

解析汎関数の球面調和展開

上智大理工 森本光生 (MORIMOTO, Mitsuo)

§1 Fourier 級数

佐藤 [1958] の §9 に, 円周上の超関数 (hyperfunction) の理論, すなわち, 超関数の Fourier 級数の理論の概略が書かれている。それは, 次のようにまとめることが出来る。

$$S = S' = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$$

を単位円周とし, $A(S)$ で S 上の実解析的汎関数の全体を表わす。このとき,

$$(1) \quad \begin{aligned} A(S) \ni f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \\ &\Leftrightarrow \limsup_{|n| \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。 S 上の超関数の全体を $B(S) = A'(S)$ で表わす。このとき,

$$(2) \quad \begin{aligned} B(S) \ni g(e^{i\theta}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta} \\ &\Leftrightarrow \limsup_{|n| \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。

佐藤[1958]には、 α 他、超関数の収束とか、 $Q(S)$ と $\mathcal{S}(S)$ の双対性が論ぜられている。

以上の拡張として、森本[1979]では、円周上の解析汎関数に関して、結果が述べられている。

我々が研究の対象としてきたことは、 S 上の佐藤の結果を d 次元球面 S^d 上に球面調和展開を用いて拡張すること、森本[1983]^(*)で研究を開始した。その結果、球面 S^d の複素化 $\tilde{S}^d$ (複素球面)を考えるのが自然であることがわかり、さらに、一般に解析的集合

$$M_p = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} ; z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{d+1}^2 = p^2 \}$$

上の解析汎関数が球面調和展開を用いて研究できることがわかった。とくに、 $p=0$ の場合、 M_0 は複素光錐であり、 $\tilde{S}^d$ とは、まったく異なる開集合としている。

本稿では、 M_p 上のFourier-Borel変換に関して、いくつかの注意を与えた。

— . — . —
(*) 森本[1983]は、1979年のBanach研究所での講演記録。

§2 記号の準備

$\mathbb{C}^{d+1}$ に z, ζ に対応し,

$$z \cdot \zeta = z_1 \zeta_1 + z_2 \zeta_2 + \cdots + z_{d+1} \zeta_{d+1}$$

とおく。 $p \in \mathbb{C}$ に対応し,

$$M_p = \{z \in \mathbb{C}^{d+1}; z \cdot z = p^2\}$$

とおく。 M_0 は複素光錐 (complex light cone), M_1 は複素単位球面 (complex sphere) である。 $\Rightarrow$ M_p 上の実数論が、我々の興味の対象である。

$L(z)$ で、 $\mathbb{C}^{d+1}$ 上の Lie ノルムを表わす。 $r > 0$ に対応し,

$$\tilde{B}(r) = \{z \in \mathbb{C}^{d+1}; L(z) < r\}$$

とおく。

$$r > |p| (\geq 0) \Leftrightarrow M_p \cap \tilde{B}(r) \neq \emptyset$$

に注意しよう。

$\mathcal{O}(\tilde{B}(r))$ で、 $\tilde{B}(r)$ 上の正則関数の全体を表わす。 さらに、 $\lambda \in \mathbb{C}$ に対応し,

$$\mathcal{O}_\lambda(\tilde{B}(r)) = \{f \in \mathcal{O}(\tilde{B}(r)); (\Delta + \lambda^2)f = 0\}$$

とおく。 $\Delta = \nabla^2$ 。

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial z_{d+1}^2}$$

は、(複素) ラプラス作用素である。

$T \in \mathcal{O}'(\tilde{B}(r))$ の Fourier-Borel 変換 $\mathcal{F}T$ は、次のよう

に定義される。

$$\mathcal{F}T(\xi) = \langle T_z, e^{iz \cdot \xi} \rangle, \quad \xi \in \mathbb{C}^{d+1}.$$

$\mathcal{F}T$ は, $\mathbb{C}^{d+1}$ 上の整関数で, 指数型の増大度をもつことが判るが, さらに, $\mathcal{F}$ の像を決定することが出来る。そのため, 定義を正べる。

$$\text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; [r; L^*])$$

$$= \{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1}); \forall \varepsilon > 0 \exists C \geq 0 \text{ s.t.} \}$$

$$|f(z)| \leq C e^{(r+\varepsilon)L^*(z)} \},$$

ここで, L^* は双対ノルムである。

次の定理は基本的である。

定理 (Martineau [1967])

