

Graph knots の Dehn surgery

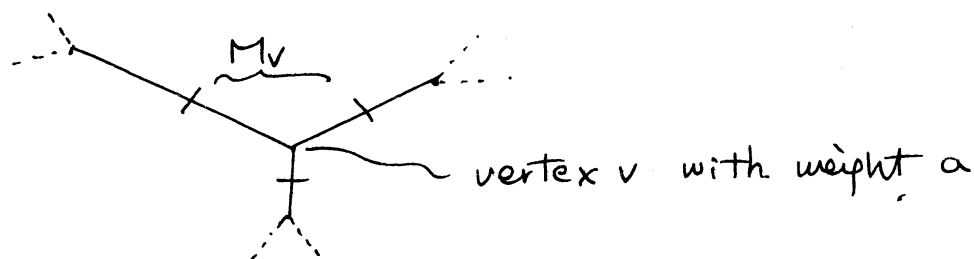
東大 理 上 正明

complement X が graph manifold (X, T) であるような knot を graph knot と呼ぶ。この時 $X-T$ の各 component は punctured S^2 上の S^1 -bundle になる (cf. [3]). ので, plumbed diagram で表わすことがわかる (§2)。そこで逆に plumbed diagram で表わされる 3-manifold を, 特に Seifert fibered space になる場合を中心に考えることにする。

§1. Reduced plumbed diagram

Γ : を 整数係数の weight をもつ graph (edge 上の weight は ± 1) とする。このとき Γ には 4-manifold of plumbing type P_Γ が対応する。各 vertex v_i には euler number a_i の S^2 上の D^2 -bundle p_i , vertex v_i, v_j を結ぶ edge e (weight of $e = \varepsilon = \pm 1$)

には、対応する 2 つの S^2 上の D^2 -bundle の (自然な向きによ
る) intersection number = ϵ なる plumbing が対応する。
 $M_P = \partial P_P$ とおくと、 M_P は自然に graph manifold になる。
その graph structure を (M_P, T) とおくと、 $M_P - T$ の各
component の closure は punctured S^2 上の S^1 -bundle
であるが、その boundary component 上に次のような座標
(peripheral system) を定めておく。



vertex v with weight a に対応する piece M_v は
上図の部分に相当し、その構成は次の通り。

v の valency (v から出る edge の数) を r , B_r を
 r -punctured S^2 とする。 $B_r \times S^1$ の i 番目の boundary
component $\partial_i B_r \times S^1$ に $q_i = \partial_i B_r \times *$, $h = * \times S^1$ なる 2
つの loop によって座標を入れる。一方 B_r の内点の近傍
 D_0^2 をとり、 $\partial D_0^2 \times S^1$ の座標を、 $q_0 = \partial D_0^2 \times *$, h によって定
める。(但し、 q_i に、 $\sum_{i=0}^r q_i \sim 0$ in $B_r - \text{int } B_0$ なるように向

きを入れ子。その他の向きはすべて自然な向きとする。)

このとき、

$M_v \cong (\text{Pr-int } D_0^2) \times S^1 \not\cong D^2 \times S^1$, $f: \partial D_0^2 \times S^1 \rightarrow \partial D^2 \times S^1$
 は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で表わされる homeo. (但し、ここで $\partial D_0^2 \times S^1$ には $\{ -q_0, h \}$ によって向きを入れる。)

また、vertices v, v' が weight ε の edge e で結ばれているときは M_v と $M_{v'}$ は $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ なる homeo $\partial_1 M_v \rightarrow \partial_1 M_{v'}$ で attach される。(ここで edge e が $M_v, M_{v'}$ のそれぞれれの1番目の boundary component に対応するとした。)

以下 boundary のある graph も考え、各 boundary は Γ の形で表わし、対応する M_Γ の boundary component には上記の通り "canonical coordinate" $\{q, h\}$ を固定しておく。

