

Diophantine predicate の recursive degree について

東京教育大 広瀬 健

§ 0. ヒルベルトの 10 問題 — 任意に与えられた不定方程式が、整数解をもつか否かを決定することは — は, H. Davis, H. Putnam, J. Robinson, R. M. Robinson, A. Марков あるいは最近 Ю. В. Матиясевич によって、この多岐にわたる結果が得られたことが、最終的に解決されたことである。

Dr. Ю. В. Матиясевич はこの手紙に示す通り、2 番目の場合、即ち不定方程式が得られたことであるが、一般の場合、不定方程式が得られるかどうかは、多くの人の予想するところである。

これは得られた結果は、"可決性" の命題を証明することと等しいことに注意し、このことである。すなわち、"全ての recursively enumerable predicate は diophantine predicate である" である命題を証明するのには、Davis, Putnam, Robinson によって、次のようなことが示された ([1], [2], [3]) 。

Th. I $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ は任意の recursively enumerable predicate であるとき、次のような diophantine predicate $D(k, x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ が存在する。

Th. II predicates $z = \sum_{i=1}^j \text{Rem}(a, 1+ig)$, $0 = \sum_{i=1}^j \text{Rem}(a-i, 1+ig)$

Th. II 设 $a \geq 3$, a predicates $(\exists x, y, z)_{b, b, a}^a [(1 + cz)x = y]$,
 $(\exists x, z)_{b, a}^a [(1 + cz)x = b - z]$, $(\exists x, y, z)_{b, a, a}^a [(1 + cz)x = b - y]$

Th. IV $\exists$ a recursively enumerable predicate $R(x_1, \dots, x_n)$

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) \iff (E z_1)(E z_2) \dots (E z_m) [F(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)] = 0$$

12. 令 $\varphi(x) = x = 1 \vee x = 2$, 令 Σ a recursively enumerable predicate s.t. diophantine $\exists x_1 \dots \exists x_n \varphi(x_1) \wedge \dots \wedge \varphi(x_n) = \varphi(1) \vee \dots \vee \varphi(2)$, " $\Sigma \geq \Delta_1$

2. 数金言しと(万)”. Diophantine predicate is, 解3は12 recursively

§2. Kleene S は σ , τ と μ の recursion theory を構成して

Formal system の Arithmetization に p^x の form の Gödel number

を用いて S は μ -operator の本質的役割

を担いでいる。 T -predicate 或 S -predicate を

と μ は diophantine predicate に用いて S -predicate を

と μ は μ -operator の本質的役割

を担いでいる。 T -predicate 或 S -predicate を

と μ は diophantine predicate に用いて S -predicate を

と μ は μ -operator の本質的役割

を担いでいる。 T -predicate 或 S -predicate を

と μ は μ -operator の本質的役割

を担いでいる。 T -predicate 或 S -predicate を

と μ は μ -operator の本質的役割

$$\ulcorner a_1 a_2 \dots a_n \urcorner = J_{n+1}(a_1 a_2 \dots a_n 0) \quad \text{ただし, } J_{n+1} \text{ は } \sigma \text{ と } \tau \text{ を}$$

に定義した $(n+1)$ 変数の 2^n 次多項式である。

$$\begin{cases} J_1(x) = x \\ J_{n+1}(x_1 x_2 \dots x_{n+1}) = \frac{1}{2}(x_1 + J_n(x_2 x_3 \dots x_{n+1}))(x_1 + J_n(x_2 x_3 \dots x_{n+1})) + x_1 \end{cases}$$

と μ は μ -operator の本質的役割

$$\ulcorner a_1 \dots a_n \urcorner_i = \begin{cases} a_i & \text{if } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$le(\ulcorner a_1 \dots a_n \urcorner) = n$$

とある。

$\lambda a [a]_i$ は diophantine.

ただし, $\lambda a_i [a]_i$, $\lambda a_k(a)$ は同じではない。

(function of diophantine である, λ a representing predicate of diophantine である) $\Rightarrow$

また, Kleene [5] には $\lambda a_i [a]_i$ は λ 同様は recursive function を定義する formal system を作る。 (上述の理由により, λ は ~~recursive~~ system ではない) $\Rightarrow$ recursion theory は Kleene の λ と全く同様であるが ~~system~~ や定義が異なる。

Constants: $0, =, ', \dots$

variables: $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$

function letters: $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$

numerals: $0, 0', 0'', \dots$

terms: (i) variable は term である, (ii) numeral は term である, (iii) t は term ならば, t' は term である, (iv) t_1 は term ならば, f は function letter ならば, $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ は term である。

equations, system of equations は同じである Kleene と同様。

inference rules は, substitution, replacement 以外に λ の λ と λ と

3: addition, proper subtraction, multiplication は λ realization.

realization である, ~~numeral~~ n は numeral である, n' は term である $\Rightarrow$ n' は n' に replace する rule である。

