

量子カオスにおける量子-古典対応回復の機構

京大・基研 池田研介

京大・理 足立 聡, 戸田幹人

一次元量子カオス（以下では古典的な意味でカオス運動に寄与する自由度の数が f の量子系を簡単のため f 次元量子カオスとよぶ）が古典カオスを模擬しうるタイムスケールは可積分量子系のそれに較べて余りにも短いことが指摘されてきた。我々はこれまでの一連の研究によって一次元の量子カオスといえども、それが極めて微弱な古典雑音の場にさらされる（古典雑音でなくともよい。極めて大自由度の量子系、我々があげた例では古典カノニカル変数の近似的な同時測定が行える観測装置がその一例）ときその古典対応物が示すべき混合性、エルゴード性をほぼ完璧に回復することを数値実験によって証明した。更に2つ以上の1次元量子カオス系が結合すると、その結合定数が極めて微弱であったとしても、お互いが古典雑音源に転化するような一種の転移現象がおこり、協同的に古典カオスがもつべき性質が回復されることを数値実験によって証明した。

本稿では、古典雑音源との接触による一次元量子カオス系の古典性回復特性を記述する理論を提出し、それを基礎にして、多次元量子カオス系における古典カオス性の自己形成を説明する現象論を提出する。更にこの理論が必ずしも完全ではなく、それでは説明できない現象が存在することを示し将来の更に完全な理論的理解を目指すいしずえとしたい。我々が本稿を通して研究するのは、ハミルトニアン

$$\hat{H} = \hat{T}(\{\hat{p}_i\}) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{V}(\{\theta_i\}) \delta(t-n) \quad (i=1, \dots, f) \quad (1)$$

で表される高次元の量子kicked回転子（古典的にはcoupled standard mapに対応）である。ここに $\hat{T}$ 及び $\hat{V}$ は運動エネルギー及びポテンシャル演算子で、ここでは

$$\begin{aligned} \hat{T}(\{\hat{p}_i\}) &= \sum_{i=1}^f \hat{p}_i^2 / 2 \\ \hat{V}(\{\hat{\theta}_i\}) &= \sum_{i=1}^f K_i \cos \hat{\theta}_i + \sum_{i,j} \epsilon_{ij} \cos(\hat{\theta}_i - \hat{\theta}_j) \end{aligned}$$

のようにとる。 $\hat{p}_i$, $\hat{\theta}_i$ は夫々に運動量、位置演算子である。なお、ここでは理論の概略を述べるにすぎない。関心のある方は文献(3)を参照していただきたい。

§ 1 雑音源と接した一次元 kicked rotor の古典回復特性

ここでは古典的な global chaos の形成によって、古典カオス拡散が発生する領域の話に限る。問題となるのは純粋な量子カオス系で発生するカオス拡散の抑制が雑音の印加によって解かれ、その過程で回復される拡散の係数 $D_Q(\epsilon)$ にみられる特異な ϵ 依存性¹⁾ の (ϵ : 雑音強度) 説明である。我々が考えるのは Eq. (1) で $f=1$ しかも kick 周期に雑音周波数変調がかかる場合である (一般の形式をもつ雑音源への、以下の議論の拡張は容易である。)

拡散係数 $D_Q(\epsilon)$ は、"力" の相関関数の面積

$$a(\epsilon, t) = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} g(\epsilon, t) \quad (2)$$

但し $g(\epsilon, t)$ は "力-力相関々数"

$$g(\epsilon, t) = \langle\langle \sin \hat{\theta}_t \sin \hat{\theta}_0 \rangle\rangle \quad (3)$$

($\langle \rangle$: 量子力学的平均 $\langle\langle \rangle\rangle$: 雑音過程に関するサンプル平均)

と

$$D_Q(\epsilon) = \lim_{t \rightarrow \infty} a(\epsilon, t) \quad (4)$$

で関係づけられる。ノイズのない純粋過程では $\lim_{t \rightarrow \infty} a(\epsilon=0, t) \rightarrow 0$ が拡散の抑制をいみする。ところがノイズが加わると発展演算子

$$\hat{U} = \exp -i \hat{p}^2 / 2\hbar \cdot \exp -i K \cos \hat{\theta} / \hbar$$

