

1 点の stabilizer の socle が非可解な  
ある種の 2 重可移群について

大阪教育大学

平峰 豊

$\Omega$  上の 2 重可移群  $G$  の 1 点の stabilizer  $G_\alpha$  ( $\alpha \in \Omega$ ) が、  
 $PSL(3, q)$ ,  $q = 2^n$  に同型な正規部分群を含むものは、

$$APL(3, q) \geq G \geq ASL(3, q), \quad q = 2^n, \quad n \equiv 1 \pmod{2},$$

22 次の Mathieu 群  $M_{22}$ , 及びその自己同型群  $Aut(M_{22})$   
などがその例としてある。これに関して次の定理を証明する。

定理  $G$  を  $\Omega$  上の 2 重可移群とし、 $|\Omega|$  は偶数とする。

$G_\alpha$  ( $\alpha \in \Omega$ ) が  $PSL(3, q)$ ,  $q = 2^n$  と同型な正規部分群  $N$  を含めば  $N$  は  $\Omega - \{\alpha\}$  上可移となり、さらに次の (i) (ii) (iii) のいずれかが成り立つ。

(i)  $G$  は regular normal な位数  $q^3$  の正規部分群をもち、 $n$  は奇数かつ  $SL(3, q) \leq G_\alpha \leq \Gamma L(3, q)$

(ii)  $|\Omega| = 22$ ,  $G \cong M_{22}$ ,  $N \cong PSL(3, 4)$

(iii)  $|\Omega| = 22$ ,  $G \cong Aut(M_{22})$ ,  $N \cong PSL(3, 4)$

定理で (i) が起る場合は精密には次のことが成り立つ。

$E$  を regular normal な部分群とすると、ある元  $g$  が  $\Omega$  上の対称群の中に存在して次をみたす。  $\alpha^g = \alpha$ ,  $(G_\alpha)^g E \supset E$ ,  
 $ATL(3, q) \geq (G_\alpha)^g E \geq ASL(3, q)$ .

### 証明の概略

$\alpha \neq \beta \in \Omega$  とする。  $G_\alpha \supseteq N$  故、 $N$  は  $\Omega - \{\alpha\}$  上  $\frac{1}{2}$ -transitive となるから  $|\Omega| = 1 + r \times |BN|$  が成り立つ。ここで  $r$  は  $\Omega - \{\alpha\}$  上の  $N$ -orbits の数とする。又  $G_\alpha$  に含まれる  $N$  と共役な部分群は  $N$  に限ることは明らかであるから、 $N$  を  $N^\alpha$  と書く。  $|\Omega|$  が偶数であることより  $r$  及び  $|BN^\alpha|$  はいずれも奇数となる。従って、 $N_\beta^\alpha = N^\alpha \cap G_\beta$  は、 $N^\alpha$  の odd index の真部分群となる。次の Lemma により、 $N_\beta^\alpha$  のある位数  $q^2$  の elementary abelian 部分群  $A$  が存在して  $N_\beta^\alpha \leq N_{N^\alpha}(A)$  が成り立つ。

Lemma  $PSL(3, q)$ ,  $q = 2^n$  の odd index の部分群は、位数  $q^2$  の elementary abelian 部分群とその正規部群として含む。

$N_\beta^\alpha$  の 2-Sylow 群を  $S$  とすると、 $S$  は

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in GF(q) \right\}$  と同型であることから  
 ちょうど 2 個の位数  $q^2$  の elementary abelian 部分群を含んでいる。これを  $A, B$  とおく。  $N^\alpha \simeq PSL(3, q)$  の性質により次が成り立つことは容易に確かめられる。

(I)  $A \simeq B \simeq E_{q^2}$ ,  $A \not\sim B$  in  $N^\alpha$ ,  $N_{N^\alpha}(A) \simeq N_{N^\alpha}(B)$ ,  
 $(N_{N^\alpha}(A))' = M$  とおくと  $q \neq 2$  ならば  $M/A \simeq \text{PSL}(2, q)$ .

次に  $E = A, B$  に対して  $N_{G_\alpha}(E)$  が  $F(E) - \{\alpha\}$  上可移であることを示す。 $M_1 = \{A^g \mid g \in N^\alpha\}$ ,  $M_2 = \{B^g \mid g \in N^\alpha\}$  とおくと、前に述べたことにより  $M_1 \cup M_2$  は  $N^\alpha$  に含まれる  $E_{q^2}$  に同型な部分群の全体となるから、 $G_\alpha$  は 2 点よりなる集合  $\{M_1, M_2\}$  上に作用する。従って  $K = \{g \in G_\alpha \mid M_1^g = M_1, M_2^g = M_2\}$  とおくと  $|G_\alpha : K| = 1$  或  $2$  となる。故に  $K$  も  $\Omega - \{\alpha\}$  上可移となる。(I) により、 $(K, \Omega - \{\alpha\})$  において  $A$  や  $B$  は Witt の条件を満たす  $N^\alpha$  の部分群であるから  $N_K(E)$  ( $E = A$  或  $B$ ) は  $F(E) - \{\alpha\}$  上可移となる。よって次が示された。

(II)  $E = A$  或  $B$  とするとき、 $N_{G_\alpha}(E)$  は  $F(E) - \{\alpha\}$  上可移である。

次に  $|N^\alpha / N^\alpha \cap N^\beta|$  が奇数であることを示す。[1] の Lemma 2.1 により  $C_G(N^\alpha) \neq 1$  ならば  $N^\alpha = N^\alpha \cap N^\beta$  が成り立つので、 $C_G(N^\alpha) = 1$  としてよい。このときには

$\text{PSL}(3, q) \simeq N^\alpha \trianglelefteq G_\alpha \leq \text{Aut}(N^\alpha)$  が成り立つ。

