

二つの有限整数パラメータを持つ寺井の指数方程式について

On Terai's exponential equation with two finite integer parameters¹

群馬大学 大学院理工学府 宮崎 隆史 (Takafumi Miyazaki)
Faculty of Science and Technology, Gunma University

1 序

次の形で与えられる不定方程式を考える.

$$(abc) \quad a^x + b^y = c^z.$$

ここで, 底数 a, b, c は既知の自然数, 指数 x, y, z は未知の自然数である. この方程式は通常, 不定方程式とは異なり, 指数が変数であるので, 指数型と称される. 通常, 底数 a, b, c はどの二つも互いに素であり 1 より大きいことが前提とされる (このことはこの稿でもいつも仮定される). 方程式 (abc) の歴史や既知の事実などは, 過去にこの講究録に記してきたので, そちらを参照して頂きたい ([13, 14, 15, 16]). ただし次の基本的な事実だけを記しておく.

Fact. 方程式 (abc) の解の大きさは, 底数だけによって定まる明示的な上限評価が可能である. 特に, 解の個数は有限である.

本稿では寺井伸浩氏によって提起された次の問題を扱う.

Conjecture. 方程式 (abc) が条件 $\min\{x, y, z\} > 1$ を満たす解 (x, y, z) を一つ持つと仮定する. このとき方程式 (abc) はその他の解を持たない. ただし下記の場合を除く.

$$\{a, b\} = \{2, 7\}, c = 3 \quad \text{または} \quad \{a, b\} = \{2, 2^{p-2} - 1\}, c = 2^{p-2} + 1.$$

ここで, p は 4 以上の任意の整数である.

Remark. 上記の Conjecture において例外にされた場合に関連して, 次の等式が成り立つことに注意する.

$$2^5 + 7^2 = 3^4; \quad 2 + 7 = 3^2,$$

$$2^p + (2^{p-2} - 1)^2 = (2^{p-2} + 1)^2; \quad 2 + (2^{p-2} - 1) = 2^{p-2} + 1.$$

Conjecture は寺井氏の論文 [20] に端を発している. その後, 例外ケースについての微修正が加わり, 現在の形で述べられている ([3, 10, 23] 等を参照). Conjecture については, たくさんの部分的な結果が知られているが (いずれも肯定的な結論である), 未だに未解決である. 底数 a, b, c に課せられている条件は明らかに次の様に述べる事が出来る: 等式 $a^p + b^q = c^r$ がある整数 $p > 1, q > 1, r > 1$ について成り立つ. よって, その様な三つ組み (p, q, r) を先に固定し, Conjecture を考察することが出来る. この様な方向性に進む際, その (p, q, r) に対応する三つ

¹本研究は科研費 (No.16K17557) の助成を受けたものである.

組み (a, b, c) が無数に存在する場合を考察することが本質的であると考えるのは自然であろう。その様な三つ組み (p, q, r) の中で最も簡単なものは $p = q = r = 2$, つまり, (a, b, c) が原始ピタゴラス数を成す場合である。この場合には Conjecture は Jeśmanowicz の予想 [7] に一致する。寺井氏は, 氏の論文 [20, 21, 22] において, Jeśmanowicz 予想の類似・一般化問題として Conjecture を提起し, 特に底数が $a^2 + b^2 = c^r$ を満たす場合に方程式 (abc) の研究を開始した。ここで, $r (> 1)$ は奇数であり, 特に $r \in \{3, 5\}$ の場合である。氏のこの先駆的な研究の後に, 専ら $p = q = 2$ の場合に, Conjecture は他の研究者たちに研究されるようになり現在に至る。本稿の研究内容もこの場合を扱う。

ここからは, p, q は共に 2 に等しい場合に限定して Conjecture を考える。この場合に対応する (a, b, c) は無数に存在する。実際, それらは次の様に二つのパラメータを持つ表示が可能である (条件式の左辺がガウスの整数環上で互いに素な二つの整数に分解する事実を用いる)。

$$(*) \quad a = |\operatorname{Re}(m + n\sqrt{-1})^r|, \quad b = |\operatorname{Im}(m + n\sqrt{-1})^r|, \quad c = m^2 + n^2.$$

