

モーメントダイナミクスの新しい変換則とその物理的概念

東海大学 真山 紀

〒259-12 平塚市北金目1117 Tel.0463-58-1211(Ext.4478)

Facsimile 0463-59-4162

◆連続 Markov 過程で、確率関数のモーメント方程式（アンサンブル平均化される確率関数のダイナミクスを表わす方程式）が、[1] および [2] で示される新しい非線形変換則により容易に得られた。

[1] 確率変数 X の非線形変換 $Y=\Psi(X,t)$ を次式から導く ($X \equiv X_t, Y \equiv Y_t$)。

$$dY = [(\partial / \partial t) \Psi(X,t)] dt + \sum_{m=1}^n (1/m!) [(\partial / \partial X)^m \Psi(X,t)] (dX)^m \quad (1)$$

$$dX_t = a_1(X_t, t) dt + \sum_{m=2}^n a_m(X_t, t) dD_m \quad (2)$$

$$f \cdot (dD_1)^j = \begin{cases} f \cdot K_1 \cdot dt & \{ \begin{matrix} i=j \\ i \neq j \end{matrix} \} \\ 0 & \end{cases} \quad (i=2,3,4,\dots; j=1,2,3,\dots) \quad (3)$$

[2] つぎにアンサンブル平均 $\langle \dots \rangle$ を行う。

[2]'そして、 dt と Δt を同定視し、 $o(\Delta t)$ の項を無視して $(d/dt) \langle Y(t) \rangle = \sim$ で記述する。

(1) と (2) は $n=2$ までの場合、それぞれ $D_2=W$ とすると Itô 定理と Itô 確率微分方程式になり、分布、モーメント、解過程 (w.p.1) の意味で拡散過程の理論を保存する。この場合以外、 D_m は Wiener 過程ではない。この新しい不規則入力 dD_m はアンサンブル平均を求めるとき、すなわち積分を作用させるとき (3) の性質をもつ delta-like な関数、 $K_1 (\equiv 1)$ は定数、 f は任意の非積分関数を表わし、また dD_m と $(\Delta t)^{1/m}$ はオーダーが等しいとする。よって (3) における $i \neq j$ は、[2]' が Δt について通例のオーダー評価を意味するので $i > j$ に置換しうる。なお簡潔さのため、本稿では X の境界条件を $X \rightarrow \pm \infty$ の自然境界とする。

モーメント方程式の導出において、(微分則の) [1] は非線形変換について閉じている。

◆上述した変換則の手法により、対象とする確率過程を拡散過程に限らず、確率変数 X の厳密で明示的な n 次モーメント方程式が導出される。すなわちマスター方程式を無限項の Kramers-Moyal 展開で取り扱う場合の n 次モーメント方程式

$$(d/dt) \langle X^n(t) \rangle = \sum_{m=1}^n \binom{n}{m} \langle X^{n-m}(t) \rangle a_m(X,t) \quad (4)$$

が得られ、これは非 Gauss 分布性の不規則入力をもつ確率微分方程式からの導出に対応する。

(1変数のときは) 一般の Markov 過程と拡散過程との相違は3次以上のモーメントで現れる。

◆さらに上記の手法は、マスター方程式による手法では困難な、確率関数のモーメ

ント方程式を幾種類も取り扱える．たとえば D_3 自身の 3 次モーメント方程式は形式的に

$$\left(\frac{d}{dt} \right) \langle D_3(t) \rangle = (1/3!)n(n-1)(n-2) \langle D_3^{-3}(t) \rangle \mid_{n=3} = 1 \quad (5)$$

と導出され、 $\langle D_3(t) \rangle$ の線形的発散を見いだせる．なお (5) は (4) を用いても帰着する ($X = D_3$, $a_3 = 1$, $a_1 = a_2 = a_4 = \dots = 0$).

当然のことながら拡散過程に関しては、(1) および (2) によって

$$\begin{aligned} dW^2 &= (1/2)n(n-1)W^{n-2}dt + nW^{n-1}dW \mid_{n=2} \\ &= dt + 2W dW \quad (Y = X^2 = D_2^2 = W^2) \end{aligned} \quad (6)$$

や部分積分の公式などを得ることが可能で、1 次モーメントに関しては、たとえば $Y = \cos W$ ($X = D_2 = W$) の場合、

$$d(\cos W) = -(1/2)(\cos W)dt - (\sin W)dW \quad (7)$$

を得る．

◆つぎに時間に明示的な確率関数 $Y = \Psi(X, t)$ について、時刻 s ($\leq t$) で実現値 X_s が生じたという条件付きでアンサンブル平均を求めると、提案した変換則の解析手法から

$$\begin{aligned} d\langle Y \mid X_s, s \rangle &= \langle (\partial / \partial t) \Psi(X, t) \\ &+ \sum_{m=1}^n (1/m!) [(\partial / \partial X)^m \Psi(X, t)] a_m(X, t) \mid X_s, s \rangle dt \end{aligned} \quad (8)$$

が結果する．(8) は、 $n = 2$ の場合に Itô-Dynkin の公式の微分型となり、その Kramers-Moyal 展開型の一般化を表わしている ((1), (2) は、 n 次モーメント方程式が $n \rightarrow \infty$ の場合と着目する有限値 n の場合で同じになることを示している)．

◆さらに $Y = \Psi(X, t)$ について、(1) および (2) から次式を導出する．

$dY = [[(\partial / \partial t) + \sum_{m=1}^n (1/m!) a_m(X, t) (\partial / \partial X)^m] \Psi(X, t)] dt + \langle 0 \rangle$ (9)
ここに $\langle 0 \rangle$ は、(3) および [2] によって 0 となる項を示している．また $Y = \Psi(X, t)$ を密度関数 $P(X, t)$ に代えて、 $Y = P(X, t)$ を手法の対象とすると、(9) の $\Psi(X, t)$ は $P(X, t)$ となる．すなわち (9) の右辺における $[\dots]$ は、0 となる場合に「マスター方程式」を生成する．ここに「マスター方程式」は、Kramers-Moyal 展開型に一般化された後向き Kolmogorov 方程式を、換言すればマスター方程式の随伴方程式を意味する．また、この「マスター方程式」は Liouville 方程式に対応する．

なお拡散過程の場合は、 $\langle 0 \rangle$ の項を無視できるので (Δt について発散の問題が元来生じない)、 dY 自身が(流体力学などで用いられる)実質変化分に対応する．

◆非線形変換に着目すると、(2) における不規則入力 dD_m の系に対する効果 $a_m(X, t)$ は $(\Delta t)^{1/m}$ 当たりの(遷移率)モーメントを、 dX_t は右辺で示される非線形関係による非線形出力をそれぞれ表わす．また dD_m は $(\Delta t)^{1/m}$ で変化する成分量を取り出すフィルタ関数となる．