

Selmer 複体と p 進 BSD 予想

佐野 昂迪 (大阪公立大学)

Takamichi Sano (Osaka Metropolitan University)

概要

Mazur-Tate-Teitelbaum は 1986 年に BSD 予想の p 進類似である p 進 BSD 予想を定式化した。同じ頃に, Perrin-Riou, Schneider, Jones は, Mazur-Tate-Teitelbaum 予想が岩澤主予想から p 進単数のずれを除いて導かれることを示した。一方, Bertolini-Darmon は 1996 年に Heegner 点に対する p 進 BSD 予想の類似を定式化した。本稿では, Bertolini-Darmon の予想が Heegner 点の岩澤主予想から p 進単数のずれを除いて導かれることを示す。証明には Nekovář の Selmer 複体を用いる。本稿は論文 [San23] の一部の要約である。

1 序

本稿のテーマは p 進 BSD 予想である^{*1}。まずは通常の BSD 予想の復習をしよう。

E を $\mathbb{Q}$ 上で定義された楕円曲線とし, $r := \text{rank}(E(\mathbb{Q}))$ とおく。 $L(E, s)$ を E の Hasse-Weil L 関数とする。このとき, BSD 予想は次のように述べられる。

予想 1.1 (BSD 予想)。

- (i) $\text{ord}_{s=1} L(E, s) = r$ が成り立つ。
- (ii) $L^{(r)}(E, 1) := \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)^{-r} L(E, s)$ とおくと,

$$L^{(r)}(E, 1) = \frac{\#\text{III}(E/\mathbb{Q}) \cdot \text{Tam}(E/\mathbb{Q})}{\#E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}^2} \cdot \Omega_E \cdot R_E$$

が成り立つ。ここで,

- $\text{III}(E/\mathbb{Q})$: Tate-Shafarevich 群^{*2},
- $\text{Tam}(E/\mathbb{Q})$: 玉河因子の積,
- Ω_E : 実 Néron 周期,
- R_E : Néron-Tate レギュレーター

である。

次に, Mazur-Tate-Teitelbaum [MTT86] によって定式化された p 進 BSD 予想を述べよう。簡単のため, p を奇素数とする。 $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ を円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし, $\Gamma := \text{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ とおく。岩澤代数を $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ とし, $I := \ker(\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}_p)$ を augmentation イデアルとする。 p 進 BSD 予想は E の p で

^{*1} “BSD” はもちろん Birch と Swinnerton-Dyer を指す。

^{*2} 有限であると予想されており, このことも BSD 予想の一部である。

の還元によって定式化が異なるが、簡単のため、ここでは E が p で良い通常 (good ordinary) 還元を持つ場合のみ考える. このとき, $a_p := p+1 - \#E(\mathbb{F}_p)$ は p で割れないので, 多項式 $x^2 - a_p x + p$ は p 進単数根 $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$ を持つ*3. また, E の p 進 L 関数

$$\mathcal{L}_p \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$$

及び p 進レギュレーター

$$R_p \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I^r / I^{r+1}$$

が構成できる. p 進 BSD 予想は次のように述べられる.

予想 1.2 (p 進 BSD 予想 (Mazur-Tate-Teitelbaum [MTT86])).

- (i) $\mathcal{L}_p \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I^r$ が成り立つ.
- (ii) $\mathcal{L}_p$ の $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I^r / I^{r+1}$ における像を $\mathcal{L}_p^{(r)}$ と表すと,

$$\mathcal{L}_p^{(r)} = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \frac{\#\text{III}(E/\mathbb{Q}) \cdot \text{Tam}(E/\mathbb{Q})}{\#E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}^2} \cdot R_p$$

が成り立つ*4.

さて, p 進 BSD 予想に関して, 次の古典的な結果が知られている.

定理 1.3 (Perrin-Riou [Per82], Schneider [Sch85]). 次を仮定する.

- $\text{III}(E/\mathbb{Q})$ の p 部分 $\text{III}(E/\mathbb{Q})[p^\infty]$ は有限である.
- p 進高さペアリングは非退化 (すなわち, $R_p \neq 0$) である.

このとき, (E と $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ に対する) 岩澤主予想が正しければ,

$$\mathcal{L}_p \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I^r$$

が成り立ち, さらに

$$\mathcal{L}_p^{(r)} = u \cdot \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \frac{\#\text{III}(E/\mathbb{Q})[p^\infty] \cdot \text{Tam}(E/\mathbb{Q})}{\#E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}^2} \cdot R_p$$

を満たす単数 $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ が存在する.

大雑把に言うと, 定理 1.3 は

「岩澤主予想が正しければ, p 進 BSD 予想は p 進単数のずれを除いて正しい」

ということを述べている. ここでは E が p で良い通常還元を持つ場合のみに限って述べたが, 乗法的 (multiplicative) 還元を持つ場合は Jones [Jon89] によって, 良い超特異 (good supersingular) 還元を持つ場合は Perrin-Riou [Per93] によってこのタイプの結果が得られている.

*3 もう一つの根は p 進単数ではない.

*4 $\text{III}(E/\mathbb{Q})$ の有限性を仮定している.

最近の進展として, Burns-Kurihara-Sano [BKS] は, 加藤のオイラー系 ([Kat04] 参照) を用いて定理 1.3 の別証明を与えた. この結果は, 乗法的還元及び良い超特異還元の場合も含み, さらに, 仮定 “ $R_p \neq 0$ ” も外している. [BKS] における証明の方法を少し説明すると, まず, 加藤のオイラー系に対する p 進 BSD 予想の類似を定式化し (「一般 Perrin-Riou 予想 (generalized Perrin-Riou conjecture)」という), そこから p 進 BSD 予想を導いた. また, この一般 Perrin-Riou 予想を岩澤主予想から p 進単数のずれを除いて導くことで, 定理 1.3 の別証明を与えたのである. つまり, [BKS] は

$$\text{岩澤主予想} \xrightarrow{p\text{ 進単数のずれ}} \text{一般 Perrin-Riou 予想} \Rightarrow p\text{ 進 BSD 予想}$$

という流れで定理 1.3 を証明した. ちなみに, p 進 BSD 予想とは異なり, 一般 Perrin-Riou 予想の定式化は E の p での還元によらず, 特に加法的還元を持つ場合にも定式化される.

