

線形安定性解析によるスパイラルカオスの性質区別と defect 検出の実装方法

Classification of spiral chaos by using linear stability analysis and
a detection method of defects

杉村佳織, 郡宏

お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科 理学専攻

Kaori Sugimura, Hiroshi Kori

Department of Information Sciences, Ochanomizu Univ.

1 はじめに

スパイラルが自発的に生成, 消滅をする状態であるスパイラルカオスは, 力学系の方程式での線形安定性解析により, 線形安定なときは遷移的, 線形不安定なときは永続的なカオスになることが期待される. 興奮性媒質 (ある閾値を超えた入力があったときに, 興奮を示す媒質) や振動性媒質 (自発的に一定のリズムで興奮を繰り返す媒質) は, このようなスパイラルカオスを作り出す媒質として知られる [1, 2, 3]. 本講究録では, これらの媒質をもつ 2 つのモデル, Bär モデルと CGLE を用いて, スパイラルカオスの性質を紹介, またスパイラルカオスの性質を解析するのに有効な defect について紹介する.

2 遷移的なスパイラルカオス

遷移的なスパイラルカオスは, 興奮性媒質の以下の Bär モデルによって作り出すことができる [4].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon}u(u-1)\left(u - \frac{v+b}{a}\right) + D\nabla^2 u, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(u) - v, \quad (1b)$$

$$f(u) = \begin{cases} 0, & u < \frac{1}{3} \\ 1 - 6.75u(u-1)^2, & \frac{1}{3} \leq u \leq 1, \\ 1, & u > 1 \end{cases} \quad (1c)$$

Bär モデルは, パラメータによっては, 興奮状態が一定の周期で繰り返される振動状態や, スパイラルの中心部が領域の中央に固定され, 回り続ける系もつくり出すことができる. スパイラルカオスとなるパラメータ領域では, 初期条件で用意したスパイラルが, 時間と共に成長し, 系の状態をより不安定化し, 系の他の領域からもスパイラルが生成, 対消滅を繰り返す様子がみとれる (図 1).

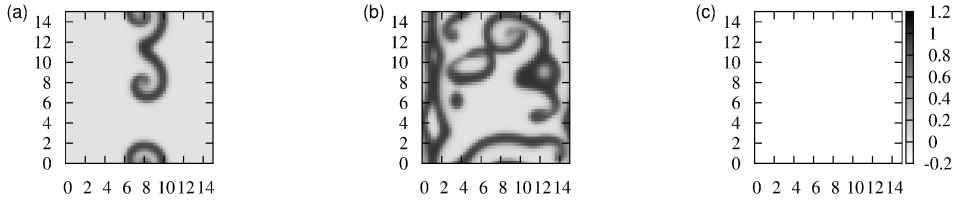


図 1: スパイラルカオスのスナップショット: Bär モデルのパラメータは $a = 0.84$, $b = 0.07$, $\epsilon = 0.08$, 拡散係数 $D = 1.0$. 境界条件は周期境界条件. 空間ステップ $\Delta x = 0.3$, 時間ステップ $\Delta t = 0.01$. システムサイズは 15×15 とした. 黒と白の領域はそれぞれ, 興奮波, 定常状態に対応する. $u(x, y, t)$ のカラースケールは -0.2 (白) から 1.2 (黒) までの範囲をとった. (a) 初期条件として与えるスパイラル. (b) スパイラルカオス. (c) 一様定常状態. スパイラルカオスが過渡的であるため, 一度一様定常状態となると, その後は再度興奮しない.

図 1 において, 黒の部分が興奮波を, 白の部分が興奮していない, 定常状態の系の様子をそれぞれ表している. Bär モデルでは, ひとたび図 1(c) の状態, つまり系が一様定常状態に陥ると, 再び興奮することはない. つまり, スパイラルカオスは遷移的である. これは, 線形安定性解析で理解することができる. 今, (u^*, v^*) を固定点, $\delta u, \delta v$ を安定固定点からの摂動とし,

$$u = u^* + \delta u \quad (2)$$

$$v = v^* + \delta v \quad (3)$$

とおく. Bär モデル (1) に, この u, v を代入すると,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \delta u}{\partial t} = -\frac{b}{a\epsilon} \delta u + D \nabla^2 \delta u \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \delta v}{\partial t} = -\delta v \quad (5)$$

となる [5].