$S_1$  を  $N^\alpha$  の 2-Sylow 群とし、 $S_2 = S_1 \cap N^\alpha \cap N^\beta$  とおくと  $S_2$  は  $N^\alpha \cap N^\beta$  の 2-Sylow 群となる。一方、 $S_1/S_2 = S_1/S_1 \cap (N^\alpha \cap N^\beta) \simeq S_1 N^\alpha / N^\alpha$  であるから、上のことより  $S_1 N^\alpha / N^\alpha \leq \text{Out}(\text{PSL}(3, q))$

従って  $S_1/S_2$  は  $\text{PSL}(3, q)$  の外部自己同型群の部分群に同型となる。このことにより  $S_1/S_2$  は rank が 2 以下のアーベル群となるが、 $S_1$  は  $\text{PSL}(3, q)$  の 2-Sylow 群に同型であることから  $S_1/(S_1)' \simeq E_{q^2}$  となる。故に  $S_1/S_2 \leq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  となる。このことと次の Lemma により矛盾を得ることは容易にたしかめることができる。

Lemma  $N = \text{PSL}(3, q)$ ,  $q = 2^{2m}$ ,  $t$  は  $N$  の位数 2 の field automorphism とする。  $S$  は  $t$ -不変な  $N$  の 2-Sylow 群とすると (i)  $Z(\langle t \rangle S) \simeq E_{\sqrt{q}}$  (ii)  $S_0 \leq \langle t \rangle S$ ,  $S_0 \simeq S$  ならば  $S_0 = S$  . 従って次を得る。

$$(III) |N_B^\alpha / N_B^\alpha \cap N^B| \equiv 1 \pmod{2}$$

(II) により  $A, B \leq N_B^\alpha \cap N^B$  従って  $A, B \leq N_B^\alpha$  であるから、 $\beta$  に対しても (II) と同様のことがいえて、次を得る。

(IV)  $F(E) \neq \{\alpha, \beta\}$  ならば  $N_G(E)^{F(E)}$  は 2 重可移。 ( $E = A, B$ ) .

又  $\text{PSL}(3, 2) \simeq \text{PSL}(2, 7)$  であるから [2] により定理が  $q = 2$  のときに成り立つことは容易に確かめることができる。従って  $q > 2$  としてよい。  $(N_{N^\alpha}(B))' = L$  とおくと、(I) により  $L/B \simeq M/A \simeq \text{PSL}(2, q)$  となるが、 $M^{F(A)} = 1$ ,  $L^{F(B)} \neq 1$  が成り立つことを示すことができる。従って、

(IV)により  $N_G(B)$  は  $F(B)$  上の 2 重可移群で、1 点の stabilizer が、 $\text{PSL}(2, q)$  に同型な正規部分群  $L^{F(B)}$  を含むものとなっておりことがわかる。このような 2 重可移群は [1] により決定されているので、これにより  $\gamma=1$  つまり  $N^\alpha$  が  $\Omega - \{\alpha\}$  上可移であること及び次の (1)(2) のいずれかが成り立つことがわかる。

$$(1) |F(B)|=6, N_G(B)^{F(B)} \simeq A_6 \text{ or } S_6, N^\alpha \simeq \text{PSL}(3, 4)$$

$$(2) |F(B)|=q^2, N_G(B)^{F(B)} \text{ は regular normal 部分群をもつ}$$

(1) の場合は [4] の Satz 7 を用いて、 $G^\Omega = M_{22} \text{ or } \text{Aut}(M_{22})$  となる。

(2) の場合は、 $N_B^\alpha = N^\alpha \cap N^B = M$ ,  $q = 2^n$ ,  $n \equiv 1 \pmod{2}$   
 $|N_B^\alpha| = (q-1)(q+1)q^3$ ,  $|\Omega| = q^3$  が示される。これにより  $\Omega - \{\alpha\}$  上での (従って  $\Omega$  上での)  $N^\alpha$  の置換表現は完全に決まったことになる。とくに  $B$  が  $\Omega - F(B)$  上 semi-regular であることが容易にわかる。

$T_1$  を  $N_G(B)$  の 2-Sylow 群、 $T_2$  を  $N_G(T_1)$  の 2-Sylow 群とすると  $T_2 \not\subseteq T_1$  は明らかであるが、 $x \in T_2 - T_1$  とすると  $U = B \cdot B^x$  は位数  $q^4$  の elementary abelian 部分群となる。これは  $B$  が  $\Omega - F(B)$  上 semi-regular であることからすぐに示される。

いくつかの Lemma により、 $G$  が  $\Delta = \{U^g \mid g \in G\}$  上

2重可移作用すること及び  $|\Delta| = |G : N_G(U)| = 8^2 + 8 + 1$  が示される。O'Nan の定理 [3] により  $N_G(U)$  とくに  $U$  が  $\Delta$  上 faithful でないことが分かるので  $O_2(G_\Delta) \cap U \neq 1$  となる。これは  $O_2(G) \neq 1$  を示しているのだから、とくに  $G^{\Delta\Delta}$  は regular normal 部分群をもつことが証明された。よって定理が示された。

#### 参考文献

- [1] Y. Hiramane : On doubly transitive permutation groups, Osaka J. Math. 15 (1978), 613-631.
- [2] Y. Hiramane : On some doubly transitive permutation groups in which socle  $(G_\alpha)$  is nonsolvable, to appear
- [3] M. O'Nan : A characterization of  $L_n(8)$  as a permutation group, Math. Z. 127 (1972), 301-314.
- [4] H. Zassenhaus : Über transitive Erweiterungen gewisser Gruppen aus Automorphismen endlicher mehrdimensionaler Geometrien, Math. Ann. 111 (1935), 748-759.