の準エネルギーに寿命があらわれ、2つの準エネルギー固有状態 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ の間の量子コヒーレンスに寿命が出現するために、拡散が回復されるのである。 $|\alpha\rangle, |\beta\rangle$ 間の量子コヒーレンスの寿命 $\tau_{\alpha\beta}(\epsilon)$ は

$$\tau_{\alpha\beta}^{-1}(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^2} [\langle\alpha|\hat{p}^2|\alpha\rangle + \langle\beta|\hat{p}^2|\beta\rangle - 2\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle\langle\beta|\hat{p}|\beta\rangle] \quad (>0)$$

と計算できる。可積分系ではこの値はプランク定数 $\hbar$ をふくまない。従って寿命自身が古典的な量になってしまう。ところがカオス状態では寿命が $\hbar^{-1}$ に極めて強く依存し、それがカオス系における特異な拡散回復特性をもたらす原因の一つになる。カオス系では $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ は $\alpha\beta$ の選択に鈍感になる。そこで $\tau_{\alpha\beta}^{-1}$ を τ_c^{-1} とかくと

$$\tau_c^{-1}(\epsilon) = \hbar / (\partial p^2 \epsilon^2) \quad (5)$$

でよく近似できる。 δp は波動関数のアンダーソン局在長で $\delta p \sim D_{CL}/\hbar$ (D_{CL} = 古典カオス拡散係数)。

以下の議論の要点は、ノイズの入った系の相関面積 $a(\varepsilon, \infty)$ が、ノイズの入らない純粋系の相関々数と寿命を通して

$$a(\varepsilon, t=\infty) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} d_\varepsilon(s) g(\varepsilon=0, s) \quad (6, a)$$

但し

$$d_\varepsilon(s) = \exp -|s|/\tau_c(\varepsilon) \quad (6, b)$$

の関係で結びつくことである。 $d_\varepsilon(s)$ は量子コヒーレンスの減衰を表す関数。(6, a)(6, b)のもっともらしい導出は文献(3) § 2.2.2 を参照されたい。(6)式の関係を通して、ノイズの入った系の特性が、よく知られた純粋な系の時間発展特性で完全に説明される。モーメント $M(\varepsilon, t) = \sum_{s=0}^t D(\varepsilon, t)$ の時間発展が $\varepsilon=0$ (純粋系) で3つの time regime をもつことはたびたび言及してきた。即ち古典カオス拡散を示す regime $t < T_r$, 量子飽和への長い transient $T_r < t < T_s$, そして完全な量子抑制がおこる regime $t > T_s$ である。この時間発展の諸段階が関係(6, a)を通して、雑音強度の3領域に読みかえられる。即ち

$$\tau_c(\varepsilon_c) = T_r \quad \tau_c(\varepsilon_T) = T_s \quad (7)$$

によって $\varepsilon_c, \varepsilon_T$ を導入するならば、純粋系での時間発展の知識を用いて、回復された拡散係数が次のような ε 依存性を示すのである。

$$\left. \begin{array}{ll} 0 < \varepsilon < \varepsilon_T & D_Q(\varepsilon) \sim \varepsilon^2 \quad (\text{摂動領域}) \\ \varepsilon_T < \varepsilon < \varepsilon_c & D_Q(\varepsilon) \sim \varepsilon^\nu \quad (\text{量子領域}) \\ \varepsilon_c < \varepsilon & D_Q(\varepsilon) \sim D_{CL} \quad (\text{古典領域}) \end{array} \right\} \quad (8)$$

但し exponent $\nu \sim 1.0^*$ これは、実験の結果を完全に説明する。ナゾとされてきた量子領域とは、純粋過程の transient regime ($T_r < t < T_s$) を使って発生している拡散現象だったわけである。 ε_c は古典性が完全に回復されるしきい値である。それに対し ε_T は量子摂動論の収束半径を与える。そして