Fourier-Borel 変換は, 線形位相空間 $\mathcal{E}$ の同型

$$\mathcal{F}: \mathcal{O}(\widehat{B}(r)) \xrightarrow{\sim} \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; [r; L^*])$$

を与える。

§3. M_p 上の正則関数

M_p は解析的集合であるから, その上の正則関数を考えることができる。 $\mathcal{O}(M_p \cap \widehat{B}(r))$ で, M_p の開集合 $M_p \cap \widehat{B}(r)$ 上の正則関数の全体を表わす。また, M_p 上の指数型正則関数の空間を次のように定める。

$$\begin{aligned} & \text{Exp}(M_p; [r, L^*]) \\ &= \{f \in \mathcal{O}(M_p); \forall \varepsilon > 0 \exists C \geq 0 \text{ s.t.} \\ & \quad |f(z)| \leq C e^{(r+\varepsilon)L^*(z)}, z \in M_p\} \end{aligned}$$

$= \alpha$ と $\pm$, 制限写像

$$\alpha_{\lambda p} : \mathcal{O}_\lambda(\tilde{B}(r)) \longrightarrow \mathcal{O}(M_p \cap \tilde{B}(r))$$

および,

$$\tilde{\alpha}_{\lambda p} : \text{Exp}_\lambda(\mathbb{C}^{d+1}; [r, L^*]) \longrightarrow \text{Exp}(M_\lambda; [r, L^*])$$

が自然に定義される。($\lambda, p \in \mathbb{C}$ の使い分けは, 次節で明らかにする。)

和田 [1988] には, 次の定理 2.1 および 3.1 がそれぞれ証明されている。

定理 2.1 $\lambda, p \in \mathbb{C}$ とする。すべての $k \in \mathbb{Z}^+$ に対し,

$$(B_{\lambda p}) \quad (\lambda p)^{-k-(d-1)/2} J_{k+(d-1)/2}(\lambda p) \neq 0$$

なる条件を仮定する。このとき, 制限写像

$$\alpha_{\lambda p} : \mathcal{O}_\lambda(\tilde{B}(r)) \longrightarrow \mathcal{O}(M_p \cap \tilde{B}(r))$$

は線形位相空間としての同型を与える。但し, $r > |p|$ 。

注意 定理 2.1 の特別な場合は, 1988 年以前より知られていた。 $\lambda = 0$ の場合 (調和関数の場合) は, 森本 [1983] で証明された。関連文献として, 橋爪等 [1972] をあげる。

$\rho = 0$ の場合 (光錐の場合) は, 和田 [1986], 和田・森本 [1987] で証明された。関連文献として, 小幡・岡本 [1974] をあげる。これらの二つの場合と統合して, 和田涼子の学位論文, 和田 [1988] で定理 2.1 が定式化され, 証明されたのである。

もう一つの和田 [1988] の定理は, 次の, 指数型正則関数の制限に関する定理である。

定理 3.1 λ, ρ とする。すべての $k \in \mathbb{Z}^+$ に対し, 条件 $(B_{\lambda\rho})$ を仮定する。 α と $\pm$, 制限写像

$$\tilde{\alpha}_{\lambda\rho} : \text{Exp}_\rho(\mathbb{C}^{d+1}; [r; \mathbb{L}^*]) \rightarrow \text{Exp}(M_\lambda; [r; \mathbb{L}^*])$$

は線形位相空間の同型である。但し, $r > |\rho|$ 。

§4. Fourier-Borel 変換

Fourier-Borel 変換を経由することにより, 定理 2.1 と定理 3.1 が同値な命題であることを示したいと思う。

定理 2.1 を仮定して, 定理 3.1 を導いてみよう。

任意の $k \in \mathbb{Z}^+$ に対し, 条件 $(B_{\lambda\rho})$ を仮定すれば, 定理 2.1 より, $r > |\rho|$ のとき

$$(1) \quad \alpha : \mathcal{O}_\lambda(\widehat{B}(r)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(M_\rho \cap \widehat{B}(r))$$

である。(1) で λ は ρ に移せば,

$$(2) \quad \alpha : \mathcal{O}'_\lambda(\widehat{B}(r)) \xleftarrow{\sim} \mathcal{O}'(M_\rho \cap \widehat{B}(r))$$