一方, Bertolini-Darmon [BeDa96] は, Heegner 点に対する p 進 BSD 予想の類似を定式化した. 筆者は [San23] において, 定理 1.3 の Bertolini-Darmon 予想に対する類似を証明した. すなわち, (Heegner 点に対する) 岩澤主予想が正しければ, Bertolini-Darmon 予想は p 進単数のずれを除いて正しいことを示したのである. 証明には Nekovář の Selmer 複体 ([Nek06] 参照) を本質的に用いる. また, [San23] の方法を用いると, 定理 1.3 の Selmer 複体を用いた別証明を与えることもできる (ここでも仮定 “ $R_p \neq 0$ ” は外せる). この別証明には加藤のオイラー系を用いず, [BKS] において与えた定理 1.3 の別証明よりも「直接的」である. なお, この直接的な方法は, 乗法的還元の場合にも適用可能だが, 超特異還元の場合は良い “integrality” を持つ Selmer 複体が (現時点では) うまく定義されないので適用できないことに注意しておく.

本稿の構成は以下の通りである. まず, §2 で Bertolini-Darmon 予想の定式化をし, 主結果 (定理 2.2) を述べる. §3 で Selmer 複体の定義を述べる. §4 で Heegner 点に対する岩澤主予想の定式化をする. §5 で主結果の証明に用いる代数的な「降下理論」について述べる. §6 で主結果の証明を与える. 最後に, §7 で定理 1.3 の Selmer 複体を用いた証明を与える.

2 Bertolini-Darmon 予想

本節では, Bertolini-Darmon によって定式化された, Heegner 点に対する p 進 BSD 予想の類似を述べる ([BeDa96, Conjecture 4.5(1)], [AgCa21, Conjecture 3.11] 参照). また, それに対する定理 1.3 の類似を述べる (定理 2.2 参照).

E を $\mathbb{Q}$ 上で定義された楕円曲線とし, その導手を N とする. p を奇素数とし, E は p で良い通常還元を持つとする. K を虚 2 次体とし, p は K で不分岐とする. 次の「Heegner 条件」を仮定する:

N の任意の素因子は K で分解する.

K_∞/K を反円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし, $\Gamma := \text{Gal}(K_\infty/K)$, $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$, $I := \ker(\Lambda \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_p)$ とおく^{*5}. また, $r := \text{rank}(E(K))$, $r^+ := \text{rank}(E(\mathbb{Q}))$, $r^- := r - r^+$ とおく. このとき, Bertolini-Darmon は

^{*5} §1 では円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ に対して Γ, Λ, I を定義したが, 本節では反円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K_∞/K しか考えないので, 同じ記号を用いることにする.

Heegner 点を用いて p 進 L 関数の類似

$$\mathcal{L}_p^{\text{BD}} \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda)$$

を構成した。また、「導来 (derived) p 進レギュレーター」

$$R_p^{\text{BD}} \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\nu / I^{\nu+1})$$

を構成した*6。ここで

$$\nu := 2(\max\{r^+, r^-\} - 1)$$

である*7。Bertolini-Darmon 予想は次のように述べられる。

予想 2.1 (Bertolini-Darmon 予想)。

- (i) $\mathcal{L}_p^{\text{BD}} \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\nu)$ が成り立つ。
- (ii) $\mathcal{L}_p^{\text{BD}}$ の $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\nu / I^{\nu+1})$ における像を $\mathcal{L}_p^{\text{BD},(\nu)}$ と表すと、

$$\mathcal{L}_p^{\text{BD},(\nu)} \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\nu / I^{\nu+1})$$

であり、

$$\mathcal{L}_p^{\text{BD},(\nu)} = A_p^2 \cdot \frac{\#\text{III}(E/K) \cdot \text{Tam}(E/K)}{\#E(K)_{\text{tors}}^2} \cdot R_p^{\text{BD}}$$

が成り立つ。ここで

$$A_p := \begin{cases} 1 - \frac{1}{\alpha^2} & p \text{ が } K \text{ で惰性するとき,} \\ \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 & p \text{ が } K \text{ で分解するとき} \end{cases} \quad (2.1)$$

である。

次の定理が本稿の主結果である。

定理 2.2. $\text{III}(E/K)$ の p 部分 $\text{III}(E/K)[p^\infty]$ は有限であると仮定する。このとき、Heegner 点に対する岩澤主予想（以下の予想 4.1 参照）が正しければ、

$$\mathcal{L}_p^{\text{BD}} \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\nu)$$

が成り立ち、さらに

$$\mathcal{L}_p^{\text{BD},(\nu)} = u \cdot A_p^2 \cdot \frac{\#\text{III}(E/K)[p^\infty] \cdot \text{Tam}(E/K)}{\#E(K)_{\text{tors}}^2} \cdot R_p^{\text{BD}}$$

を満たす単数 $u \in \mathbb{Z}_p^\times$ が存在する。

*6 構成には Bertolini-Darmon [BeDa95] が導入した「導来 p 進高さ (derived p -adic height)」を用いる。導来 p 進高さは、Howard [How04], Nekovář [Nek06, §11.5] により異なる構成法が与えられている。本稿では、Nekovář による定義を用いる（定義 6.1 参照）。