次は、 S^* の定義の途中に与えられた bounded V -quantifier は、"若し"
 a $t \in \alpha$ の primitive recursive procedure は δ 、 z には α の value z'
 を与える。 (b) は δ の function t 、recursion z 同様に
 t の α は replace z' である。

$$g(x_1 \dots x_n, b) = 1 \div (1 \div (\tau(\psi(x_1 \dots x_n, q_2), q_2) \div b))$$

∴ の操作により, (C) に属する function を recursion を用いる.

$$f(x) = \mu g [-\delta^*(e, x, y) = 0]$$

$$T(0, y) = y$$

∴ L 得到了 A 的逆函数 A^{-1} 的表达式, recursion 1 中, L 表达式 A^{-1}

function に 対応し、以下のような密度を π_j :

z is representing function z is z b, c is $\frac{1}{2}$ $D(d, [e]_a)$

$D(d, \{a_j\}_i)$ is $\mathbb{Z}$ or $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $T_j(w)$ is a $\mathbb{Z}$ or $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3

が成立する。

§4. 前節で定義した台を用いて、述語 $S^{(n)}(e, x, y)$ を定義する $e \in M$ 、 e の β の形である。

台に於いて、(4) を含意する function f の function letter に対応する α を用い、(4) が成立するときは $f = 0$ とする inference rule C_n を作り、 $S^{(n)}$ を定義する一連の predicate の中の inference rule の部分に、 α を加える。このようにして定義した述語を $S^{(n)}$ と記す。尚、 C_n には (4) を記述する部分があり、この部分は Δ -predicate が含まれる。しかし、定義の妨げは、(4) の quantifier 部分に Δ 部分は、 Δ -predicate であり、 Δ の否定も Δ -predicate である。よって、台に $S^{(n)}$ の定義から次の定理が得られる：

Th. II ある自然数 e が存在して、任意の x に対して

$$\exists y \exists y' S^{(n)}(e, x, y) \iff \exists y S^{(0(e))}(e, x, y)$$

したがって、~~Th. V と Th. II から、~~ e は、定義から明らかである。

Th. III $\exists y S^*(e, x, y) \iff \exists u \exists y S^{(n)}(e, x, y)$

したがって、~~Th. V, Th. II, Th. III から~~ e の定理が得られる。

Th. VII R は a recursively enumerable predicate $\exists y R(x, y)$ に対して、

ある自然数 e が存在して、

$$\exists y R(x, y) \iff \exists y S^{(0(e))}(e, x, y)$$

が成立する。

上の Theorem から Davis は Δ を Δ と記すことができる (Th. I)

Corollary 2.1 を得ることはできる。また、 $S^{(n)}$ の定義と
 課程 1 節の如く、Th II, Th IV の Davis, Putnam, Robinson の結果
 も得られる。

§ 5. $S^{(n)}$ は (4) を含む k の diophantine 方程式である。

(4) には、 $S^{(n)}$ を定義しなくては、" $<$ " の predicate
 $(\#_0), (\#_1), \dots, (\#_n)$ を用意して各 $S^{(n)}$ を定義すると、 $S^{(n)}$ の
 意味ある system を得られる。 $(\#_0) \dots (\#_n)$ がどのようなものであ
 るにせよ、Th II に相当する Theorem は得られるから、適当な
 diophantine predicate $(\#)$ を定義して

$$\exists y S^{(0(e))}(e, x, y) \iff \exists y S^{(0(e))}_{\#}(e, x, y)$$

が成立すれば、 Σ_1^0 -predicate は diophantine であるから、" $<$ " の
 $(\#_0) \dots (\#_1)$ の組合せには、 $\exists y S^{(0(e))}_{\#}(e, x, y)$ が成り立つことは
 得られる。Conjecture I が成立すれば、これも得られる。

k -system を持つ (4)、 $\#_k$ -system を持つ $(\#_k)$ を "a system
 に随伴する predicate" 。

k -system に随伴する predicate に因しては、" $<$ " の意味ある
 結果を得ることは、 Σ_1^0 に因しては、ある k ので報告し
 る。

I ~~At~~

- [1] M. Davis, Arithmetical problems and recursively enumerable predicates,
J. Symb. Logic, vol. 18, 1953.
- [2] M. Davis and H. Putnam, Reduction of Hilbert's 10th problem,
J. Symb. Logic, vol. 23, 1958.
- [3] M. Davis, H. Putnam and J. Robinson, The decision problem for
exponential diophantine equations, Ann. of Math., vol. 74, 1961.
- [4] K. Hirose, A conjecture on Hilbert's 10th problem, Comm. Math. St. Pauli
XVII, 1968.
- [5] S. C. Kleene, Introduction to Metamathematics, New York, Toronto,
Amsterdam and Groningen, 1952.