ここで, m, n は互いに素な偶奇が異なる整数で, $m > n > 0$ を満たす。(今の場合の) Conjecture に関する先行研究では, 主に次の二つの特殊な場合について考察が行われている: $n = 1$ あるいは $mn \equiv 2 \pmod{4}$ 。第一の場合については, [4, 11, 12, 18, 20, 21], 第二の場合については [5, 23] 等をそれぞれ参考文献として挙げておく。この稿では第一の場合を扱う。

以下では, 表示 (*) において, $n = 1$ と仮定する。すると, 今の場合に限定した Conjecture は下記の様に述べられる。

Conjecture n1. $r > 1$ かつ $2 \mid m$ を満たす任意の自然数の組 (r, m) に対し, a, b, c を下記の様に定める。

$$a = |\operatorname{Re}(m + \sqrt{-1})^r|, \quad b = |\operatorname{Im}(m + \sqrt{-1})^r|, \quad c = m^2 + 1.$$

このとき方程式 (abc) は $(x, y, z) = (2, 2, r)$ 以外に解を持たない。

本稿の結果を述べる前に, 上記の Conjecture n1 の先行研究について, m になるべく条件を付けない場合に関するものを主として挙げる。始めに, Lu [11] は $r = 2$ である場合に Conjecture n1 を証明した。(時代は随分と進み) 前述した寺井氏の先駆的な研究の後で, Cao と Dong [4] は $r \in \{3, 5\}$ の場合を解決した。筆者 [18] は, Conjecture n1 を r が偶数である場合を考察し, 特に $r \equiv 4 \pmod{8}$ の場合を解決した。次の驚くべき結果は 2012 年に Luca [12] によって証明された。

Proposition 1. ある計算可能な絶対定数が存在し, もし r または m の少なくとも一方がその定数を超えていれば, Conjecture n1 は正しい。

この Proposition 1 によって, Conjecture n1 を解くためには, 有限個の各組 (r, m) について方程式 (abc) を解けば十分であることが分かる。特に, 本稿の始めに事実として述べたことから, その各々の方程式の解 x, y, z は有限の範囲の中に収まる。この様な意味で, Luca は Conjecture n1 をほとんど解決した, と言っても良いかもしれない。Luca の手法では, 既存の方法に加え, 新たに $c = m^2 + 1$ の素因数の考察をすることが肝要である。実際, 彼は, 方程式から導かれる特別な合同式と対数一次形式の p 進版を巧みに組み合わせて, (例外解が存在するという仮定の元で)

c の素因数の非自明な情報を導き出している．特に，それら素因数の大きさ，個数，およびそれらの各々を法とする2の乗法位数の大きさ，である．

Luca のこの手法のほとんどの部分は，前提条件 $n = 1$ に強く依存していたが，筆者 [17] は， c の素因数を法とする2の乗法位数を利用する部分を，単純な初等的議論に置き換え（このことにより計算量が随分と減る），Proposition 1 の主張する エフェクティブな定数を次の様に明示的に評価した．

Proposition 2. $r > 10^{74}$ または $m > 10^{34}$ ならば Conjecture n1 は正しい．

本研究の主定理では，上記の結果が次の様に改良された．

Theorem 1. $r > 10^{14}$ または $m > 10^{23}$ ならば Conjecture n1 は正しい．

この定理は次の結果から導かれる．

Theorem 2. 下記の各条件のもとで Conjecture n1 は正しい．

- (I) $r > 10^{10}$ かつ $m \geq r$.
- (II) $r > 10^{14}$ かつ $r > m$.