Proposition 1. 次の (i), (ii) は同値。

- (i): M^3 は $M-T$ の各 component の closure が punctured S^2 上の S^1 -bundle たる graph manifold (M, T) の構造をもつ。
- (ii). ある plumbed diagram (integrally weighted graph) Γ が存在して、 $M^3 \cong M_\Gamma$

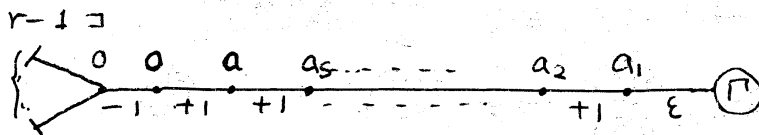
(i) (ii) $\Rightarrow$ (i) は明らか。

(i) $\Rightarrow$ (ii) は 次の事実による。

M_Γ を Γ に対応する graph manifold. (左端の boundary は ∂M_Γ に対応するとする.) このとき

$$M = M_\Gamma \cup_g Br \times S^1; \quad g = \begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix}: \partial(Br \times S^1) \xrightarrow{\cong} \partial M_\Gamma$$

(s, t, u, v は $sv - tu = 1$ なる整数). は次の graph で表わされる。



$$\begin{pmatrix} s & u \\ t & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -a_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -a_5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u/v = a_1 - 1/a_2 - 1/\cdots - 1/a_5 = [a_1, a_2, \dots, a_5].$$

$$\epsilon = \pm 1.$$

(但し $Br \times S^1$ が M_Γ の一部に組み込まれている場合は cycle をもつ graph として上と同様にかける。)

M_Γ は Γ の vertex の weight が有理数でも定義される。

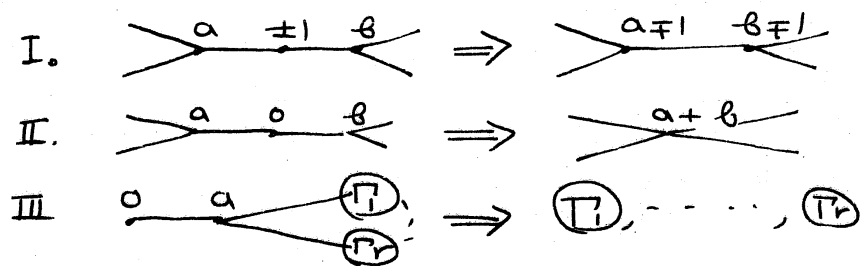
よく知られている様に,

$$\textcircled{1} \xrightarrow{P/q} = \textcircled{1} \xrightarrow{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$$P/q = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

そこで上記の case のみ 簡単の為 有理数の weight で表わすことにする。また特に断わりない限り graph は tree とする。(この時は edge の weight に よらない。)

定義. (integrally weighted) graph Γ が reduced とは. 次の 3 つの reduction process がこれ以上適用できない graph をいう。



上記の I ~ III は対応する M_Γ の homeo type をかえない。

Theorem 1. Γ を ^{connected} reduced weighted tree とする。

このとき次の 2 つ は同値

(i). $M_\Gamma \approx$ Seifert manifold of type Θ_1 .

(即ち. orientable Seifert manifold with an orientable orbit space.)

(ii). Γ の multiple vertex (即ち valency ≥ 3 の vertex) の数は高々 1.

① (ii) $\Rightarrow$ (i) は明らか。(Γ reduced であることに注意)。 (i) $\Rightarrow$ (ii) は次の Lemma から従う。

Lemma. Γ . ^{connected} reduced. weighted tree. とする。

もし、 Γ の multiple vertex の数 ≥ 2 ならば、 M_Γ は incompressible torus をもち、 $\pi_1 M_\Gamma$ は rank 2 の free abelian group を proper subgroup にもつ。さらに $\pi_1 M_\Gamma$ は centerless。

Lemma の証明は次のように M_Γ に対する初等的考察を積み重ねて行なわれる。

1° Γ : connected reduced graph. で $M_\Gamma \neq \emptyset$ とする。
このとき、 M_Γ は irreducible。

