{2} \quad (39)$$

最も縮退した stable curve は $3g-3+N$ 個の node と $2g-2+N$ 個の component ($\mathbb{P}^1$ -3点) をもつ。これらは φ^3 -diagram と呼ばれるものとは一対一に対応する。異なる diagram は異なる basis を与えるが、これらは同一の微分方程式の解空間を張るので互いに monodromy 行列でむすばれている。例えば、次のような monodromy は基本的である。(fusion と呼ばれる)



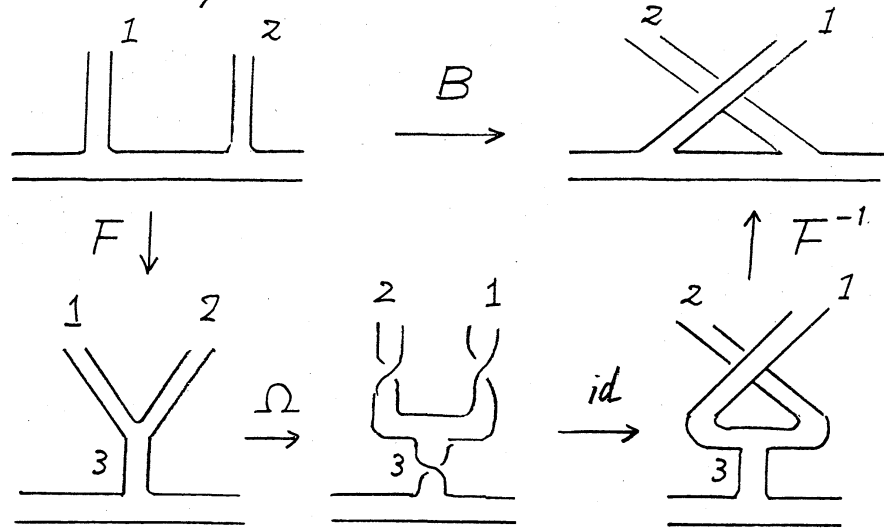
最近 Moore-Seiberg はこれらの monodromy に対する生成元と基本関係式を書き下した。それらは、braid 群や modular 群なども含んだ興味深いものである。上記のような monodromy のなす algebra を先に考えて、その表現論として conformal field theory を見直そうというのが Friedan-Shenker の modular geometry の考えである。この時、重要な問題は、

問題 すべての modular geometry は 何らかの conformal field theory の monodromy として得られるか？

ということである。このあたりの話は全く open question で今後の検討が待たれるところである。

最後に braid 群の monodromy 表現に関して少し述べておく。marked point の位置を入れかえる操作は braid 群の monodromy 表

現を与える。今これを (40) の操作で base を変えて見ると、そこでは *monodromy* が対角化されていることがわかる (次図)。



ここに Ω は *diagonal phase* で、次の式で与えられる。

$$\Omega = \pm \exp \pi i \{ \Delta_3 - \Delta_1 - \Delta_2 \}. \quad (41)$$

一般に、*vanishing cycle* のまわりの *monodromy* は、そこを通過している中間状態の *conformal weight* Δ から同様に求めることができる。

文献

- [1] Tsuchiya and Yamada "Conformal Field Theory on Moduli Family of Stable Curves with Gauge Symmetry."