*7 Heegner 条件を仮定すると、 r は奇数になることが知られているので、 $\nu \geq 0$ である。

3 Selmer 複体

定理 2.2 の証明には Nekovář の Selmer 複体を用いる。本節では、Selmer 複体の定義を述べる。

K を一般の代数体とする。 K の代数閉包 $\bar{K}$ を固定する。 p の上の K の素点全体の集合を S_p とする。 K の無限素点全体の集合を S_∞ とする。 S を、 K の素点の有限集合で、 $S_p \cup S_\infty$ を含むものとする。 また、 $S_f := S \setminus S_\infty$ とおく。 K_S/K を、 S の外で不分岐な最大ガロア拡大とし、 $G_{K,S} := \text{Gal}(K_S/K)$ とおく。 K の各素点 v に対し、 v の上の $\bar{K}$ の素点を固定し、その分解群を K_v の絶対ガロア群 G_{K_v} と同一視する。 K の有限素点 v に対し、 K_v^{ur}/K_v を最大不分岐拡大とし、 $I_v := G_{K_v^{\text{ur}}} \subset G_{K_v}$ を惰性群とする。

X を $\mathbb{Z}_p$ 加群で、 $G_{K,S}$ の連続な作用が入っているものとする。 $\mathbf{R}\Gamma(G_{K,S}, X) := C^\bullet(G_{K,S}, X)$ を、連続ガロア・コホモロジーの複体とする（例えば [Ser02, §I.2.2] 参照）。 $\mathbf{R}\Gamma(G_{K_v}, X)$ などと同様に定義される。有限素点 v に対し、不分岐ガロア・コホモロジーの複体を

$$\mathbf{R}\Gamma_{\text{ur}}(G_{K_v}, X) := \mathbf{R}\Gamma(\text{Gal}(K_v^{\text{ur}}/K_v), X^{I_v})$$

と定める。このとき、自然な膨張 (Inflation) 射

$$\text{Inf} : \mathbf{R}\Gamma_{\text{ur}}(G_{K_v}, X) \rightarrow \mathbf{R}\Gamma(G_{K_v}, X)$$

がある。これを用いて

$$\mathbf{R}\Gamma_{/\text{ur}}(G_{K_v}, X) := \text{Cone} \left(\mathbf{R}\Gamma_{\text{ur}}(G_{K_v}, X) \xrightarrow{-\text{Inf}} \mathbf{R}\Gamma(G_{K_v}, X) \right)$$

とおく。

定義 3.1 ([Nek06, §6.1] 参照)。次が与えられているとする：

$$(*) \quad \text{各 } v \in S_p \text{ に対し、 } \mathbb{Z}_p[G_{K_v}] \text{ 加群の完全列 } 0 \rightarrow X_v^+ \rightarrow X \rightarrow X_v^- \rightarrow 0.$$

これに対して、Selmer 複体^{*8}を

$$\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, X) := \text{Cone} \left(\mathbf{R}\Gamma(G_{K,S}, X) \rightarrow \bigoplus_{v \in S_p} \mathbf{R}\Gamma(G_{K_v}, X_v^-) \oplus \bigoplus_{v \in S_f \setminus S_p} \mathbf{R}\Gamma_{/\text{ur}}(G_{K_v}, X) \right) [-1]$$

と定める（右辺の射は制限写像から誘導される）。これは擬同型を除いて S のとり方によらない ([Nek06, Proposition 7.8.8(ii)] 参照)。

注意 3.2. E を K 上定義された楕円曲線とし、 S は悪い素点^{*9}をすべて含むとする。このとき、 X として E の p 進 Tate 加群 $T_p(E)$ がとれる。 E は任意の $v \in S_p$ で良い通常還元を持つと仮定すると、 $(*)$ として次の標準的なものがとれる： $v \in S_p$ に対し、

$$0 \rightarrow T_p(\hat{E}_v) \rightarrow T_p(E) \rightarrow T_p(\tilde{E}_v) \rightarrow 0.$$

ここで $\hat{E}_v, \tilde{E}_v$ は、 E を $\mathcal{O}_{K_v}$ 上の楕円曲線とみなしたときの、それぞれ E の形式群、 E の mod v での変元を表す。 $T_p(\hat{E}_v), T_p(\tilde{E}_v)$ は階数 1 の自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群である。

^{*8} より正確には、「Greenberg 局所条件」に関する Selmer 複体である ([Nek06, §7.8] 参照)。

^{*9} すなわち、 E が v で悪い還元を持つような K の素点 v のこと。

4 Heegner 点に対する岩澤主予想

§2 の設定に戻る. 本節では, Heegner 点に対する岩澤主予想を定式化する.

注意 3.2 のように, K の素点の有限集合 S を, $S_p \cup S_\infty$ 及び悪い素点をすべて含むようにとる. $T := T_p(E)$ を E の p 進 Tate 加群とする. このとき,

$$\mathbb{T} := T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$$

とおく. これに $G_{K,S}$ の作用を

$$\sigma \cdot (t \otimes \lambda) := \sigma t \otimes \bar{\sigma}^{-1} \lambda \quad (\sigma \in G_{K,S}, t \in T, \lambda \in \Lambda)$$

で定める. ここで $\bar{\sigma} \in \Gamma$ は, 自然な全射 $G_{K,S} \twoheadrightarrow \Gamma$ による σ の像を表す.

E は p で良い通常還元を持つと仮定しているので, 注意 3.2 で述べたように, 各 $v \in S_p$ に対して $\mathbb{Z}_p[G_{K_v}]$ 加群の標準的な完全列

$$0 \rightarrow T_v^+ \rightarrow T \rightarrow T_v^- \rightarrow 0$$

がある. これに対して Selmer 複体 $\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, T)$ を定義する (定義 3.1 参照). $\mathbb{T}$ に対する Selmer 複体 $\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, \mathbb{T})$ も同様に定義される.

有限生成 Λ 加群の有界な複体 C に対して, $\det_\Lambda(C)$ をその determinant 加群とする. また, $\det_\Lambda^{-1}(C) := \mathrm{Hom}_\Lambda(\det_\Lambda(C), \Lambda)$ とおく.

$Q(\Lambda)$ を Λ の商体とする. このとき, Heegner 点を用いて「Heegner 元」

$$\tilde{\mathfrak{z}}_\infty \in Q(\Lambda) \otimes_\Lambda \det_\Lambda^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, \mathbb{T}))$$

が定義できる. これを用いて, Heegner 点に対する岩澤主予想は次のように定式化できる.