2° Γ : 1° と同じ。さらに、 $M_\Gamma \cong B^2 \times S^1$ とする。
このとき、 Γ は linear. (即ち multiple vertex なし。)

3° Γ : 1° と同じ。このとき、 M_Γ の各 boundary component は incompressible にあるか。又は M_Γ は solid torus になる。

1°, 2° はともに Γ の multiple vertex の数に関する induction で示される。multiple vertex の数 ≤ 1 のとき

1. Seifert manifold with boundary ∂M irreducible であること, fibered solid torus の exceptional fiber ∂M の高々 1 であることから従う。3° は 1°, 2° の Corollary.

同時に次のこともわかる。

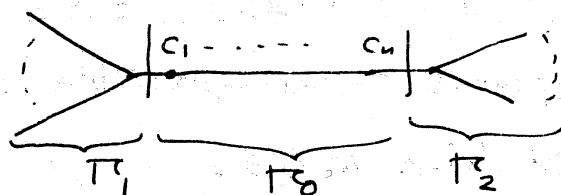
4° Γ : (not necessarily reduced) connected graph とし M_Γ が not irreducible ならば次のいずれかが成立。

1) M_Γ は non-prime で Γ は disconnected graph に reduce できる。

2) $M_\Gamma = S^2 \times S^1$ で Γ は $\cdot^0$ に reduce できる。

(4° は $\partial M_\Gamma = \emptyset$ でも $\partial M_\Gamma \neq \emptyset$ でもよい)

Lemma の証明の outline. # multiple vertices of $\Gamma = 2$ のとき示す。(一般の場合は inductive に示される)
 Γ を次のように分割。



このとき $M_{\Gamma_1}, M_{\Gamma_2}$ は Seifert manifold with boundary. ∂M_{Γ_i} の canonical coordinate を $\{\theta_i, \alpha_i\}$ とする。($i=1, 2$). $M_{\Gamma_0} \approx T^2 \times I$

$1^0 \sim 3^0$ により. (T_1, T_2 に multiple vertex があるため)

$\pi_1(M_{T_j}) \rightarrow \pi_1(M_{T_j})$ は injective. (しかも not onto なること) 容易に示される. このとき. $\pi_1 M_T \cong \pi_1 M_{T_1} *_{\mathbb{Z}^2} \pi_1 M_{T_2}$.

ここで amalgamated subgroup $\mathbb{Z}^2$ は $M_{T_0} \cong T^2 \times I$ に対応する homeo. $\varphi: M_{T_1} \xrightarrow{\sim} M_{T_2}$ と上記の inclusion から引き起こされる写像により amalgamate される。

一方 combinatorial group theory の初等的事実により.

$$\text{center}(\pi_1 M_T) \cong \text{center} \pi_1 M_{T_1} \cap \text{center} \pi_1 M_{T_2} \cap \mathbb{Z}^2,$$

(ここで $\mathbb{Z}^2, \pi_1 M_{T_2}$ は自然に $\pi_1 M_T$ の部分群とみなす.)

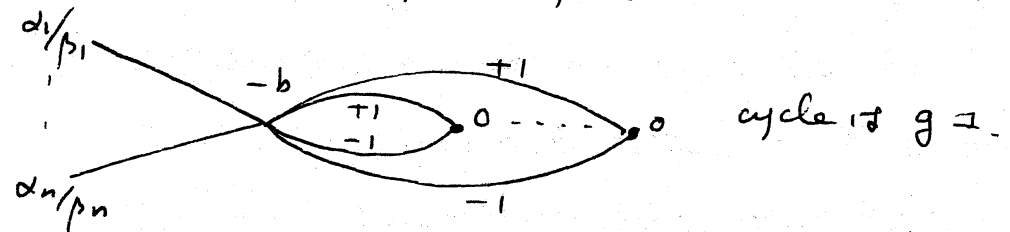
$\text{center}(\pi_1 M_j) = \langle h_j \rangle \cong \mathbb{Z}$ ($j=1, 2$) である. $\text{center} \pi_1 M_T$ が ϕ ならば ϕ は h_1 を $\pm h_2$ に写さねばならない. この時容易にわかるように. $[c_1, \dots, c_n] = 0$. このとき T_0 の部分 I, II により reduce されねばならない。

