

Barbour path of operator monotone functions

木更津工業高等専門学校 和田 州平 (Shuhei Wada)

Kisarazu National College of Technology

富山大学・理学部 久保 文夫 (Fumio Kubo)

Faculty of Science, University of Toyama

富山高等専門学校 中村 登 (Noboru Nakamura)

Toyama National College of Technology

入善高等学校 大野 晃司 (Koji Ohno)

Toyama prefectual Nyuzen highschool

1 背景と目的

冪関数の族 $\{t^x : 0 \leq x \leq 1\}$ は正規作用素単調関数の族 (久保-安藤 [4] の意味での作用素平均の族) として良く知られておりこの関数族の「path としての幾何学的性質」も詳しく調べられている [3, 2]. 関数 t^x を線型分数関数

$$\frac{\alpha x + \beta(1-x)}{x + \gamma(1-x)} \quad (1.1)$$

で補間すると

$$L_t(x) = \frac{tx + \sqrt{t}(1-x)}{x + \sqrt{t}(1-x)} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (1.2)$$

となる ($L_t(0) = t^0, L_t(1/2) = t^{1/2}, L_t(1) = t^1$ は容易に確認できる). $\{L_x\}$ は $\{t^x\}$ と同じく関数 1 から関数 t に至る, 「作用素平均の作る path」である.

筆者らは, 作用素平均の作る path(1.1) について考察してきた. 本稿ではこれら path の持つ基本的な性質について述べる. 詳しくは, path

$$\frac{tx + f(t)(1-x)}{x + f(t)(1-x)} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (1.3)$$

が作用素平均のつくる path となるための条件, およびその凸性について議論する.

2 Barbour path の基本的性質

上記の path(1.1) を Barbour path と呼ぶことにする. ここで α, β, γ は開区間 $(0, \infty)$ 上の正数値連続関数とする. Barbour path の命名は J.M.Barbour

[1] が楽器の設計に関連して、関数 (1.2) を用いたことに因んでいる。Barbour path はその始点、中間点、終点が決まれば一意に定まる。

命題 2.1. 正の連続関数 $f(t), g(t), h(t)$ が与えられて、有限個の点を除き $f(t) \neq h(t)$ のとき、(始点, 中間点, 終点) $= (f(t), g(t), h(t))$ となる Barbour path が存在すれば、それは一意である。

Barbour path $\varphi_t(x) = \frac{\alpha x + \beta(1-x)}{x + \gamma(1-x)}$ の他の性質をいくつか挙げておこう。

(1) $(\varphi_t(0), \varphi_t(1/2), \varphi_t(1)) = (1, 1, t)$ あるいは $(\varphi_t(0), \varphi_t(1/2), \varphi_t(1)) = (1, t, t)$ となる Barbour path は存在しない。

(2) Barbour path $\varphi_t(x)$ が存在して、 $(\varphi_t(0), \varphi_t(1/2), \varphi_t(1))$ が作用素単調の組であっても $\varphi_t(x)$ は作用素平均の path であるとは限らない。例えば $(\varphi_t(0), \varphi_t(1/2), \varphi_t(1)) = (1, t, \sqrt{t})$ となる Barbour path $\varphi_t(x)$ は作用素平均の path ではない ($\varphi_t(1/3)$ は monotone でない)。

(3) Barbour path の分子分母に現れる関数 α, β, γ が作用素平均であっても、Barbour path 全体として作用素平均のクラスに入っていない例もある。例えば $x = \frac{1}{2}$ のとき、

$$\frac{t^{\frac{1}{4}}x + \sqrt{t}(1-x)}{x + \sqrt{t}(1-x)}$$

は monotone でない。

作用素平均 f, g, h に対して f, g, h が、それぞれ始点、中間点、終点となっている Barbour path を、 $[f, g, h]$ と書くことにする。