予想 4.1 (Heegner 点に対する岩澤主予想). $\Lambda \cdot \tilde{\mathfrak{z}}_\infty = \det_\Lambda^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, \mathbb{T}))$ が成り立つ.

注意 4.2. Heegner 点に対する岩澤主予想はもともと Perrin-Riou [Per87] により別の形で定式化されたが, それが予想 4.1 と同値であることは [KaSa22, Proposition 5.12] において示された.

5 降下理論

本節では, 定理 2.2 の証明に用いる「降下理論」について述べる. 本節の内容は純粋に代数的である.

一般に, 可換環 R と R 加群 M に対して

$$M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$$

とおく. M の R ねじれ (torsion) 部分加群を M_{tors} とし, ねじれ自由 (torsion-free) 商を

$$M_{\mathrm{tf}} := M/M_{\mathrm{tors}}$$

とおく.

$\mathcal{R}$ を離散付値環とし, $\mathcal{P}$ をその極大イデアル, $\mathcal{F} := \mathcal{R}/\mathcal{P}$ を剰余体とする. 次の形の複体を考える:

$$C = [\mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}^{d'}].$$

ここで $d, d' \geq 0$ で, $\mathcal{R}^d$ は次数 1 におく. σ, τ をそれぞれ $H^1(C), H^2(C)$ の $\mathcal{R}$ 階数とし,

$$\rho := \text{length}_{\mathcal{R}}(H^2(C)_{\text{tors}})$$

とおく. ($\text{Fitt}_{\mathcal{R}}(H^2(C)_{\text{tors}}) = \mathcal{P}^\rho$ が成り立つことに注意する. ここで Fitt は Fitting イデアルを表す.) また,

$$C_0 := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} C = [\mathcal{F}^d \rightarrow \mathcal{F}^{d'}]$$

とおく.

次の 4 つの写像を考える:

$$\varphi : \det_{\mathcal{R}}^{-1}(C) = \det_{\mathcal{R}}(H^1(C)) \otimes_{\mathcal{R}} \det_{\mathcal{R}}^{-1}(H^2(C)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}^\rho \cdot \bigwedge_{\mathcal{R}}^{\sigma} H^1(C) \otimes_{\mathcal{R}} \bigwedge_{\mathcal{R}}^{\tau} H^2(C)^*,$$

$$\pi : \det_{\mathcal{R}}^{-1}(C) \rightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \det_{\mathcal{R}}^{-1}(C) \simeq \det_{\mathcal{F}}^{-1}(C_0),$$

$$\text{Der} : \mathcal{P}^\rho \cdot \bigwedge_{\mathcal{R}}^{\sigma} H^1(C) \otimes_{\mathcal{R}} \bigwedge_{\mathcal{R}}^{\tau} H^2(C)^* \rightarrow \bigwedge_{\mathcal{F}}^{\sigma} H^1(C_0) \otimes_{\mathcal{F}} \bigwedge_{\mathcal{F}}^{\tau} H^2(C_0)^* \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{P}^\rho / \mathcal{P}^{\rho+1},$$

$$\text{Reg} : \det_{\mathcal{F}}^{-1}(C_0) \rightarrow \bigwedge_{\mathcal{F}}^{\sigma} H^1(C_0) \otimes_{\mathcal{F}} \bigwedge_{\mathcal{F}}^{\tau} H^2(C_0)^* \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{P}^\rho / \mathcal{P}^{\rho+1}.$$

φ は自然な同型

$$\det_{\mathcal{R}}(H^1(C)) \simeq \bigwedge_{\mathcal{R}}^{\sigma} H^1(C), \det_{\mathcal{R}}^{-1}(H^2(C)) \simeq \text{Fitt}_{\mathcal{R}}(H^2(C)_{\text{tors}}) \cdot \bigwedge_{\mathcal{R}}^{\tau} H^2(C)^*$$

から誘導される. π は自然な全射である. Der は “modulo $\mathcal{P}^{\rho+1}$ ” による自然な写像である. Reg の定義は少し複雑なので, 本節の最後で述べる.

次が [San23] における代数的な主結果である.

定理 5.1. 次の図式は可換である:

$$\begin{array}{ccc} \det_{\mathcal{R}}^{-1}(C) & \xrightarrow[\simeq]{\varphi} & \mathcal{P}^\rho \cdot \bigwedge_{\mathcal{R}}^{\sigma} H^1(C) \otimes_{\mathcal{R}} \bigwedge_{\mathcal{R}}^{\tau} H^2(C)^* \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{Der} \\ \det_{\mathcal{F}}^{-1}(C_0) & \xrightarrow{\text{Reg}} & \bigwedge_{\mathcal{F}}^{\sigma} H^1(C_0) \otimes_{\mathcal{F}} \bigwedge_{\mathcal{F}}^{\tau} H^2(C_0)^* \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{P}^\rho / \mathcal{P}^{\rho+1}. \end{array}$$

注意 5.2. $\sigma = \tau = 0$ のとき, 定理 5.1 は本質的に Nekovář [Nek06, (11.6.12.2)] によって示されている. また, $\mathcal{P} \cdot H^2(C)_{\text{tors}} = 0$ のとき, 定理 5.1 は本質的に Burns-Kurihara-Sano [BKS16, Lemma 5.22] によって示されている.