となる。(2)は, Fourier - Borel 変換により,

$$(3) \quad \mathcal{F}(\mathcal{O}'_{\lambda}(\tilde{B}(r))) \xleftarrow{\sim} \mathcal{F}(\mathcal{O}'(M_P \cap \tilde{B}(r)))$$

となる。

この始集合と, 終集合は何であるか考えてみよう。

$$(4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{B}(r)) \xrightarrow{(\xi^2 - p^2) \cdot} \mathcal{O}(\tilde{B}(r)) \xrightarrow{\text{rest}} \mathcal{O}(M_P \cap \tilde{B}(r)) \rightarrow 0$$

は完全列である。双対に移せば,

$$(5) \quad 0 \leftarrow \mathcal{O}'(\tilde{B}(r)) \xleftarrow{(\xi^2 - p^2) \cdot} \mathcal{O}'(\tilde{B}(r))$$

$$\leftarrow \mathcal{O}'(M_P \cap \tilde{B}(r)) \leftarrow 0$$

も完全列である。(5)と, Fourier - Borel 変換すれば,

$$(6) \quad 0 \leftarrow \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; [r; L^*]) \xleftarrow{-\Delta - p^2} \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; [r; L^*]) \leftarrow \mathcal{F}(\mathcal{O}'(M_P \cap \tilde{B}(r))) \leftarrow 0$$

が完全列となる。そこで, Martineau の定理を用いた。故に, (3)の始集合について,

$$(7) \quad \mathcal{F}(\mathcal{O}'(M_P \cap \tilde{B}(r))) \cong \text{Exp}_P(\mathbb{C}^{d+1}; [r; L^*])$$

なる同型を得る。

他方, $\mathcal{O}_{\lambda}(\tilde{B}(r))$ の定義より,

$$(8) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\lambda}(\tilde{B}(r)) \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{B}(r)) \xrightarrow{\Delta + \lambda^2} \mathcal{O}(\tilde{B}(r)) \rightarrow 0$$

は完全列である。双対に移せば,

$$(9) \quad 0 \leftarrow \mathcal{O}'_{\lambda}(\tilde{B}(r)) \leftarrow \mathcal{O}'(\tilde{B}(r)) \xleftarrow{\Delta + \lambda^2} \mathcal{O}'(\tilde{B}(r)) \leftarrow 0$$

なる完全列を得る。(9)より, Fourier-Borel 変換により,

$$(10) \quad 0 \leftarrow \mathcal{F}(\mathcal{O}'_{\lambda}(\tilde{B}(r))) \leftarrow \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; [r; L^*]) \\ \xleftarrow{-S^2 + \lambda^2} \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}; [r; L^*]) \leftarrow 0$$

なる完全列を得る。こゝでも, Martineau の定理を用いた。

故に, (3) の終集合に關して,

$$(11) \quad \mathcal{F}(\mathcal{O}'_{\lambda}(\tilde{B}(r))) \cong \text{Exp}(M_{\lambda}; [r; L^*])$$

なる同型が得られる。

(7) と (11) の同型を (3) に代入すると,

$$(12) \quad \text{rest} : \text{Exp}(M_{\lambda}; [r; L^*]) \xleftarrow{\sim} \text{Exp}_p(\mathbb{C}^{d+1}; [r; L^*])$$

は同型であることがわかる。これは, 定理 3.1 の主張に他ならない。

定理 3.1 より定理 2.1 も, 同様に導くことができる。

まとめ (4) をたゞに, (8) と横に書いてみると, 次の図式(1)を得る。図式(1)より双対に移り, Martineau の定理により, Fourier-Borel 変換の像を書き直すと, 図式(2)になる。(6)が下から上へ, (10)が横向きに書かれている。

こゝで, 同型 (7) と (11) が成り立つのである。

(図式 1)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathcal{O}(\tilde{B}(r)) & & \\
 & & & & (\xi^2 - \rho^2) \downarrow & & \\
 0 \rightarrow \mathcal{O}_\lambda(\tilde{B}(r)) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\tilde{B}(r)) & \xrightarrow{\Delta + \lambda^2} & \mathcal{O}(\tilde{B}(r)) & \longrightarrow & 0 \\
 & \searrow \sim & & & \downarrow & & \\
 & \text{(Thm 2.1)} & & & \mathcal{O}(M_P \cap \tilde{B}(r)) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