*) この exponent を説明することにはまだ残念ながら成功していない。ここでは純粋発展の transient regime でみられる fractional diffusion $M(t) = t^\beta$ の exponent β と ν が $\nu = 2(1-\beta)$ の関係で結ばれること (Eq.(6) から導ける) と、実測の $\beta = 0.5$ を用いて $\nu = 1.0$ を現象論的に説明したことを強調しておく。

$$\varepsilon_c \sim (\hbar/\delta p)(T_r)^{-1/2}, \quad \varepsilon_T/\varepsilon_c \sim [D_{CL}T_r/\delta p^2]^{\frac{2}{1-\nu}} \quad (9)$$

で与えられる。 $\delta p \propto \hbar^{-1}$, $T_r \sim \log \hbar / (\text{リアプノフ数})$ であることを考えると $\varepsilon_c \sim \hbar^2$ になり極めて小さい。特に, ε_T は ε_c より更に $\hbar^2$ オーダー小さい。これが一次元量子カオス系で見出された, 特異な拡散回復 (あるいは非可逆性回復) の本質と考えられる。特に重要なことは一次元量子カオス系は, アンダーソン局在のため波動関数が局在化し, スペクトルが点スペクトルになって一見摂動 (たとえば雑音) に対して摂動展開ができるようにみえるが, その収束半径は $\hbar^4$ オーダーの極めて小さいものになっているということである (可積分系のそれは $O(1)$)。

§ 2 多次元量子カオス

一次元量子カオス系に古典雑音が印加された場合は, ミクロな古典雑音が量子系に潜在していたカオスとしての性質をよびさまし, 古典化したと言えるだろう。この場合古典化の種は古典雑音にあったわけで, 一応納得することができる。しかし問題は2つの量子抑制された系が結合されたときにおこる現象である。ここには古典の種はどこにもない。にも拘らず結合した量子系が協力しあって古典カオスとしての性質が回復されてしまうのである。²⁾ 古典カオスが古典確率的な挙動を自然に導入してしまうことを考えると, この系では波動関数が古典確率に転化する, 即ち波束の収縮が協同的に発生していると解釈できる。わずか2自由度 (本当は2.5自由度) の系でそのような現象が発生するのを一体どう理解すればよいのだろうか?

残念ながら現段階ではこの不思議さを表現する理論を我々はまだもっていない。本稿では, この達成さるべき最終理論にくらべると格段に程度の低い現象論ではあるが, 2つの系の結合が古典拡散を回復する協同機構を説明する程度のことは可能な理論を紹介する。

ここで次の様に仮定してしまう。即ち rotor 1 にとって rotor 2 の量子運動は我々が知らないある古典運動の軌道のアンサンブルで表現できる。このように仮定した瞬間, 我々は結合系が既に古典性を回復してしまったことを認めてしまったことになるから, この理論は何故古典性が回復されたのかという疑問には何も答えていないことを強調しておく。その代わり, §1 の考え方をそのまま使って rotor 1 の拡散係数を決めることができる。rotor 2 からの力が古典カオスによる雑音であるならば, §1 の議論に従うと rotor 1 の拡散係数が $D^{(1)}(\varepsilon) = K^2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} d_\varepsilon(s) g(\varepsilon=0, s)$ のように与えられる。

$d_\varepsilon(s)$ が寿命 $\tau_2(\varepsilon)$ のみしか含まないことから, 相関面積 $A^{(1)} \equiv \sum_{s=-\infty}^{+\infty} d_\varepsilon(s) g(\varepsilon=0, s)$ は, $\tau_2(\varepsilon)$ のみの関数と見做すことができる。そのいみで $A^{(1)}$ を $A^{(1)}(\tau_2(\varepsilon))$ と書き面積関数と呼

ぶ。面積関数は雑音の性質に依存しない普遍関数で図1のようにふるまう。rotor 1 のモーメントを $M_1(t)$ とかくと

$$M_1(t+1) - M_1(t) = K_1^2 A^{(1)}(\tau_2(\epsilon)) \quad (10)$$

問題は rotor 2 がおよぼす雑音が、§1 で扱った雑音のように制御可能な人為的雑音ではなく、系が勝手につくりだした雑音であるといふところにある。従って寿命 $\tau_2(\epsilon)$ は rotor 2 のダイナミクスの質的变化と共に変動してゆくのである。場合によっては rotor 1-2 の結合でせつかく雑音化した rotor 2 の運動が時間と共に劣化し、雑音性を喪失することすらありえる。寿命 $\tau_2(\epsilon)$ は rotor 2 が 1 におよぼした力の過去の累積で決定される。他方 rotor 2 の力-力相関の面積からその拡散係数、更にはモーメントが定まる。従って rotor