写像 Reg の定義を述べる. 以後, 記号の簡略化のため

$$\mathcal{Q}^i := \mathcal{P}^i / \mathcal{P}^{i+1}$$

とおく. まず, C のフィルター付け $\{\mathcal{P}^i C\}_i$ から,

$$E_1^{i,j} = H^{i+j}(C_0) \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{Q}^i$$

なるスペクトル系列 $E_k^{i,j}$ が定まる^{*10}. いま,

$$\sigma_k := \dim_{\mathcal{F}}(E_{k+1}^{0,1}), \quad \tau_k := \dim_{\mathcal{F}}(E_{k+1}^{0,2})$$

とおく. さらに,

$$k_0 := \min\{k \geq 1 \mid \mathcal{P}^k \cdot H^2(C)_{\text{tors}}\}$$

とおく. すると,

$$E_{k_0+1}^{0,1} \simeq H^1(C) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F}, \quad E_{k_0+1}^{0,2} \simeq H^2(C)_{\text{tf}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F} \quad (5.1)$$

が示せる. 特に,

$$\sigma_{k_0} = \sigma, \quad \tau_{k_0} = \tau \quad (5.2)$$

である. また,

$$\rho = \sum_{k=1}^{k_0} k(\tau_{k-1} - \tau_k) \quad (5.3)$$

が示せる.

微分

$$\beta^{(k)} := d_k^{0,1} : E_k^{0,1} \rightarrow E_k^{k,2-k}$$

を考える. ($k=1$ のとき, $\beta^{(1)} : H^1(C_0) = E_1^{0,1} \rightarrow E_1^{1,1} = H^2(C_0) \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{P}/\mathcal{P}^2$ は Bockstein 写像^{*11}と一致するので, $\beta^{(k)}$ は Bockstein 写像の一般化である.) スペクトル系列の定義より, 完全列

$$0 \rightarrow E_{k+1}^{0,1} \rightarrow E_k^{0,1} \xrightarrow{\beta^{(k)}} E_k^{k,2-k} \rightarrow E_{k+1}^{k,2-k} \rightarrow 0$$

がある. 自然な同一視 $E_k^{i,2-i} = E_k^{0,2} \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{Q}^i$ ができるときに注意すると, 上の完全列より同型

$$\lambda_k : \det_{\mathcal{F}}(E_k^{0,1}) \otimes_{\mathcal{F}} \det_{\mathcal{F}}^{-1}(E_k^{0,2}) \simeq \det_{\mathcal{F}}(E_{k+1}^{0,1}) \otimes_{\mathcal{F}} \det_{\mathcal{F}}^{-1}(E_{k+1}^{0,2}) \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{Q}^{k(\tau_{k-1} - \tau_k)}$$

が誘導される. (5.1), (5.2), (5.3) に注意して, 写像 Reg を

$$\begin{aligned} \text{Reg} &:= \lambda_{k_0} \circ \cdots \circ \lambda_1 : \det_{\mathcal{F}}^{-1}(C_0) = \det_{\mathcal{F}}(E_1^{0,1}) \otimes_{\mathcal{F}} \det_{\mathcal{F}}^{-1}(E_1^{0,2}) \\ &\xrightarrow{\sim} \bigwedge_{\mathcal{F}}^{\sigma} (H^1(C) \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{F}} \bigwedge_{\mathcal{F}}^{\tau} (H^2(C)_{\text{tf}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F})^* \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{Q}^{\rho} \\ &\subset \bigwedge_{\mathcal{F}}^{\sigma} H^1(C_0) \otimes_{\mathcal{F}} \bigwedge_{\mathcal{F}}^{\tau} H^2(C_0)^* \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{Q}^{\rho} \end{aligned}$$

と定める.

注意 5.3. 構成より, 写像 Reg は単射である.

^{*10} スペクトル系列は普通 $E_r^{p,q}$ と表されるが, 本稿では p は素数, r は Mordell-Weil 群の階数を表しているのので, 記号を $E_k^{i,j}$ に変える.

^{*11} 複体の短完全列

$$0 \rightarrow C_0 \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{P}/\mathcal{P}^2 \rightarrow C \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{R}/\mathcal{P}^2 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

に付随する接続準同型

$$\delta : H^1(C_0) \rightarrow H^2(C_0) \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{P}/\mathcal{P}^2$$

を Bockstein 写像という.

6 定理 2.2 の証明

本節では、定理 2.2 の証明について解説する。III(E/K)[p^∞] が有限であることと、Heegner 点に対する岩澤主予想（予想 4.1）を仮定する。

Λ の I での局所化 $\mathcal{R} := \Lambda_I$ を考える。 $\mathcal{R}$ は離散付値環で、極大イデアルは $\mathcal{P} := I\mathcal{R}$ 、剰余体は $\mathbb{Q}_p$ である。 $\mathcal{P}^i/\mathcal{P}^{i+1} = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I^i/I^{i+1}$ に注意する。

Selmer 複体の I での局所化

$$C := \mathcal{R} \otimes_{\Lambda}^{\mathbf{L}} \widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, \mathbb{T})$$

を考える。これは $[\mathcal{R}^d \rightarrow \mathcal{R}^{d'}]$ の形の複体で代表され、§5 の結果が適用できる。また、このとき、 $\sigma = \tau = 1$ である。よって定理 5.1 より可換図式

$$\begin{array}{ccc} \det_{\mathcal{R}}^{-1}(C) & \xrightarrow[\simeq]{\varphi} & \mathcal{P}^\rho \cdot H^1(C) \otimes_{\mathcal{R}} H^2(C)^* \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{Der} \\ \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1}(C_0) & \xrightarrow{\text{Reg}} & H^1(C_0) \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^2(C_0)^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{P}^\rho/\mathcal{P}^{\rho+1}. \end{array} \quad (6.1)$$

を得る。

定理 2.2 の前半、すなわち、

$$\mathcal{L}_p^{\text{BD}} \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\nu) \quad (6.2)$$

を示すことは比較的やさしいので、手短に証明の概略を述べる。まず、 $\nu \leq \rho$ であることが示せる。岩澤主予想（予想 4.1）より、特に

$$\tilde{\mathfrak{z}}_\infty \in \mathcal{R} \otimes_{\Lambda} \det_{\Lambda}^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, \mathbb{T})) = \det_{\mathcal{R}}^{-1}(C)$$