Remark.1 M_T が lens space ($S^2 \times S^1, S^3$ を含む)

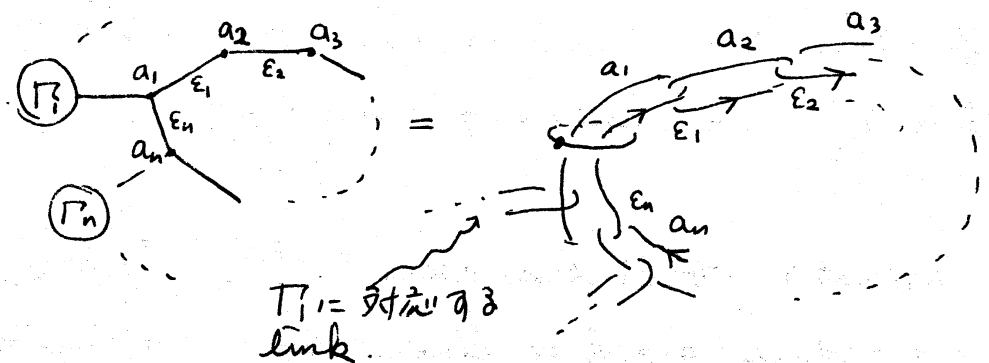
のとき reduced graph が linear なることは. von Randow, Wagnreich, Scharf. [5]. により考察されている. 但し. この方法は $\pi_1 M_T$ が solvable なる Γ を決めるもので. 上記の場合以外の Seifert manifold には適用できない. 上記のことは

Lemma から自然に証明される。

Remark 2. M は Seifert of type $\emptyset$ のとき。
 この type は orbit surface の genus = 0 のものに限る。
 しかし cycle をもつ graph の場合はこの限りではない。例
 えば $\{b, (\emptyset, g); (\alpha_1, \rho_1), \dots, (\alpha_n, \rho_n)\}$ なる Seifert
 manifold は次の graph でかける。



この様な cycle をもつ graph は次の process で framed
 link に書き直すことができる。



ϵ_i は、右図では linking number を表わす。

この observation により次の proposition が示される。

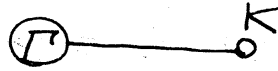
Proposition 2. Borromean rings 上の各 component 上 $r, s, t \in \mathbb{Q}$ で Dehn surgery をして得られる manifold を $B(r, s, t)$ とかく。このとき $B(0, s, t)$ は graph manifold. $B(0, 0, t)$ は Seifert manifold で "orbit space $\approx T^2$. exceptional fiber は高々 1 本,

$$(*) \quad B(0, s, t) = \begin{array}{c} \xrightarrow{+1} \\ s \quad \text{---} \quad t \\ \xleftarrow{-1} \end{array}$$

M_Γ が Seifert manifold of type $n_2 (= \text{orientable Seifert manifold with an nonorientable orbit space})$ の構造をもつ場合の reduced tree T も決定される。(weight は限らずしも一意的ではない)。これは Waldhausen の定理 [6] による。即ち M_Γ の自然な graph structure と Seifert of type n_2 の自然な graph structure に "Waldhausen の意味の" reduction process を適用して structure を比較する。若干の例外的 case は Theorem 1 により T は決定される。(詳細は略す)。

§2. graph knot の representation

Proposition 1 により graph knot $K \subset S^3$ は次のような plumbed diagram τ によって (cf. [3])



