

C^* 環に作用するある種の作用素が生成する

バナハ環の半単純性

東北大 教養 岡安隆照

フォン・ノイマン環 M の正規元 a, b と, それらのスペクトル $\sigma_p(a), \sigma_p(b)$ の上で定義された複素数値連続関数 f_j, g_j ($j=1, \dots, n$) に対し, M 上の作用素

$$\tau: x \longrightarrow \sum_{j=1}^n f_j(a) x g_j(b)$$

を考える. そしてこれが M の強閉包部分 C^* 環 A を不変にしているとする. このとき τ は A に制限して得られる A 上の作用素 $\tau|_A$ は, A の恒等作用素 1_A と共にどんなバナハ環を生成するのであるか. M が semi-finite ならばこれが半単純になることを示すのがこの講演の目的である.

1. 先ず次の補題から出発する:

補題 (cf. [1, Remark, p. 165], [2, Lem. 2.3.10], [3: Th. 10])

$$\sigma_{p, B(M)}(\tau) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(\lambda) g_j(\mu) : \begin{matrix} \lambda \in \sigma_{p, M_2}(c_2) \\ \mu \in \sigma_{p, M_2}(c_1) \end{matrix} \right\},$$

ここで $\mathcal{C}$ は M に属する 1 の有限中心分割 (即ち, $\mathbb{C}1$ に直交し, 和が 1 であるような M の中心射影キ 0 の有限集合) の集合である.

$\leq$ は容易である。いま右辺から $\forall \varepsilon > 0$ となる ε を与え、 $\delta_p(a)$ の有限ボレル分割 Γ , $\delta_p(b)$ の有限ボレル分割 Δ が

$$\lambda \in \gamma \in \Gamma \rightarrow \| (f_j(a) - f_j(\lambda)) e_a(\gamma) \| < \varepsilon, \text{ かつ}$$

$$\mu \in \delta \in \Delta \rightarrow \| e_b(\delta) (g_j(b) - g_j(\mu)) \| < \varepsilon,$$

$$j = 1, \dots, n$$

を満足して存在する。ここから e_a, e_b はそれぞれ a, b のスペクトル測度である。この Γ, Δ に対して $C \in \mathcal{C}$

$$e \in C \rightarrow e \leq e_a(\gamma) \text{ かつ } e e_a(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma, \text{ かつ } e \leq e_b(\delta) \text{ かつ } e e_b(\delta) = 0 \quad \forall \delta \in \Delta$$

となるように選ぶことができる。このとき、ある $e \in C$ に対して

$$v = \sum_{j=1}^n f_j(\lambda) g_j(\mu), \quad \begin{matrix} \lambda \in \delta_{p_{M_e}(a)} \\ \mu \in \delta_{p_{M_e}(b)} \end{matrix}$$

である一方、 $\lambda \in \gamma \in \Gamma$ かつ $\gamma \geq \mu \in \delta \in \Delta$ かつ $\delta \geq e$ に対して

$0 \neq e \leq e_a(\gamma) e_b(\delta)$ である。従って M の partial isometry

$v \neq 0$ であり、 $v v^* \leq e_a(\gamma), v^* v \leq e_b(\delta)$ を満たすものがある。

この v に対して

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n f_j(\lambda) v g_j(\mu) - v \right\| &\leq \sum_{j=1}^n (\| (f_j(a) - f_j(\lambda)) e_a(\gamma) \| \| g_j(b) \| + \| f_j(\lambda) \| \| e_b(\delta) \| \| g_j(b) - g_j(\mu) \|) \\ &\leq 2n (\max_j |f_j(\lambda)| + \max_j \| g_j(b) \|) \end{aligned}$$

である。右辺は n が大きくなるにつれて小さくなるから $v \in \delta_{p_{B(M)}}(\tau)$ である。

2. B は $\tau|_A$ と ι_A が生成したバナハ環である。 $\tau|_A$ は B

が正則ならば τ は $B(M)$ が正則で τ^{-1} は M の有界部分の強連続で

あることがわかる: $\sigma = (\tau|_A)^{-1} \in \mathcal{B}$ であるから, 複素数係数の多項式の列 $\{p_\nu\}$ 2 $\sigma_\nu = p_\nu(\tau)|_A \xrightarrow{\|\cdot\|} \sigma$ を満たすものが存在する. いま有界部分 $\{x_\alpha\} \subset A$ が 0 に強収束していることを ω 状態の ψ と ν 状態のベクトル ξ に対して

$$\|\sigma(x_\alpha)\xi\| \leq \|(\sigma - \sigma_\nu)(x_\alpha)\xi\| + \|\sigma_\nu(x_\alpha)\xi\| \leq \|\sigma - \sigma_\nu\| \|\xi\| \sup \|x_\alpha\| + \|\sigma_\nu(x_\alpha)\xi\|$$

であるから, $\lim_{\alpha} \|\sigma(x_\alpha)\xi\| = 0$ である. 換言すれば $\sigma(x_\alpha) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.

よって σ は A の有界部分 2 M の強位相に関して連続であることがわかった. そうすると Kaplansky の補題定理を利用して σ を M 上に拡張できる. 任意の $x \in M$ に対して有界部分 $\{x_\alpha\} \subset A$ 2 x に強収束するものがあつたが, $\{\sigma(x_\alpha)\}$ が有界かつ強 Cauchy 列になつてくるから, M における σ の強極限を $\tilde{\sigma}(x)$ とおけば $\tilde{\sigma}$ は σ の拡張である. のみならず, $\sigma|_A = \tau|_A \sigma = \tau_A$ から $\tilde{\sigma}\tau = \tau\tilde{\sigma} = \tau$ である. 更に $p_\nu(\tau)$ が $\tilde{\sigma}$ に ν に強収束することより, $\tilde{\sigma}$ は M の有界部分 2 強連続になる.