(図式 2)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}, [r; L^*]) & & \\
 & & & & -\Delta - \rho^2 \uparrow & & \\
 0 \leftarrow \mathcal{F}(\mathcal{O}'_\lambda(\tilde{B}(r))) & \leftarrow & \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}, [r; L^*]) & \xleftarrow{-\xi^2 + \lambda^2} & \text{Exp}(\mathbb{C}^{d+1}, [r; L^*]) & \xleftarrow{\quad} & 0 \\
 & \nearrow \sim & & & \uparrow & & \\
 & \text{(Thm 3.1)} & & & \mathcal{F}(\mathcal{O}'(M_P \cap \tilde{B}(r))) & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

§5 M_p 上の Fourier-Borel 変換

$r > |p|$ とし, (7) より,

$$\mathcal{F}: \mathcal{O}'(M_p \cap \tilde{B}(r)) \xrightarrow{\sim} \text{Exp}_p(\mathbb{C}^{d+1}; [r; L^*])$$

であり, すべて $k \in \mathbb{Z}^+$ に対し, (B_{kp}) を仮定すれば,
さらに, 定理 3.1 より,

制限: $\text{Exp}_p(\mathbb{C}^{d+1}; [r; L^*]) \xrightarrow{\sim} \text{Exp}(M_\lambda; [r; L^*])$
が成立している。 $\Rightarrow$ $\alpha =$ の写像を合成すれば, 次の定理を得る。

定理 $r > |p|$ とする。 すべて $k \in \mathbb{Z}^+$ に対し, (B_{p^2})
を仮定する。 $\Rightarrow$ α と $\mathcal{F}$,

$$\text{Fourier}: \mathcal{O}'(M_p \cap \tilde{B}(r)) \longrightarrow \text{Exp}(M_p; [r; L^*])$$

および

$$\text{Fourier}: \text{Exp}(M_p; [r; L^*]) \longrightarrow \mathcal{O}'(M_p \cap \tilde{B}(r))$$

が成り立つ。 $\Rightarrow$ α 線形位相空間としての同型が成り立つ。

換言すれば, M_p 上では (とくに, 複素光錐 M_0 および複素
単位球面 M_1 上では) Fourier-Borel 変換は Martineau の
双対性を与える。

§5 に関する詳細は, 森本-和田 [1988] を参照されたい。

文 献

佐藤[1958], 佐藤幹夫: 超函数の理論について, 数学,
10 (1958), 1-27.

Martineau [1967], A. Martineau: Équations
différentielles d'ordre infini, Bull. Soc. Math. France,
95 (1967), 109-154.

橋爪等[1972], M. Hashizume, A. Kowata, K. Minemura,
and K. Okamoto: An integral representation of an
eigenfunction of the Laplacian in the Euclidean space,
Hiroshima Math. J., 2 (1972), 535-545.

小幡・岡本[1974], A. Kowata and K. Okamoto; Harmonic
functions and the Borel-Weil theorem, Hiroshima
Math. J., 4 (1974), 89-97.

森本[1979], M. Morimoto: A generalization of the
Fourier-Borel transformation for the analytic
functionals with non-convex carrier, Tokyo J. Math.
2 (1979), 301-322.

森本[1983], M. Morimoto: Analytic functionals on
the sphere and their Fourier-Borel transformations,
Complex Analysis, Banach Center Publications 11 PWN-
Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983, 223-250.

和田 [1986], R. Wada: On the Fourier-Borel transformations of analytic functionals on the complex sphere, *Tōhoku Math. J.* 38 (1986), 417-432.

和田・森本 [1987], R. Wada and M. Morimoto: A uniqueness set for the differential operator $\Delta_z + \lambda^2$, *Tokyo J. Math.*, 10 (1987), 93-105.

和田 [1988], R. Wada: Holomorphic functions on the complex sphere, *Tokyo J. Math.*, 11 (1988), 205-218.

森本・和田 [1988], M. Morimoto and R. Wada: Analytic functionals on the complex light cone and their Fourier-Borel transformations, to appear in "Prospect of Algebraic Analysis".