3 作用素単調性を保存する変換

以後、

$$OM_+ := \{f | f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), f \text{ は作用素単調}\}$$

$$OM_+^1 := \{f | f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), f(1) = 1, f \text{ は作用素単調}\}$$

とする。 OM_+ の要素 f に対して

$$\hat{f} = \frac{t + f}{1 + f}$$

と定義する。対応 $f \mapsto \hat{f}$ は OM_+ から OM_+^1 への 1 対 1 の変換であるが onto ではない。実際、

$$\widehat{OM_+} := \{\hat{f} | f \in OM_+\}$$

とすると, $\widehat{OM_+} \not\ni 1, t$ である. この変換 $f \mapsto \hat{f}$ の逆変換は容易に計算できる. $\widehat{OM_+}$ の要素 g について

$$\check{g}(t) = \frac{t-g}{g-1}$$

とすれば, これが求める逆変換である. さらに一般に $OM_+^1 \setminus \{1, t\}$ の要素 g に対して $\check{g}$ が定義できる. ここで $\check{g} = \frac{t-1}{g(t)-1} - 1$ に注意すれば $\check{g}$ の作用素単調性は $\frac{t-1}{g(t)-1}$ の作用素単調性と同値であることがわかる. $\frac{t-1}{g(t)-1}$ の作用素単調性はよく知られている (see [5]) ので以下が成り立つ.

命題 3.1. (i) $OM_+^1 \setminus \{1, t\} = \widehat{OM_+}$

(ii) $\{f \in OM_+^1 \mid ! \leq f \leq \nabla\} = \widehat{OM_+^1}$

上の命題から, $OM_+^1 \setminus \{1, t\}$ の要素 g に対して $\check{g} \in OM_+$ が定まり,

$$\varphi_t(x) = \frac{tx + \check{g}(t)(1-x)}{x + \check{g}(t)(1-x)}$$

とすれば $\varphi_t(x)$ は OM_+^1 上の Barbour path $[1, g, t]$ である.

命題 3.2. $OM_+^1 \setminus \{1, t\}$ に属する関数 g に対して, Barbour path $[1, g, t]$ が OM_+^1 上に唯一つ存在する.

自明でない作用素平均 σ に対して得られた Barbour path $[1, \sigma, t]$ の各点を用いて, 関数 f と g の平均をとると以下の結果となる.

定理 1. 相異なる正規作用素単調関数 f, g と自明でない作用素平均 σ に対して作用素平均からなる Barbour path $[f, f\sigma g, g]$ が唯一つ存在する.

Barbour path $[1, f, t]$ の各点は作用素平均であるから, 変換 $\hat{\cdot}$ で写すことができる. $\hat{1} = \frac{t+1}{2}$, $\hat{t} = \frac{2t}{1+t}$ だから $[1, f(t), t]$ を $\hat{\cdot}$ で写した先の Barbour path は $[\nabla, \hat{f}, !]$ となる.

命題 3.3. $OM_+^1 \setminus \{1, t\}$ に属する関数 f に対して, OM_+^1 上の Barbour path $[\nabla, \hat{f}, !]$ が唯一つ存在する.

系 3.4. Barbour path $[\nabla, \#, !]$ が OM_+^1 上に唯一つ存在する.

4 Barbour path の凸性

Barbour path の凸性について考える.

$$\varphi(x) := \frac{fx + g(1-x)}{x + h(1-x)}$$

とおく. φ が凸であることと, $\frac{d^2\varphi}{dx^2} \geq 0$ は同値なので 2 回微分してみる.

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{2(1-h)^2}{(x+h(1-x))^2} \left(-\frac{f-g}{1-h} + \varphi \right)$$

なので,

$$\varphi \text{ が凸である} \iff \varphi \geq \frac{f-g}{1-h}$$

となる.