ここで, $\delta u, \delta v$ を空間 $x, y \in [-L, L]$ に対して

$$u_{p,q}(t) = \mathcal{F}[\delta u] = \int_{-L}^L \int_{-L}^L \delta u(x, y, t) e^{-i(px+qy)} dx dy \quad (6)$$

$$v_{p,q}(t) = \mathcal{F}[\delta v] = \int_{-L}^L \int_{-L}^L \delta v(x, y, t) e^{-i(px+qy)} dx dy \quad (7)$$

とフーリエ変換する. ただし, p, q は, それぞれ x 軸方向, y 軸方向の波数

$$p = \frac{2\pi n_x}{L} \quad (8)$$

$$q = \frac{2\pi n_y}{L} \quad (9)$$

($n_x, n_y \in \mathbb{N}$) を表す. フーリエ変換の性質より,

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial \delta u}{\partial t}\right] = -i(p+q)u_{p,q} \quad (10)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 \delta u}{\partial r^2}\right] = -(p+q)^2 u_{p,q} \quad (11)$$

となる (v についても同様). この性質の導出には, 周期境界条件

$$\delta u(-L, y, t) = \delta u(L, y, t) \quad (12)$$

$$\delta u(-x, -L, t) = \delta u(x, L, t) \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial \delta u}{\partial t} \right|_{x=-L} = \left. \frac{\partial \delta u}{\partial t} \right|_{x=L} \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial \delta u}{\partial t} \right|_{y=-L} = \left. \frac{\partial \delta u}{\partial t} \right|_{y=L} \quad (15)$$

を用いた (v についても同様). ただし, この性質は, ノイマン境界条件等, 他の境界条件においても同様に成り立つ. これを式 (5) に適用して,

$$\frac{\partial u_{p,q}}{\partial t} = \left(-\frac{b}{a\epsilon} - D(p+q)^2\right)u_{p,q} \quad (16)$$

$$\frac{\partial v_{p,q}}{\partial t} = v_{p,q} \quad (17)$$

を得る. よって, 式 (5) の行列表示は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_{p,q}}{\partial t} \\ \frac{\partial v_{p,q}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a\epsilon} - D(p+q)^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{p,q} \\ v_{p,q} \end{pmatrix} \quad (18)$$

となる.

この行列の固有値は,

$$\lambda_1 = -\frac{b}{a\epsilon} - D(p+q)^2, \lambda_2 = -1 \quad (19)$$

であるから, λ_1 の正負により安定性が切り替わる. ここで, 想定しているパラメータ領域 $a, b, \epsilon > 0$ では, 常に $\lambda_1 < 0$ となる. したがって, 一様定常状態は線形安定であることが示された. これはシミュレーションでも確認できている.

3 恒久的なスパイラルカオス

続いて, 興奮性媒質と似たモデルとして, 振動性媒質の複素 Ginzburg-Landau 方程式 (以下 CGLE と呼ぶ) を紹介しよう. 以下がモデルの式である [6].

$$\frac{\partial W}{\partial t} = W + (1+ib)\nabla^2 W - (1+ic)|W|^2 W. \quad (20)$$

このモデルは, パラメータ b, c により, 系の状態が変化し, 平面波が現れたり, 振幅 $|W|$ が小さな, 乱流状態やスパイラルカオスになる.

CGLE が作るスパイラルカオスでは, 線形安定性解析を行うと, 線形不安定なパラメータ領域が存在するため, スパイラルカオスが永続的になる場合がある. 今, CGLE でも線形安定性解析を行い, 系の安定性に対するパラメータ依存性を調べよう. CGLE の一様振動解は $W = \exp(-ict)$ である. 2次元系, 周期境界条件において, この周期解の安定性解析を行う. 摂動を $\delta w(x, y, t)$ とし,

$$W(x, y, t) = \{1 + \delta w(x, y, t)\} \exp(-ict) \quad (21)$$

とおく. このとき CGLE の式 (20) に, 式 (21) の W を代入し, $\delta w(x, y, t)$ について線形化する.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \delta w}{\partial t} \quad (22)$$

$$= -(1+ic)\delta w + (1+ib)\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \delta w - (1+ic)\overline{\delta w} \quad (23)$$