が成り立つので、元 $\varphi(\tilde{\mathfrak{z}}_\infty) \in \mathcal{P}^\rho \cdot H^1(C) \otimes_{\mathcal{R}} H^2(C)^*$ が定まる。この元と $\mathcal{L}_p^{\text{BD}}$ を比較することで、それほど困難なく

$$\mathcal{L}_p^{\text{BD}} \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_\infty) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\rho) \quad (6.3)$$

が示せる。よって、 $\nu \leq \rho$ より、(6.2) が従う。

次に、定理 2.2 の後半、すなわち、

$$\exists u \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ s.t. } \mathcal{L}_p^{\text{BD},(\nu)} = u \cdot A_p^2 \cdot \frac{\#\text{III}(E/K)[p^\infty] \cdot \text{Tam}(E/K)}{\#E(K)_{\text{tors}}^2} \cdot R_p^{\text{BD}} \quad (6.4)$$

を示す。

ここで、 R_p^{BD} の定義を述べよう。 $V := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$ とおく。まず、Selmer 複体のよく知られている性質

$$\mathbb{Z}_p \otimes_{\Lambda}^{\mathbf{L}} \widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, \mathbb{T}) \simeq \widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, V) \quad (6.5)$$

より、

$$C_0 = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathcal{R}}^{\mathbf{L}} C \simeq \widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, V)$$

であることに注意する。仮定 $\#\mathrm{III}(E/K)[p^\infty] < \infty$ より、

$$H^1(C_0) \simeq \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E(K)$$

である。また、双対性より

$$H^2(C_0) \simeq H^1(C_0)^*$$

である。よって、同一視

$$\det_{\mathbb{Q}_p}^{-1}(C_0) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigwedge_{\mathbb{Z}}^r E(K)_{\mathrm{tf}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge_{\mathbb{Z}}^r E(K)_{\mathrm{tf}} \right) \quad (6.6)$$

ができる。

定義 6.1. 導来 p 進レギュレーター

$$R_p^{\mathrm{BD}} \in H^1(C_0) \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^2(C_0)^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{P}^\nu / \mathcal{P}^{\nu+1} = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} (E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} I^\nu / I^{\nu+1})$$

を次で定める^{*12} : $E(K)_{\mathrm{tf}}$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $\{x_1, \dots, x_r\}$ をとり、

$$R_p^{\mathrm{BD}} := \begin{cases} \mathrm{Reg}((x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) \otimes (x_1 \wedge \cdots \wedge x_r)) & \nu = \rho \text{ のとき,} \\ 0 & \nu < \rho \text{ のとき.} \end{cases}$$

(これは $\{x_1, \dots, x_r\}$ のとり方によらない.)

さて、(6.4) を示す。 $\nu < \rho$ のときは、(6.3) より $\mathcal{L}_p^{\mathrm{BD},(\nu)} = 0$ であり、 R_p^{BD} も定義より 0 なので、(6.4) は自明である。

よって、以後 $\nu = \rho$ とする。このとき、

$$\mathrm{Der}(\varphi(\widetilde{\mathfrak{J}}_\infty)) = \mathcal{L}_p^{\mathrm{BD},(\rho)}$$

であることが (ほぼ定義から) 示せる。よって、岩澤予想 (予想 4.1) より

$$\mathrm{Der}(\varphi(\det_{\Lambda}^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, \mathbb{T})))) = \mathbb{Z}_p \cdot \mathcal{L}_p^{\mathrm{BD},(\rho)}$$

が従う。これと可換図式 (6.1) 及び

$$\pi(\det_{\Lambda}^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, \mathbb{T}))) = \det_{\mathbb{Z}_p}^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, T))$$

であること ((6.5) より従う) に注意すると、

$$\mathrm{Reg}(\det_{\mathbb{Z}_p}^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, T))) = \mathbb{Z}_p \cdot \mathcal{L}_p^{\mathrm{BD},(\rho)}$$

が得られる。よって、(6.4) を示すためには、

$$\mathrm{Reg}(\det_{\mathbb{Z}_p}^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, T))) = \mathbb{Z}_p \cdot A_p^2 \cdot \frac{\#\mathrm{III}(E/K)[p^\infty] \cdot \mathrm{Tam}(E/K)}{\#E(K)_{\mathrm{tors}}^2} \cdot R_p^{\mathrm{BD}} \quad (6.7)$$

を示せば十分である。

(6.7) は計算により示される。次の事実が鍵となる。

^{*12} R_p^{BD} のこの定義の仕方は本質的に Nekovář [Nek06, §11] による。この定義と Bertolini-Darmon [BeDa96] によるものが一致することについては [San] に詳しく書く予定である。

補題 6.2 (Greenberg [Gre97]). $v \in S_p$ とする. $H^0(G_{K_v}, T_v^-) = 0$ なので, $H^1(G_{K_v}, T_v^+) \subset H^1(G_{K_v}, T)$ とみなせることに注意する. Kummer 写像 $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E(K_v) \rightarrow H^1(G_{K_v}, T)$ の像を $H_f^1(G_{K_v}, T)$ とする. このとき, $H^1(G_{K_v}, T_v^+) \subset H_f^1(G_{K_v}, T)$ であり,

$$\#(H_f^1(G_{K_v}, T)/H^1(G_{K_v}, T_v^+)) = \#\tilde{E}_v(\mathbb{F}_v)[p^\infty]$$

が成り立つ. ここで $\mathbb{F}_v$ は v の剰余体を表し, $\tilde{E}_v(\mathbb{F}_v)[p^\infty]$ は $\tilde{E}_v(\mathbb{F}_v)$ の p 部分を表す.