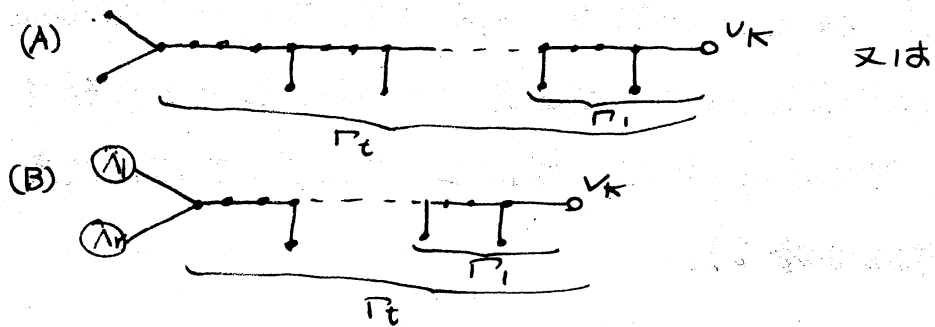
(i) Γ は tree

(ii) $M_\Gamma \cong S^3$

Γ は tree であるから Γ の edge の weight には ± 1 しかない。
一方 K の orientation は Γ と K を結ぶ edge に weight ± 1 を与えることによって示される。

Proposition 3. Γ connected graph. $M_\Gamma \cong S^3$ ならば Γ の multiple vertex に対して reduce されない枝の数は高々 2 個。 (cf. [3]) linear な

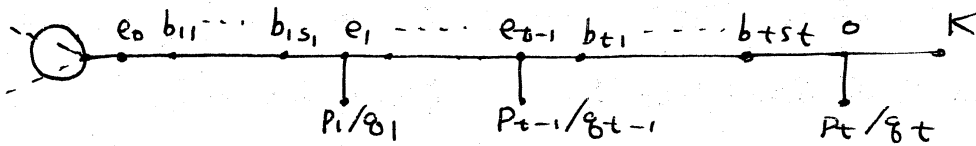
これを使って $\Gamma \text{---} K$ は次の様に reduce される。



(A), (B) とともに Γ_t は K を無視すれば linear graph に reduced. (A) の場合 K を無視すれば Γ_1 は >

//

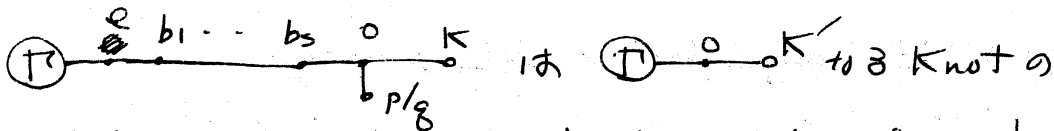
に reduce する。(B) の場合は  に reduce する。
 ところで特に $M_{\mathbb{R}} \cong S^3$ (reduction III)。さらに適当な graph
 の変形 (Kirby-Rolfsen twist に相当する) で weight を
 変換すると (A), (B) とともに



$$[b_{k1}, \dots, b_{ks_k}, 0, p_k/q_k] = 1/e_{k-1} \quad (\forall k)$$

となる。次のことに注意する。(cf. [1])

$$\begin{array}{c} m/m' \\ n/n' \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 0 \\ K \end{array} \quad mn' + nm' = \epsilon = \pm 1 \quad \text{は: Torus knot of type } (m, \epsilon n)$$



winding number = p . linking number = $\delta x + p\psi$.
 の cable knot を表わす。(但し. $[b_s, \dots, b_1] = x/x'$,

$xq + px' = \delta = \pm 1$. ψ は K の真の longitude と x かけ
 の longitude との linking number.) 勝手な cable p への
 形に替けることは容易に示される。

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 0 \\ K \end{array} = \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} K \\ 12 \end{array} \quad \text{は}$$

knots $\bigcirc \text{---} K$ の connected sum.

