

時系列推定における Second Order Asymptotic Efficiency

東大 経 竹内 啓
電通大 赤平昌文

§ 1. 序

次のような自己回帰過程 $\{X_i\}$ について考察する。

$$X_i = \theta X_{i-1} + U_i \quad (i=1, 2, \dots)$$

ここで $X_0 = 0$ で $\{U_i\}$ は平均 0, 分散 σ^2 をもつ密度関数 f に従う独立な確率変数列とする。いま $|\theta| < 1$ であると仮定する。 θ の 2 次の漸近的中央値不偏 (asymptotically median unbiased = AMU) 推定量の 2 次の漸近分布の bound を、一様に attain する 2 次の AMU 推定量を 2 次の漸近的有効 (as. (asymptotically) efficient) 推定量と定義する。[1] において、 θ の 2 次の AMU 推定量の漸近分布の bound を求め、さらに f が正規分布の密度関数であるとき、最小 2 乗推定量 (LSE) は 2 次の as. efficient であることを示した。ここでは、「LSE の他に 2 次の as. efficient になる推定量はないであろうか？」という問題について考えてみる。実

は Yule-Walker 推定量が 2 次の as. efficient になることが示される。

§ 2. 定義

$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ を標本空間、 $\mathcal{H}$ をパラメーター空間で R^1 の開集合であるとする。 $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ の n 個の直積を $(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)})$ で表わす。 $(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)})$ 上に次のような確率測度の族の列 $\{P_{n,\theta} : \theta \in \mathcal{H}\}$ ($n=1, 2, \dots$) を考える。

$$P_{n,\theta}(\mathcal{B}^{(n)}) = P_{n+1,\theta}(\mathcal{B}^{(n)} \times \mathcal{X}), \quad \forall \mathcal{B}^{(n)} \in \mathcal{B}^{(n)}.$$

$\mathcal{X}^{(n)}$ から $\mathcal{H}$ の中への $\mathcal{B}^{(n)}$ -可測関数の列 $\{\hat{\theta}_n\}$ を θ の推定量とよぶ。これから簡単のために $\{\hat{\theta}_n\}$ を $\hat{\theta}_n$ と書くことにする。ある正数の単調増加列 $\{c_n\}$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$) に対して推定量 $\hat{\theta}_n$ が $\{c_n\}$ -一致推定量であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $\theta \in \mathcal{H}$ に対して、十分小さな $\delta > 0$ と十分大きな $L > 0$ が存在して
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \theta_0| < \delta} P_{n,\theta}(\{c_n | \hat{\theta}_n - \theta| \geq L\}) < \varepsilon$$
 が成り立つことである ([2], [3])。ここでの議論は $c_n = \sqrt{n}$ の場合のみを考えている。 $\hat{\theta}_n$ を $\{\sqrt{n}\}$ -一致推定量であるとする。

定義 1. $\hat{\theta}_n$ が 2 次の AMU であるとは、任意の $\theta \in \mathcal{H}$ に対して、ある正数 δ があって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \theta_0| < \delta} \sqrt{n} \left| P_{n,\theta}(\{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \leq 0\}) - \frac{1}{2} \right| = 0;$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta: |\theta - \theta_0| < \delta} \sqrt{n} |P_{n,\theta}(\{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \geq 0\}) - \frac{1}{2}| = 0$
 となることである。

定義 2. 2次のAMU推定量 $\hat{\theta}_n$ について、 $F_\theta(t) + \frac{1}{\sqrt{n}} G_\theta(t)$ が $\hat{\theta}_n$ の2次の漸近分布であるとは、

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} |P_{n,\theta}(\{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \leq t\}) - F_\theta(t) - \frac{1}{\sqrt{n}} G_\theta(t)| = 0$
 となることである。

$\hat{\theta}_n$ を2次のAMU推定量とする。 $\theta_0 (\in \Theta)$ を任意に固定する。このとき帰無仮説 $H^+: \theta = \theta_0 + t n^{-1/2}$ ($t > 0$), 対立仮説 $K: \theta = \theta_0$ なる検定問題を考える。 $A_{\hat{\theta}_n, \theta} = \{c_n(\hat{\theta}_n - \theta) \leq t\}$ とおくと、 $P_{n, \theta_0 + t n^{-1/2}}(A_{\hat{\theta}_n, \theta}) = 1/2 + o(n^{-1/2})$ となる。

$\mathcal{U}_2$ を2次のAMU推定量の全体とする。また $\Phi_{1/2}$ を $E_{n, \theta_0 + t n^{-1/2}}(\phi_n) = 1/2 + o(n^{-1/2})$ を満たす検定関数の列 $\{\phi_n\}$ の集合とする。このとき $\hat{\theta}_n \in \mathcal{U}_2$ について $A_{\hat{\theta}_n, \theta_0}$ の定義関数の列 $\{\chi_{A_{\hat{\theta}_n, \theta_0}}\}$ は $\Phi_{1/2}$ に属する。 $\mathcal{U}_2$ の推定量の中で $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n, \theta_0}(A_{\hat{\theta}_n, \theta_0})$ の upper bound を求めるためには $\Phi_{1/2}$ の検定関数列の中で $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{n, \theta_0}(\phi_n)$ を最大にする検定関数列 $\{\phi_n^*\}$ をとればよい。このような $\{\phi_n^*\}$ の存在は、

Neyman-Pearson の基本定理によって保証されている。 $t < 0$ の場合も同様にして、 $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n, \theta_0}(A_{\hat{\theta}_n, \theta_0})$ の lower bound が求められる。そこで2次の asymptotic efficiency を次のようにして定義する。

定義 3. 2 次の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n^*$ の 2 次の漸近分布が 2 次の AMU 推定量の 2 次の漸近分布の bound を一様に attain するとき、 $\hat{\theta}_n^*$ は 2 次の as. efficient 推定量であるという。

§ 3. 結果.