(6.7) の証明の概略を述べよう. まず, ガロア・コホモロジーの長完全列や双対性を用いると, 同一視 (6.6) の下で

$$\begin{aligned} \det_{\mathbb{Z}_p}^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, T)) \\ = \left(\prod_{v \in S_p} \# \left(\frac{H_f^1(G_{K_v}, T)}{H^1(G_{K_v}, T_v^+)} \right) \right) \cdot \left(\prod_{v \in S_p} \#\tilde{E}_v(\mathbb{F}_v) \right) \cdot \frac{\#\mathrm{III}(E/K)[p^\infty] \cdot \mathrm{Tam}(E/K)}{\#E(K)_{\mathrm{tors}}^2} \\ \times \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigwedge_{\mathbb{Z}}^r E(K)_{\mathrm{tf}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge_{\mathbb{Z}}^r E(K)_{\mathrm{tf}} \right) \end{aligned}$$

と計算できる. 次に, A_p の定義 ((2.1) 参照) から

$$\mathbb{Z}_p \cdot A_p = \mathbb{Z}_p \cdot \prod_{v \in S_p} \#\tilde{E}_v(\mathbb{F}_v)$$

が容易にわかる. よって, 補題 6.2 より

$$\det_{\mathbb{Z}_p}^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(K, T)) = A_p^2 \cdot \frac{\#\mathrm{III}(E/K)[p^\infty] \cdot \mathrm{Tam}(E/K)}{\#E(K)_{\mathrm{tors}}^2} \cdot \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigwedge_{\mathbb{Z}}^r E(K)_{\mathrm{tf}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge_{\mathbb{Z}}^r E(K)_{\mathrm{tf}} \right)$$

となる. これと R_p^{BD} の定義より (6.7) が従う. $\square$

7 定理 1.3 の証明

定理 1.3 は, 定理 2.2 と同様に Selmer 複体を用いて証明できる. (定理 1.3 の仮定 “ $R_p \neq 0$ ” は外せる.) その概略を述べよう.

§1 の記号を用いる. E は p で良い通常還元を持つとする. $T := T_p(E)$, $\mathbb{T} := T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$, $V := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$ とおく. $Q(\Lambda)$ を Λ の商体とする. E と $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ に対する岩澤主予想は次と同値である.

予想 7.1 (E と $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ に対する岩澤主予想). Selmer 複体 $\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$ のコホモロジーはねじれ Λ 加群であり,

$$\varphi : Q(\Lambda) \otimes_{\Lambda} \det_{\Lambda}^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q}, \mathbb{T})) \xrightarrow{\sim} Q(\Lambda)$$

を標準的な同型とすると,

$$\Lambda \cdot \mathcal{L}_p = \varphi(\det_{\Lambda}^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q}, \mathbb{T})))$$

が成り立つ.

注意 7.2. よく知られている岩澤主予想の定式化は

$$\Lambda \cdot \mathcal{L}_p = \text{char}_\Lambda(\text{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)^\vee)$$

である. ここで $\text{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)$ は通常の p^∞ -Selmer 群であり, $(-)^\vee$ は Pontryagin 双対を表す. これが予想 7.1 と同値であることは, $\tilde{H}_f^2(\mathbb{Q}, \mathbb{T}) \simeq (\varinjlim_n \tilde{H}_f^1(\mathbb{Q}_n, V/T))^\vee$ と $\text{Sel}_{p^\infty}(E/\mathbb{Q}_\infty)^\vee$ が擬同型であること ([Nek06, Propositions 9.6.6, 9.6.7.5] 参照) 及び

$$\varphi(\det_\Lambda^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q}, \mathbb{T}))) = \text{char}_\Lambda(\tilde{H}_f^2(\mathbb{Q}, \mathbb{T}))$$

であることから従う.

以下, $\#\text{III}(E/\mathbb{Q})[p^\infty] < \infty$ と岩澤主予想 (予想 7.1) を仮定する.

前節と同様に, Λ の I での局所化 $\mathcal{R} := \Lambda_I$ を考える. $\mathcal{R}$ の剰余体は $\mathbb{Q}_p$ と同型である. 複体

$$C := \mathcal{R} \otimes_\Lambda^{\mathbf{L}} \widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q}, \mathbb{T})$$

に対して定理 5.1 を適用すると, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} \det_{\mathcal{R}}^{-1}(C) & \xrightarrow[\simeq]{\varphi} & I^\rho \cdot \mathcal{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{Der} \\ \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1}(C_0) & \xrightarrow{\text{Reg}} & \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I^\rho / I^{\rho+1} \end{array}$$

が得られる. ここで, $C_0 := \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathcal{R}}^{\mathbf{L}} C \simeq \widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q}, V)$, $\rho := \text{length}_{\mathcal{R}}(H^2(C))$ である.

岩澤主予想 (予想 7.1) を仮定すると

$$\mathcal{L}_p \in \varphi(\det_{\mathcal{R}}^{-1}(C)) = I^\rho \cdot \mathcal{R} \quad (7.1)$$

がわかる. 一方, $r \leq \rho$ は容易に示すことができる^{*13}. よって,

$$\mathcal{L}_p \in I^r \cdot \mathcal{R}$$

が従う. これで定理 1.3 の前半が示された.

定理 1.3 の後半を示す前に, p 進レギュレーター R_p の定義を述べよう. (6.6) と同様に, 同一視

$$\det_{\mathbb{Q}_p}^{-1}(C_0) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigwedge_{\mathbb{Z}}^r E(\mathbb{Q})_{\text{tf}} \otimes_{\mathbb{Z}} \bigwedge_{\mathbb{Z}}^r E(\mathbb{Q})_{\text{tf}} \right)$$

ができることに注意する.

^{*13} 証明: $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathcal{R}}^{\mathbf{L}} C \simeq \widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q}, V)$ と双対性より

$$\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathcal{R}} H^2(C) \simeq \tilde{H}_f^2(\mathbb{Q}, V) \simeq \tilde{H}_f^1(\mathbb{Q}, V)^* \simeq \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q})^*$$

である (最後の同型で $\#\text{III}(E/\mathbb{Q})[p^\infty] < \infty$ を用いる). よって

$$r = \dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathcal{R}} H^2(C)) \leq \text{length}_{\mathcal{R}}(H^2(C)) = \rho$$

が従う.

