

氏 名	高 安 晋 一 郎
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2008 号
学位授与の日付	平成 11 年 3 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研究科・専攻	理 学 研 究 科 数 学 専 攻
学 位 論 文 題 目	On stable summands of Thom spectra of $B(\mathbb{Z}/2)^n$ associated to Steinberg module ($B(\mathbb{Z}/2)^n$ 上のトム・スペクトルのスタインバーグ加群に関連する安定直和因子について) (主査) 論文調査委員 教授 西田 吾郎 教授 河野 明 講師 清水 勇二

論 文 内 容 の 要 旨

高安晋一郎氏の主論文の内容は次の通りである。

階数 n の基本アーベル 2 群を $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ 、またこの群の分類空間 $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ と表わす。群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の実表現は分類空間 $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ 上の実ベクトル束を定めるが、特に自明成分を除いた正則表現の定める実ベクトル束を α_n と表わす。群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の線形変換群 $GL_n(\mathbb{F}_2)$ は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の正則表現に自然に作用することから、 $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ 上の実ベクトル束 α_n は群 $GL_n(\mathbb{F}_2)$ の作用を持つ同変ベクトル束となる。 k を整数とすると、負の k に対しても同変ベクトル束 $k\alpha_n$ の Thom 複体 ($B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n)^{kan}$ が群 $GL_n(\mathbb{F}_2)$ の作用を持つ安定複体として定義される。群 $GL_n(\mathbb{F}_2)$ の群環 $\mathbb{F}_2[GL_n(\mathbb{F}_2)]$ のべき等元 e_i 達による直和分解は、 $(B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n)^{kan}$ の自己安定写像 e_i に関するテレスコープ X_i 達によるウェッジ分解

$$(B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n)^{kan} \simeq \bigvee X_i$$

を与えるが、特に Steinberg 表現に対応するべき等元 e_n のウェッジ成分を $M(n)_k$ と表わす。

高安晋一郎氏は主論文において、この安定複体 $M(n)_k$ の厳密な構成とそのホモトピー型の徹底した研究を行っている。まず、 $k=0$ のとき、この安定複体は Mitchell と Priddy により研究され、特にそのコホモロジーは Steenrod 代数上の加群の構造が決定されている。Thom 複体 $(B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n)^{kan}$ のコホモロジーは、 q を実ベクトル束 α_n の Euler 類とすると、環 $\mathbb{F}_2[\chi_1, \dots, \chi_n][q^{-1}]$ において q^k で生成された自由 $\mathbb{F}_2[\chi_1, \dots, \chi_n]$ 加群である。高安氏はまず、このコホモロジーにおける Steenrod 代数および、Steinberg べき等元の作用の計算から、一般の n 、 k に対し安定複体 $M(n)_k$ のコホモロジー $H^*(M(n)_k)$ を決定した。次に、群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の階数が 1 以下の部分基本アーベル 2 群達のなす半順序集合 $C_{n,l}$ を考える。分類空間 $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ および Thom 複体の構成を、この半順序集合から定まるホモトピー極限に適用し、さらに Steinberg べき等元を取ることで、安定複体 $M(n,l)_k$ を構成した。定義より、 $M(n,n)_k = M(n)_k$ であり、また、Steinberg べき等元の性質から、 $l < n-1$ のとき $M(n,l)_k = *$ である。さらに、上記のコホモロジーの結果と、半順序集合 $C_{n,l}$ の包含関係を巧みに用いることにより、次の安定ホモトピー同値

$$M(n, n-1)_k \simeq \Sigma^k M(n-1)_{2k+1}$$

が存在することを示した。同変ベクトル束の包含写像 $k\alpha_n \rightarrow (k+1)\alpha_n$ は写像 $M(n)_k \rightarrow M(n)_{k+1}$ を定めるが、上記の結果を用いて次の主定理を示した。

定理 写像 $M(n)_k \rightarrow M(n)_{k+1}$ のコファイバーは $\Sigma^{k+1} M(n-1)_{2k+1}$ で与えられる。

論文審査の結果の要旨

高安晋一郎氏の主論文における研究の動機および背景は次の通りである。

階数 n の基本アーベル 2 群 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の分類空間 $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の安定ホモトピー型の研究は特に球面の安定ホモトピー群の研究に関連する重要な課題である。 $n=1$ の場合は、Kahn-Priddy の定理等の深い結果が知られているが、これらの結果は $-\infty$ 次元までのセルを許す Mahowald spectrum と呼ばれる安定複体 P_∞ が安定球面 S^{-1} と安定ホモトピー同値であるという Lin の結果に集約される。安定複体 P_∞ は $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ 上の標準線束を ξ とするとき、Thom 複体 $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{k\xi}$, $k < 0$ の射影極限で与えられる。Mahowald spectrum の自然な階層付けにより、球面の安定ホモトピー群からそれ自身に収束するスペクトル系列が構成され、これを用いてルート不変量と呼ばれる重要な不変量が定義される。しかしながら、 $n \geq 2$ の場合は計算の困難さからあまり多くのことは知られていない。 $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の安定ホモトピー型の一般論としては、一般線形群 $GL_n(\mathbb{F}_2)$ の各既約モジュラー表現に対応する群環 $\mathbb{F}_2[GL_n(\mathbb{F}_2)]$ のべき等元 e_i に関するテレスコープ X_i 達による安定分解 $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \simeq \bigvee X_i$ が存在することが知られている。従って、 $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の安定ホモトピー型の研究は、各既約成分 X_i の安定ホモトピー型の研究に帰着される。 $GL_n(\mathbb{F}_2)$ の既約モジュラー表現達の中で、Steinberg 表現は唯一つの射影的表現であり、その性質が良く知られている。このため、対応する $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の成分 $M(n)$ は Kuhn, Mitchell, Priddy 等により多くの研究がなされている。しかしながら、これまでの研究は分類空間 $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ そのものの Steinberg 成分の安定ホモトピー型の研究に止まっており、階数 1 のときに上で述べたような Mahowald spectrum の一般化、およびその階層付けについてはこれまで知られていない。

高安氏は単に分類空間 $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ を考えるのではなく、 $B(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ 上の被約正則表現の負数も込めた整数倍のベクトル束の Thom 複体の Steinberg 成分 $M(n)_k$ を考え、自然な写像

$$\rightarrow M(n)_k \rightarrow M(n)_{k+1} \rightarrow$$

に関する射影極限 $M(n)_\infty$ が一般の階数における Mahowald spectrum の役割を果たすであろうと考えた。この spectrum は安定球面 S^{-1} と安定ホモトピー同値であろうと予想されているが、これが球面の安定ホモトピー群の計算に有効であるためには、 $(n)_\infty$ の階層付けにおける階差、つまり、上の写像 $M(n)_k \rightarrow M(n)_{k+1}$ のコファイバーの構造を求めなければならない。

高安氏の主定理は安定ホモトピー同値

$$M(n)_{k+1}/M(n)_k \simeq \Sigma^{k+1} M(n-1)_{2k+1}$$

の存在を主張しているが、これは階数 n の問題を階数 $n-1$ の問題に帰着させることを可能にしており、大変興味深い結果である。また、この結果からすべての階数に渡り複合化されたルート不変量が定義され、球面の安定ホモトピー論に強力な手法を与えるものと思われる。

よって本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認め、合格と判定した。