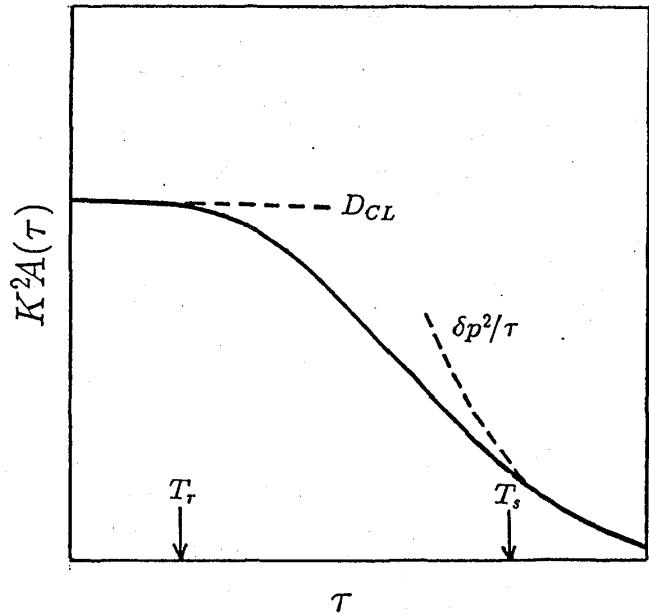


図1 相関面積関数の寿命 (τ) 依存性

2 のモーメントの過去の発展過程から $\tau_2(\epsilon)$ を決定することができる筈である。いくつかの仮定を設けると、 $\tau_2(\epsilon)$ は rotor 2 のモーメント $M_2(t)$ から

$$M_2(t) - M_2(t - \tau_2(\epsilon)) = K_2^2 \hbar^2 / \epsilon^2 \quad (11)$$

をみたすように定まることが示せる⁽³⁾ さてこれまでは rotor 2 を 1 に対する摂動源と見做してきた。1 と 2 を交換するともう 1 組のモーメントに関する発展方程式をえるであろう。この 4 本の発展方程式から 2 つの rotors のモーメントの時間発展が定まるわけである。

もし、rotor 2 の運動が加速 (減速) したとしてみよう。すると $\tau_2(\epsilon)$ は短く (長く) なる。従って図1 から $A^{(1)}(\tau_1(\epsilon))$ も小さく (大きく) なって rotor 1 の運動は加速 (減速) される。1 → 2 の同様なループをたどって、この効果は再び rotor 2 にフィードバックされ rotor 2 は更に加速 (減速) される。これが 2 つの rotor 間に作用する協同効果の具体的表現なのである。このフィードバックループが正に作用するか負に作用するかは、結合定数 ϵ の値いかんによる。

定常拡散解は (10) (11) (及びそれらの 1, 2 の添字を交換した方程式) から容易にもとめることができる。相関面積関数の性質から次のことがわかる。まづ ϵ が

$$\epsilon_{PT} = \hbar K / \delta p (\propto \hbar^2) \quad (12)$$

を越すと拡散係数が0から有限値にジャンプする。ここで拡散が回復される一種の相転移がおこるわけである。さらに ε が

$$\varepsilon_{PC} = \hbar K / \sqrt{T_r D_{CL}} \quad (13)$$

を越すと古典拡散定数が回復される。さて、この結果を実験の結果と比較したのが図2である。

古典が回復される近傍の挙動は、実験理論の一致はきわめてよい。しかし $\varepsilon \approx \varepsilon_{PT}$ 近傍の挙動は実験、理論の食い違いがはなはだしくなる。この原因の1つは、実験がtransientしかつかまえていないためかもしれない。実際(10)(11)のシミュレーションも $\varepsilon \ll \varepsilon_{PC}$ ではきわめて長いtransientを与えることがわかっている。 $t \sim 0$ では2つの系は殆んど古典状態から出発する。そして直ちにslow manifoldにおちこみ、そこでは定常値よりはるかに大きい、しかし、古典値より小さい拡散係数でゆっくりと定常拡散へと