定義 7.3. p 進レギュレーター

$$R_p \in \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I^r / I^{r+1}$$

を次で定める： $E(\mathbb{Q})_{\text{tf}}$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $\{x_1, \dots, x_r\}$ をとり、

$$R_p := \begin{cases} (-1)^r \text{Reg}((x_1 \wedge \cdots \wedge x_r) \otimes (x_1 \wedge \cdots \wedge x_r)) & r = \rho \text{ のとき,} \\ 0 & r < \rho \text{ のとき.} \end{cases}$$

(これは $\{x_1, \dots, x_r\}$ のとり方によらない.)

注意 7.4. p 進高さペアリング

$$\langle -, - \rangle_p : E(\mathbb{Q}) \times E(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I / I^2$$

は次で定義される：

$$\langle x, y \rangle_p := -\beta^{(1)}(x)(y).$$

ここで

$$\beta^{(1)} : \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q}) \simeq H^1(C_0) \rightarrow H^2(C_0) \otimes_{\mathbb{Z}_p} I / I^2 \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q}), \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} I / I^2)$$

は Bockstein 写像である (§5 参照). このとき、

$$R_p = \det(\langle x_i, x_j \rangle_p)_{1 \leq i, j \leq r}$$

が成り立つことが確かめられる. (p 進高さペアリングが非退化であるための必要十分条件は $r = \rho$ であることもわかる.)

定理 1.3 の後半, すなわち,

$$\exists u \in \mathbb{Z}_p^\times \text{ s.t. } \mathcal{L}_p^{(r)} = u \cdot \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \frac{\#\text{III}(E/\mathbb{Q})[p^\infty] \cdot \text{Tam}(E/\mathbb{Q})}{\#E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}^2} \cdot R_p \quad (7.2)$$

を示す. $r < \rho$ のときは, (7.1) より $\mathcal{L}_p^{(r)} = 0$ であり, R_p も定義より 0 なので, (7.2) は自明である. よって $r = \rho$ と仮定してよい. このとき, 定理 2.2 の証明と同様に, (7.2) は次を示すことに帰着される:

$$\text{Reg}(\det_{\mathbb{Z}_p}^{-1}(\widetilde{\mathbf{R}\Gamma}_f(\mathbb{Q}, T))) = \mathbb{Z}_p \cdot \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \frac{\#\text{III}(E/\mathbb{Q})[p^\infty] \cdot \text{Tam}(E/\mathbb{Q})}{\#E(\mathbb{Q})_{\text{tors}}^2} \cdot R_p$$

この証明は (6.7) と全く同様の計算でなされる. □

注意 7.5. 本稿では, 簡単のために定理 1.3 は E が p で良い通常還元を持つ場合にのみ述べたが, E が p で乗法的還元を持つ場合の類似の結果も, Selmer 複体を用いて以上と同様の方法により証明できる.

注意 7.6. [San23] では, Agboola-Castella [AgCa21] により定式化された Bertolini-Darmon-Prasanna の p 進 L 関数に対する p 進 BSD 予想に関しても, 定理 2.2 の類似を証明している. また, §1 で述べた「一般 Perrin-Riou 予想」の Heegner 点に対する類似に関しても同様の結果を得ている.

参考文献

- [AgCa21] A. Agboola, F. Castella, On anticyclotomic variants of the p -adic Birch and Swinnerton-Dyer conjecture, *J. Théor. Nombres Bordeaux* (Iwasawa 2019 special issue) **33** no.3.1 (2021) 629-658.
- [BeDa95] M. Bertolini, H. Darmon, Derived p -adic heights, *Amer. J. Math.* **117** no.6 (1995) 1517-1554.
- [BeDa96] M. Bertolini, H. Darmon, Heegner points on Mumford-Tate curves, *Invent. Math.* **126** no.3 (1996) 413-456.
- [BKS16] D. Burns, M. Kurihara, T. Sano, On zeta elements for $\mathbb{G}_m$, *Doc. Math.* **21** (2016) 555-626.
- [BKS] D. Burns, M. Kurihara, T. Sano, On derivatives of Kato's Euler system for elliptic curves, to appear in *J. Math. Soc. Japan*.
- [Gre97] R. Greenberg, Iwasawa theory for elliptic curves, in *Arithmetic theory of elliptic curves* (Cetraro, 1997), 51-144, *Lecture Notes in Math.*, 1716, Springer, Berlin.
- [How04] B. Howard, Derived p -adic heights and p -adic L -functions, *Amer. J. Math.* **126** (2004) 1315-1340.
- [Jon89] J. W. Jones, Iwasawa L -functions for multiplicative abelian varieties, *Duke Math. J.* **59** no.2 (1989) 399-420.
- [KaSa22] T. Kataoka, T. Sano, On Euler systems for motives and Heegner points, preprint, arXiv:2203.08342.
- [Kat04] K. Kato, p -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Astérisque*, (295):ix, 117-290, 2004. *Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques. III*.
- [MTT86] B. Mazur, J. Tate, J. Teitelbaum, On p -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, *Invent. math.* **84**(1) (1986) 1-48.
- [Nek06] J. Nekovář, Selmer complexes, *Astérisque* **310** (2006).
- [Per82] B. Perrin-Riou, Descente infinie et hauteur p -adique sur les courbes elliptiques à multiplication complexe, *Invent. Math.* **70** no.3 (1982) 369-398.
- [Per87] B. Perrin-Riou, Fonctions L p -adiques, théorie d'Iwasawa et points de Heegner, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **115** no.4 (1987) 399-456.
- [Per93] B. Perrin-Riou, Fonctions L p -adiques d'une courbe elliptique et points rationnels, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **43** no.4 (1993) 945-995.
- [San23] T. Sano, Derived Bockstein regulators and anticyclotomic p -adic Birch and Swinnerton-Dyer conjectures, preprint. arXiv:2308.08875
- [San] T. Sano, Bockstein maps and derived p -adic heights, in preparation.
- [Sch85] P. Schneider, p -adic height pairings, II, *Invent. Math.* **79** no.2 (1985) 329-374.

- [Ser02] J.-P. Serre, *Galois Cohomology*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2002.