$\mathcal{X} = \mathbb{R}^1$, $\mathbb{H} = (-1, 1)$ と仮定し、§ 1 で与えられた自己回帰過程 $\{X_i\}$ について考察する。 $\psi(u) = \log f(u)$ とおく。

仮定 (A). $f(u) > 0$ ($\forall u \in \mathcal{X}$) で f は 4 回連続微分可能。

仮定 (B). $\psi^{(4)}(u)$ は有界でかつ

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} f(u) = \lim_{u \rightarrow \pm\infty} f'(u) = \lim_{u \rightarrow \pm\infty} f''(u) = 0 ;$$

$$E_f[U_i^4] < \infty.$$

定理 1 ([1]). 仮定 (A), (B) の下で 2 次の AMU 推定量 $\hat{\theta}_n$ の 2 次の漸近分布の bound は

$$\Phi\left(\frac{t\sigma\sqrt{I}}{\sqrt{1-\theta^2}}\right) + \phi\left(\frac{t\sigma\sqrt{I}}{\sqrt{1-\theta^2}}\right) \left\{ \frac{t^3\sigma\sqrt{I}\theta}{\sqrt{n}(1-\theta^2)^{3/2}} + \frac{t^2\sqrt{1-\theta^2}\mu_3}{6\sigma\sqrt{I}\sqrt{n}(1-\theta^3)}(3J+K) \right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

で与えられる。ここで $\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \phi(v) dv$ で $\phi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$, $I = E_f[\{\psi'(0)\}^2]$, $J = E_f[\psi'(0)\psi''(0)]$, $K = E_f[\{\psi'(0)\}^3]$, $\mu_3 = E_f(U^3)$ とする。

次に定理 1 で与えられた bound を attain する推定量を求める。 θ の最小 2 乗推定量 $\hat{\theta}_{LS}$ は $(\sum_{i=2}^n X_i X_{i-1}) / \sum_{i=2}^n X_{i-1}^2$ で与えられる。ここで f が正規分布の密度関数であると仮定

する。このとき

$$P_{n,\theta}(\{\sqrt{n}(\hat{\theta}_{LS} - \theta) \leq t\}) \\ = \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{1-\theta^2}}\right) + \phi\left(\frac{t}{\sqrt{1-\theta^2}}\right) \left\{ \frac{\theta t^2}{\sqrt{n}(1-\theta^2)^{3/2}} + \frac{\theta}{\sqrt{n}\sqrt{1-\theta^2}} \right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となる。この式からわかるように $\hat{\theta}_{LS}$ は 2 次の AMU 推定量でないから、少し修正して

$$\hat{\theta}_{LS}^* = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \hat{\theta}_{LS}$$

とすれば、 $\hat{\theta}_{LS}^*$ は 2 次の AMU 推定量になる。 f が正規分布であるから $\sigma^2 I = 1$, $\mu_3 = 0$ となり定理 1 から次の定理が成り立つ。

定理 2 ([1]). f が平均 0, 分散 σ^2 の正規分布の密度関数ならば、 $\hat{\theta}_{LS}^*$ は 2 次の as. efficient 推定量である。

次に Yule-Walker 推定量 $\hat{\theta}_{YW} = (\sum_{i=2}^n X_i X_{i-1}) / \sum_{i=1}^n X_i^2$ について考える。この推定量と LSE とを比較してみると、LSE とは分母が異なっていて、Yule-Walker 推定量の方が X_n^2 だけ余計に加わっているから、 n が十分大きいとき X_n^2 の影響が 2 次の asymptotic efficiency に起らないかということも興味ある問題である。ここで f が正規分布の密度関数であると仮定すれば

$$P_{n,\theta}(\{\sqrt{n}(\hat{\theta}_{YW} - \theta) \leq t\}) \\ = \Phi\left(\frac{t}{\sqrt{1-\theta^2}}\right) + \phi\left(\frac{t}{\sqrt{1-\theta^2}}\right) \left\{ \frac{\theta t^2}{\sqrt{n}(1-\theta^2)^{3/2}} + \frac{2\theta}{\sqrt{n}\sqrt{1-\theta^2}} \right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となる。この式からすぐわかるように $\hat{\theta}_{Yw}$ は 2 次の AMU 推定量でないから修正して

$$\hat{\theta}_{Yw}^* = (1 + \frac{2}{n}) \hat{\theta}_{Yw}$$

とすれば、 $\hat{\theta}_{Yw}^*$ は 2 次の AMU 推定量になる。

定理 3. f が平均 0, 分散 σ^2 の正規分布の密度関数ならば、 $\hat{\theta}_{Yw}$ は 2 次の as. efficient 推定量である。

REFERENCES

- [1] M.Akahira (1975). A note on the second order asymptotic efficiency of estimators in an autoregressive process. Rep. Univ. Electro-Comm. 26-1, 143-149.
- [2] M.Akahira (1975). Asymptotic theory for estimation of location in non-regular cases, I: Order of convergence of consistent estimators. Rep. Stat. Appl. Res., JUSE, 22, 8-26.
- [3] 竹内 啓 (1974). 統計的推定の漸近理論 (教育出版).