3. $\varphi \in M_+$ 上の faithful normal semi-finite trace, $m \in \mathcal{M}$ の定義イデアール, $u \in m$ の平方根, $\gamma \in u$ から $\mathcal{H} = L^2(M, \varphi)$ の injection, $\pi(a), \pi'(a) (a \in M)$ を

$$\pi(a)\gamma(x) = \gamma(ax), \quad \pi'(a)\gamma(x) = \gamma(xa), \quad x \in m$$

によって定まる $\mathcal{H}$ 上の作用素とする. $\sum_{j=1}^n \pi(f_j(a))\pi'(g_j(a))$ が $\mathcal{H}$ 上の正規作用素であることは証明があるが, 1-2節の議論から

更に

$$\begin{aligned}
 \delta_{p_B(\tau|_A)} &\supseteq \delta_{p_B(M)}(\tau) \\
 &= \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{\mu \in C} \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(\lambda) g_j(\mu) : \begin{array}{l} \lambda \in \delta_{p_{M_C}(a_2)} \\ \mu \in \delta_{p_{M_C}(b_2)} \end{array} \right\} \\
 &= \bigcap_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{\mu \in C} \left\{ \sum_{j=1}^n f_j(\lambda) g_j(\mu) : \begin{array}{l} \lambda \in \delta_{p(\pi(a_1)\pi(a_2))} \\ \mu \in \delta_{p(\pi(b_1)\pi(b_2))} \end{array} \right\} \\
 &\supseteq \delta_p \left(\sum_{j=1}^n \pi(f_j(a_1)) \pi(g_j(b_1)) \right)
 \end{aligned}$$

2. 有る. 従って

$$\|\tau|_A\| \geq \|\tau|_A\|_{pp} \geq \left\| \sum_{j=1}^n \pi(f_j(a_1)) \pi(g_j(b_1)) \right\|_{pp} = \left\| \sum_{j=1}^n \pi(f_j(a_1)) \pi(g_j(b_1)) \right\|$$

2. 有る. 左辺の $\|\cdot\|$ の意味を $\Psi(\tau|_A)$ と書くことにする. さ

2 $\sigma \in B$, $\|\sigma\|_{pp} = 0$ としよう. すると複素数係数の多項式の

列 $\{p_\nu\}$ があって $\sigma_\nu = p_\nu(\tau)|_A \xrightarrow{\|\cdot\|} \sigma$ を満たす. よって $\{\sigma_\nu\}$ は

Cauchy 列である. σ_ν は上の $\tau|_A$ と同じ形をきくから上の

不等式を満たす. 従って $\{\Psi(\sigma_\nu)\}$ も Cauchy 列である. よって

2 B 上の有る正規作用素 $\tilde{\Psi}(\sigma)$ に $\|\cdot\|$ に収束する. このとき

2 σ の連続性により

$$\|\sigma\| \geq \|\sigma\|_{pp} \geq \|\tilde{\Psi}(\sigma)\|$$

が成り立っている. 故に $\tilde{\Psi}(\sigma) = 0$ である. この2. 節節に

おける議論と同様に $\{p_\nu(\tau)\}$ は $\tilde{\sigma}|_A = \sigma$ かつ $\tilde{\sigma} \in B(M)$ により

$\|\cdot\|$ に収束することになる. これは M の有界部分 π 連続である.

ある. 任意の $x \in \mathcal{M}$ を固定しよう. $p_\nu(\tau)(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} \tilde{\sigma}(x)$ かつ

$\eta(p_\nu(\tau)(x)) = \Psi(\sigma_\nu)\zeta(x) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$ であるから, φ が σ 弱下半連続

であることは明らか

$$0 \leq \varphi(\tilde{\sigma}(x)^* \tilde{\sigma}(x)) \leq \liminf_v \varphi(p_v(\tau)(x)^* p_v(\tau)(x)) = \liminf_v \|\varphi(p_v(\tau)(x))\|^2 = 0.$$

故に $\tilde{\sigma}(x) \in \mathcal{N}$ であるのみならず $\varphi(\tilde{\sigma}(x)) = 0$, 従って又 $\tilde{\sigma}(x)$

$= 0$ である. $\mathcal{N}$ が M の σ -弱稠密であることから $\tilde{\sigma} = 0$ である.

従って特に $\tilde{\sigma} = 0$ である. よって目的の定理が示された:

定理 B は半単純である.

4. C^* 環 A の有界微分や弱内部位と同型写像は上に述べた $\pi|_A$ の形をしている. このことから $\pi|_A$ をとりあげた理由である. ここでは応用としよう:

系1 C^* 環 A の $*$ 微分 δ が $\mathcal{L}_A$ と共に生成するバナハ環は半単純である.

系2 C^* 環 A の正規位と同型写像 α (即ち $\alpha'\alpha = \alpha\alpha'$ を満たす自同型写像, ここに $\alpha'(x^*) = \alpha^{-1}(x)^*$, $x \in A$ [4]) が十分多くの A の極大右イデアルを変にすれば, それが $\mathcal{L}_A$ と共に生成するバナハ環は半単純である.

証明は省く.

なお以上述べた議論は Størmer [5] と深い関係をもっている.

文 献

1. D. Buchholz and J.E. Roberts, Comm. Math. Phys. 49 (1976), 161-177.

2. A. Connes, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 6 (1973), 133-252.
3. G. Lusner and M. Rosenblum, Proc. AMS 10 (1959), 32-41.
4. T. Okazaki, Tôhoku Math. J. 26 (1974), 541-554.
5. E. Størmer, On spectral subspaces of automorphisms,
To appear.