上の議論において $\widehat{OM_+^1} = \{f \in OM_+^1 \mid ! \leq f \leq \nabla\}$ に属する関数 f に対して,

$$\varphi(x) = \frac{tx + \check{f}(1-x)}{x + \check{f}(1-x)}$$

とすると, φ が凸であることと以下が同値となる

$$\varphi \geq \frac{t-\check{f}}{1-\check{f}}. \quad (4.1)$$

ここで分母が 0 の場合に φ は凸であることは明らか.

この式 (4.1) について, 詳しく見て行こう. まず, $0 < t < 1$ の場合について, 3 通りに分けて考える.

(1) $0 < t < 1$ のとき

(1-1) $0 < t < 1$ かつ $1 < \check{f}(t)$ のとき

$$\check{f}(\check{f}-1) < \check{f}(\check{f}-t)$$

$$(\check{f}-1)(t-\check{f})x + \check{f}(\check{f}-1) < (\check{f}-1)(t-\check{f})x + \check{f}(\check{f}-t)$$

$$[1, f, t] < \frac{t-\check{f}}{1-\check{f}}$$

となり, (4.1) は成り立たない

(1-2) $0 < t < 1$ かつ $t < \check{f}(t) < 1$ のときは $\frac{t-\check{f}}{1-\check{f}}$ が負になるので明らかに (4.1) が成立.

(1-3) $0 < t < 1$ かつ $\check{f}(t) < t$ のとき

$$\check{f}(1-\check{f}) \geq \check{f}(t-\check{f})$$

$$(1-\check{f})(t-\check{f})x + \check{f}(1-\check{f}) \geq (1-\check{f})(t-\check{f})x + \check{f}(t-\check{f})$$

$$[1, f, t] \geq \frac{t-\check{f}}{1-\check{f}}$$

したがって (4.1) が成立する.

次に $t > 1$ の場合について, 3 通りに分けて考える.

(2) $1 < t$ のとき

(2-1) $1 < t$ かつ $t < \check{f}(t)$ のとき

$$\check{f}(\check{f}-1) \geq \check{f}(\check{f}-t)$$

$$(\check{f} - 1)(t - \check{f})x + \check{f}(\check{f} - 1) \geq (\check{f} - 1)(t - \check{f})x + \check{f}(\check{f} - t)$$

$$[1, f, t] \geq \frac{t - \check{f}}{1 - \check{f}}$$

となり, (4.1) は成り立つ

(2-2) $1 < t$ かつ $t > \check{f}(t) > 1$ のときは $\frac{t - \check{f}}{1 - \check{f}}$ が負になるので明らかに (4.1) が成立.

(2-3) $1 < t$ かつ $\check{f}(t) < 1$ のとき

$$\check{f}(1 - \check{f}) < \check{f}(t - \check{f})$$

$$(1 - \check{f})(t - \check{f})x + \check{f}(1 - \check{f}) < (1 - \check{f})(t - \check{f})x + \check{f}(t - \check{f})$$

$$[1, f, t] < \frac{t - \check{f}}{1 - \check{f}}$$

したがって (4.1) は成り立たない.

以上の議論から以下が成り立つ.

$$[1, f, t] \text{ が凸} \iff \check{f}(1) = 1.$$

さらに命題 3.1 を用いて以下がわかる.

定理 2. $[1, f, t] \text{ が凸} \iff ! (t) \leq f(t) \leq \nabla(t)$

5 log 凸性

log 凸性について考える. $f \in OM_+^1 \setminus \{1, t\}$ かつ $!(t) \leq f(t) \leq \nabla(t)$ を仮定する.

$\Phi_t(x) := \log[1, f, t]$ とおく.