最後の表示は一般に edges の weight (即ち K の orientation) によって異なるが、次の事から、^{それは} 不要であることがわかる。

次の事が知られている。(cf. [2])

★: graph knot は torus knots ~~を~~ ^{から出発して} cabling, connected sum を有限回くり返すことにより、得られる。

★は上記の様に plumbing から出発して構成的に示すこともできる。特に induction はより、graph knot は invertible. 従って上の3番目の表示は edge の weight によらない。

§3. graph knot の Dehn surgery.

graph knot K を §2 のような plumbed diagram で表わし、(1つの表示を fix). K に対して適当な有理数 p/q を与えれば、 K の Dehn surgery により、得られる 3 manifold になる。(みかけの係数と真の surgery coefficient には §2 の ψ に対応してずれがある。 ψ は §2 における standard の表示に対しては容易に計算される)

$\bigcirc \text{---} p/q = \Gamma(p/q)$ と表わす。(graph knot $\bigcirc \text{---} K$)

Theorem 1 において $\Gamma(p/q)$ の reduction process を調べればいい。Seifert manifold (of type Ω_1) になるかが決まってくる。定性的には次の事がいえる。

Theorem 2. graph knot K 上の Dehn surgery で Seifert manifold がえられるときは、 K は高々 2 回の iterated cable of a torus knot. 又は 2 つの torus knot の connected sum.

より詳しく knot type surgery coefficient, えられる Seifert manifold の type も決定可能。C. Gordon [2] により異なる方法で似た結果が得られている。iterated torus knot については「簡単な計算で」[2] と同じ結果がえられる。(詳しい値は [2] に譲る。) 一方、それ以外の graph knot については、Dehn surgery が ∞ と incompressible torus をもつ graph manifold が得られること [2] で示されているが、この中で Seifert manifold になる case が唯一種類のみ存在すること [2] が Theorem 1 を使うことでの方法でわかる。それは、2 つの torus knot の connected sum の case で、得られるのは丁度 4 つの exceptional fiber をもつ Seifert manifold である。その graph は次の通り。

$$\begin{array}{c} \frac{m}{m'} \\ \swarrow \\ 0 \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \\ \frac{m}{m'} \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \\ \frac{m}{m'} \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array} = T(m, n) \# T(\tilde{m}, \tilde{n})$$

得られる Seifert manifold は

$$\begin{array}{c} \frac{m}{m'} \\ \swarrow \\ 0 \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \\ \frac{m}{m'} \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ \swarrow \\ \frac{m}{m'} \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array} = \begin{array}{c} \frac{m}{m'} \\ \swarrow \\ 0 \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{m}{m'} \\ \swarrow \\ 0 \\ \searrow \\ \frac{n}{n'} \end{array}$$

Remark. Theorem 2 は Seifert manifold of type n_2 についても有効。

Remark. Fintushel と Stern による iterated torus knot の Dehn surgery で "lens space" がえられる場合は自然に上記の結果に合致する。(cf. [1]) ここでの方法は [1] の方法の拡張であり、計算方法は基本的に同一である。(本質的には Theorem 1 が異なるところである。)

また同様の計算と Lemma の証明中考察した事実により、次の定理も導かれる。

Theorem 3. graph knot 上の Dehn surgery で "non-prime manifold $M_1 \# \cdots \# M_r$ (M_i は $\neq S^3$ なる prime component) が得られるとする。このとき、 $r \leq 2$ 。さらに少なくとも 1 つの component は lens space。

References

- [1] R. Fintushel and R. J. Stern; Constructing lens spaces by surgery on knots, Math. Z 175 (1980) 33-51.
- [2] C. McA. Gordon. Dehn surgery and satellite knots preprint.
- [3] M. Kato. A note on graph links. (数理解析研究會)
- [4] L. Moser. Elementary surgery along a torus knot. Pacific. J. Math. 38 (1971) 737-745
- [5] A. Scharf. Faserungen von Graphenmannigfaltigkeiten. Bonn. Math. Schriften, No. 93. (1974)
- [6] F. Waldhausen, Eine klasse, von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I, II, Inv. Math. 3 (1967) 308-333
4. (1967) 87-117.
- [7] M. Ue. Some remarks on Dehn surgery along graph knots. preprint.