向うのである。このslow manifoldでの拡散係数が実験で測定されたものだと仮定すると、実験と理論はきわめてよく一致する。それだけで話がおわれば、メデタシメデタシであったのだが……

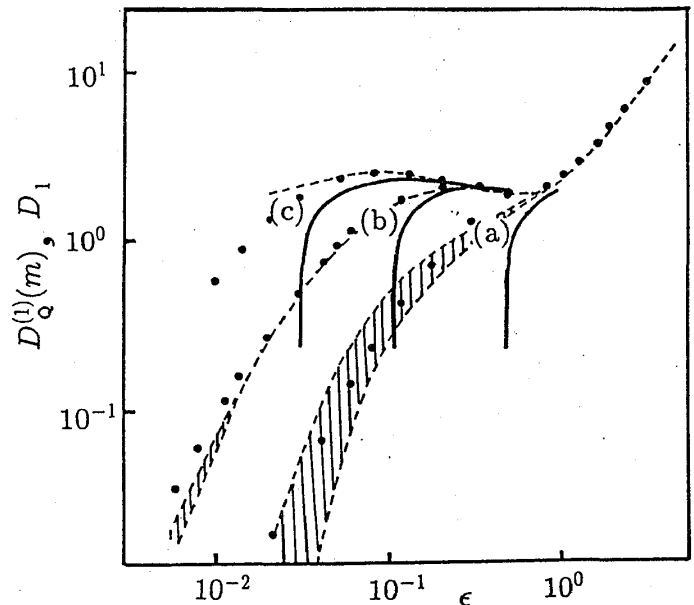


図2 定常拡散係数の理論値(太いカーブ)と実験(・)との比較。(a)(b)(c)の順に $\hbar$ が1/2づつ小さくなっている。

§3 問題点: chaos × torus の場合

紙数も尽きたので、簡単に要点だけを書く。§2では2つのrotorの間の正のフィードバックが作用した時に協同的に古典性が回復されるというシナリオをつくりあげた。我々はこの正しさを更に検証すべく2つのrotorの一方がchaos状態、他方がtorus状態の実験を行った。我々の考え方からすれば、まづtorus rotorがchaos rotorからのえいきょうでchaos成分をいくぶんか含み、しかるのちにその効果がchaos rotorにフィードバックされてchaos rotorに古典化がおこることになる。このためには ε は十分大きくなければならない。実際文献2)が出版された時点では、chaos × torus系での古典性の回復はchaos × chaos系のそれよりはるかに大きく、この考えは支持されるかにみえた。我々は多少工夫をこらし、 $\hbar$ が更

に小さい場合の実験を行った。その結果、 $\hbar$ が十分小さければ torus rotor が明らかに chaos component を含まないと考えられる程小さい ϵ で古典化が発生していることが判明したのである。このことは chaos $\rightarrow$ torus $\rightarrow$ chaos なる feedback loop をへずして系の古典カオス化が発生していることを強く示唆する。この現象はこれまでの協同的古典回復のシナリオでは説明できない。いずれにせよ、カオスの量子抑制機構は想像以上にもろいのである。もしそうならば、量子カオス系はいとも簡単に古典カオスを回復し、波束の収縮に比肩するべき現象が少なくとも 2.5 自由度以上の系ならやすやすと発生していることになる。このもろさをどのように定量化し、理論的にとらえるかは今後に残された重要な課題である。

文 献

- (1) S. Adachi et al., Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 655.
- (2) S. Adachi et al., Phys. Rev. Lett. 61 (1988) 659.
- (3) M. Toda et al., "Dynamical Aspects of Quantum-classical Correspondence in Quantum Chaos" Suppl. Prog. Theor. Phys. No. 98 に掲載予定。