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{(1 - \check{f})^2}{\{tx + \check{f}(1 - x)\}^2} \left([1, f, t]^2 - \frac{(t - \check{f})^2}{(1 - \check{f})^2} \right)$$

となるから,

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} \geq 0 \iff [1, f, t] \geq \left| \frac{t - \check{f}}{1 - \check{f}} \right| = \left(\frac{t+1}{2} \right) \left(\frac{f-!}{\nabla-f} \right).$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi}{dx^2} \geq 0 &\iff [1, f, t] \geq \nabla \left(\frac{f-!}{\nabla-f} \right) \\ &\iff tx + \check{f}(1-x) - \nabla \left(\frac{f-!}{\nabla-f} \right) (x + \check{f}(1-x)) \geq 0 \end{aligned}$$

となる. 直前の不等式の左辺を $g(x)$ とおくと g の最小値は $g(0)$ か $g(1)$ だから,

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} \geq 0 \iff \min\{g(0), g(1)\} \geq 0$$

まず, $g(1) \geq 0$ を整理すると

$$\left(\frac{\nabla+1}{\nabla+t}\right)t \geq f$$

で左辺は $\hat{!}$ である. つぎに, $g(0) \geq 0$ を整理すると

$$\left(\frac{\nabla+t}{\nabla+1}\right) \geq f$$

で左辺は $\hat{\nabla}$ である.

定理 3. $[1, f, t]$ が $\log$ 凸 $\iff ! (t) \leq f(t) \leq \min\{\hat{!}(t), \hat{\nabla}(t)\}$

6 Barbour 変換

OM_+ 上の変換 $f \mapsto \hat{f} = \frac{!+f}{1+f}$ について再考する. 既に見たように, 以下の関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} OM_+^1 \setminus \{1\} &= \widehat{OM_+ \cup \{0\}} \\ \{f \in OM_+^1 \mid ! \leq f \leq \nabla\} &= \widehat{OM_+^1} \end{aligned}$$

ここでは, この変換 $f \mapsto \hat{f}$ を 2 回繰り返した変換 $f \mapsto \hat{\hat{f}}$ について考える. $OM_+ \cup \{0\}$ の要素 f について

$$\hat{\hat{f}} = \nabla \left(1 + \frac{! - \nabla}{\nabla + f} \right)$$

と書ける. 逆に $\hat{\hat{f}}$ を使って f を書き下すと

$$f = \nabla \left(-1 + \frac{\nabla - !}{\nabla - \hat{\hat{f}}} \right)$$

となる. したがって, 以下がわかる.

命題 6.1. $OM_+ \cup \{0\}$ の要素 f, g について以下は同値.

$$(1) f \leq g$$

$$(2) \hat{\hat{f}} \leq \hat{\hat{g}}$$

系 6.2.

$$\{f \in OM_+^1 \mid f \leq !\} = \{!\}.$$

系 6.3.

$$\{f \in OM_+^1 \mid ! \leq f \leq \hat{\nabla}, \hat{!}\} = \{\hat{g} \mid g \in OM_+ \cup \{0\}, g \leq 1, t\}.$$

上の系から定理 3 で現れた集合 $\{f \in OM_+^1 \mid ! \leq f \leq \hat{\nabla}, \hat{!}\}$ は明らかに空でないことがわかる. 例えば

$$! \leq \left(\frac{\hat{!}}{2}\right) \leq \hat{\nabla}, \hat{!}$$

となる.

謝辞 本研究, 特に主定理の別証明および log 凸性を満たす関数に関して刺激的な助言をくださった, 東北大学の日合文雄 教授に感謝します.

参考文献

- [1] J. M. BARBOUR, *A geometrical approximation to the roots of numbers*, Amer. Math. Monthly, **64** (1957), 1-9.
- [2] R. BHATIA AND J. HOLBROOK, *Riemannian geometry and matrix geometric means*, Linear Algebra Appl. **413** (2006), no. 2-3, 594-618.
- [3] G. CORACH, H. PORTA AND L. RECHT, *Geodesics and operator means in the space of positive operators*, Internat. J. Math. **4** (1993), no. 2, 193-202.
- [4] F. KUBO AND T. ANDO, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. **246** (1979), no. 3, 205-224.
- [5] M. UCHIYAMA, *Majorization and some operator monotone functions*, Linear Algebra Appl. **432** (2010) 1867-1872