ただし, $\overline{\delta w}$ は δw の複素共役である. p を摂動の x 方向, q を摂動の y 方向の波数とし,

$$w_{p,q}(t) = \int_{-L}^L \int_{-L}^L \delta w(x, y, t) e^{-i(px+qy)} dx dy \quad (24)$$

とフーリエ分解すると ($\overline{w_{-p,-q}}$ についても同様), 式 (23) の行列表示は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial w_{p,q}}{\partial t} \\ \frac{\partial \overline{w_{-p,-q}}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(1+ic) - (1+ib)(p+q)^2 & -(1+ic) \\ -(1-ic) & -(1-ic) - (1-ib)(p+q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{p,q} \\ \overline{w_{-p,-q}} \end{pmatrix} \quad (25)$$

となる。これより、行列の固有値は波数を $k = \sqrt{p^2 + q^2}$ として、

$$\lambda_{\pm}(k) = -(1+k^2) \pm \sqrt{(1+k^2)^2 - 2(1+bc)k^2 - (1+c^2)k^4} \quad (26)$$

である。ここで、 $\lambda_+(k)$ は位相分枝、 $\lambda_-(k)$ は振幅分枝と呼ばれ、 $\lambda_+(k) > \lambda_-(k)$ なので、一様振動解の安定性には $\lambda_+(k)$ が関係している。よって、 $\lambda_+(k)$ を小さな k について展開し、その実部に着目すると、分散関係は

$$\text{Re}\lambda(k) = -(1+bc)k^2 - \frac{b^2(1+c^2)}{2}k^4 + O(k^6) \quad (27)$$

となる。したがって、固有値 $\text{Re}\lambda(k)$ の正負により安定性が切り替わることから、 $1+bc > 0$ で解は線形安定、 $1+bc < 0$ で解は線形不安定となる。一般に $1+bc > 0$ のときを Benjamin-Feir 安定、 $1+bc < 0$ のときを Benjamin-Feir 不安定と呼ぶ [6]。

Benjamin-Feir 安定の場合は摂動は任意の波数で減衰振動するため、スパイラルカオスは遷移的であることが期待できる。先行研究において、CGLE モデルで線形安定領域でも恒久的スパイラルカオスが存在すると推測されているが [7]、我々はいくつかのパラメータ領域でのシミュレーション結果から、線形安定領域では常に遷移的スパイラルカオスであると推測する。

また、Benjamin-Feir 不安定なパラメータ領域では、小さな波数で固有値が正であり、ある程度大きな波数では固有値が負になる。したがって、固有値が負となるような波数のみを持つ小さなシステムサイズでは、摂動は減衰振動し、スパイラルが遷移的であることが予想される。そしてシステムサイズを大きくするにつれ、系が小さな波数も含むようになるため、ある程度大きなシステムサイズからは、スパイラルカオスが恒久的になることが予想できる。この予想は、実際シミュレーションにより確認できており、スパイラルカオスが遷移的カオスから恒久的カオスに移り変わる臨界システムサイズも求めることができています。

4 defect

スパイラルカオスの統計的性質を解析するために、defect 数を統計量とする場合がある [8, 9, 10]。defect は、スパイラルの中心部のことであり、defect 数はスパイラルの個数に対応する（周期境界条件の場合は、defect 数の $1/2$ がスパイラル数となり、ノイマン境界条件の場合は defect 数とスパイラル数は等しくなる）。defect 数を統計量としてカオスの性質を解析することができるため、スパイラルカオスにおいて defect に着目することはカオスの理解に大変有効である。本講究録の最後は、この defect の数値計算による検出方法を紹介しよう。defect は以下の topological charge で定められる。

$$C(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \oint \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} \quad (28)$$

これは、数学では winding number と呼ばれ、 $C \in \mathbb{Z}$ である。局所位相 ϕ は、Bär モデルの場合、 $(u - u^*, v - v^*)$ の偏角とし、CGLE の場合 $\phi = \arg W$ としている。ここで (u^*, v^*) は孤立した unit における不安定固定点である。

以下の検出法を用いたシミュレーションでは、 $C(\mathbf{r}, t)$ の値は 0 または ± 1 となる。まず、積分経路を 4 頂点 $\mathbf{r}_1 = (x, y)$, $\mathbf{r}_2 = (x + \Delta x, y)$, $\mathbf{r}_3 = (x + \Delta x, y + \Delta y)$, $\mathbf{r}_4 = (x, y + \Delta y)$ が結ぶ 4 線分とし、この領域内の defect を検出することを考える。ただし、 $\Delta x, \Delta y$ はそれぞれ、シミュレーションで用いる x, y 軸方向の空間ステップである。また、各頂点の位相をそれぞれ、 $\phi_i = \phi(\mathbf{r}_i)$ とする。ここで、隣合う頂点の位相差 $\phi_{1,2}, \phi_{2,3}, \phi_{3,4}, \phi_{4,1}$ を計算する ($\phi_{i,j} = \phi_i - \phi_j$, $-\pi \leq \phi_{i,j} < \pi$)。次に各線分の 4 頂点の位相差 $\Delta\phi = \phi_{1,2} + \phi_{2,3} + \phi_{3,4} + \phi_{4,1}$ を計算し、 $C = \Delta\phi/2\pi$ とする。この値が 1 であった場合、その点は反時計周りの defect であり、 -1 の場合、その点は時計回りの defect であると判定する。

シミュレーション結果から、これは 0.3 ほどの細かな空間ステップでは正しく defect 検出ができていますが、1.0 程度の空間ステップでは、正しく検出できないことがわかっている。既に実装されているもの

を使用したい場合は、EZ-SPIRAL が公開されているため、そちらも参照されたい (http://homepages.warwick.ac.uk/~masax/Software/ez_software.html). この C 言語のプログラムでは、ニュートン法で $(u, v) = (u^*, v^*)$ ((u^*, v^*) は孤立した不安定固定点) となる点を defect として検出している。Bär モデルの他、FitzHugh-南雲モデルによるスパイラルカオスの defect を検出することができる。

5 まとめ

スパイラルカオスは力学系の方程式での線形安定性解析により、遷移的スパイラルカオスや、恒久的なスパイラルカオスとなった。実際、これは任意のパラメータで線形安定である Bär モデルでは、スパイラルカオスが遷移的であり、CGLE ではパラメータやシステムサイズに依存してカオスが恒久的になることが確かめらる。

また、スパイラルカオスの性質を解析するにあたり、スパイラルの中心部である defect 数に着目し、その統計量をはかることが有効であり、defect 検出の実装方法を紹介した。

参考文献

- [1] Arthur T. Winfree. *The geometry of biological time*. Biomathematics. Springer Verlag, New York, 1980.
- [2] James Keener and James Sneyd. *Mathematical Physiology I: Cellular Physiology*. Springer, 2nd edition, 2009.
- [3] M. Cross and P. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 65, pp. 851–1112, Jul 1993.
- [4] M. Bär and M. Eiswirth. Turbulence due to spiral breakup in a continuous excitable medium. *Phys. Rev. E*, Vol. 48, pp. R1635–R1637, Sep 1993.
- [5] 蔵本由紀, 河村洋史. 同期現象の数理. 培風館, 2010.
- [6] Igor S Aranson and Lorenz Kramer. The world of the complex ginzburg-landau equation. *Rev. Mod. Phys.*, Vol. 74, No. 1, p. 99, 2002.
- [7] Hugues Chat and Paul Manneville. Phase diagram of the two-dimensional complex ginzburg-landau equation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 224, No. 12, pp. 348 – 368, 1996. Dynamics of Complex Systems.
- [8] L. Gil, J. Lega, and J. Meunier. Statistical properties of defect-mediated turbulence. *Phys. Rev. A*, Vol. 41, pp. 1138–1141, Jan 1990.
- [9] Jörn Davidsen and Raymond Kapral. Defect-mediated turbulence in systems with local deterministic chaos. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 91, p. 058303, Jul 2003.
- [10] Dagmar Krefting and Carsten Beta. Theoretical analysis of defect-mediated turbulence in a catalytic surface reaction. *Physical Review E*, Vol. 81, No. 3, p. 036209, 2010.