上記の改良は，いくつかの要素から成るが，それらの内で一番重要なことは，次の様な二つの場合に問題を分けて考えたことにある．‘ r/m が $\pi/2$ より少し小さい’ と ‘それ以外’．これらは Theorem 2 のケース (I), (II) にそれぞれ対応する．始めの場合では， a と b の対数値が非常に正確に評価することが出来る．実際，これらの値は，Proposition 1 の証明の至る所で必要になり，その評価が良くなると（存在が主張されている）絶対定数の評価も良くなる．第二の場合では， c の素因数の個数が非常に少ないことを示すことが出来る．このことから，特に c は大きい素因数を有することが分かり，それを用いた p 進対数一次形式の評価を利用することで，こちらの場合でも最終的な絶対定数の評価も比較的良くなる．これらの場合分けと合わせて，Proposition 1 の結論の利用，その証明のいくつかの議論の改良，および対数一次形式の理論のより良い適用を実行することで，Theorem 2 の証明が成される．以下では，その証明の概略について，いくつかの節に分けて述べる．

次節では，Theorem 2 の証明における前提条件等をまとめる．後に続く議論では，いつも方程式の例外解について述べられていることに注意する．最終的には，この解について得られる下限と上限を比べることで得られる不等式が，方程式のパラメータ (r, m のこと) の少なくとも一つが大きい場合に成立しないことを理由にして，証明が背理法によって成される．3 節では，解の初等的な下限について述べる．4 節では，(I) の場合に， a, b の対数値を正確に評価する．この次の節では，(II) の場合に同様のことを行う．ここで，対数値の評価には，A.Baker の有名な対数一次形式の理論を用いる．6 節では，解に付随して現れるある二つの対数の一次形式の値の評価を行い，この次節では，解の上限評価を行う．これらも前述した Baker の理論に負う．ここで，前者の評価の際に，ある無理数の有理近似を考え連分数論を用いる部分があるが，その議論には（計算方法的な）改良の余地があるのでその部分について言及している．最終節では (I) の場合についての証明を詳しく述べ，Theorems 1,2 の証明を概説する．各節の内容の詳細（特に省略した Baker 理論の適用法）については [12, 17, 19] を参照されたい．

2 準備

自然数 r と m は次の条件を満たす.

$$r > 1, \quad m \equiv 0 \pmod{2}.$$

これらの自然数に対し, 整数 $A = A(r, m)$ と $B = B(r, m)$ を次の様に定義する.

$$A = (m + i)^r \text{ の実部の絶対値, } B = (m + i)^r \text{ の虚部の絶対値.}$$

ただし $i = \sqrt{-1}$ である. さらに

$$a = |A|, \quad b = |B|, \quad c = m^2 + 1$$

と置く. すると a, b, c はどの二つも互いに素な整数 > 1 であり次を満たす.

$$a^2 + b^2 = c^r.$$

この条件の元で, 次の方程式を考える.

$$(rm) \quad a^x + b^y = c^z.$$

この方程式は‘自明な’解 $(x, y, z) = (2, 2, r)$ を持つことを思い出しておく.

方程式 (rm) の (自然数) 解 (x, y, z) に対し,

$$\Delta = rX - 2z$$

と置く. ここで,

$$X = \max\{x, y\}.$$

初等的な考察によって, Δ はゼロ以上であり, もしそれがゼロであるならば解 x, y, z は自明なものに一致することが確認できる. 従って, Δ が正であることを仮定し, 矛盾を導ければよい. 以下では, (x, y, z) は方程式 (rm) の一つの解で条件 $\Delta > 0$ を満たすものとする. (例外解については, $x \neq y$ である.)

3 解の大きさの下限

ここでは, $n = 1$ と仮定しないどのような場合にも成立する, 解の下限評価を行う.

Lemma 1. 次の不等式が成り立つ.

$$X > \min\{x, y, 2\} \cdot \frac{r \log c - \log 2}{4 \max\{W_a, W_b\}}.$$

ここで, W_a, W_b は次の様に定義される正数である.

$$W_a = \frac{r}{2} \log c - \log a, \quad W_b = \frac{r}{2} \log c - \log b.$$

証明. 条件式 $a^2 + b^2 = c^r$ と方程式 $a^x + b^y = c^z$ において, 法 $b^{\min\{y, 2\}}$ の合同式を考える. すると, $a^2 \equiv c^r, a^x \equiv c^z$ を得る. これらより $c^{2z} \equiv a^{2x} \equiv c^{rx}$ となるので, c が b に素であることから

$$c^{|rx-2z|} \equiv 1 \pmod{b^{\min\{y, 2\}}}.$$

ここで、左辺は、その指数部分が正である場合には、右辺より大であること、特に合同式の法より大きくなる。同様に、法 $a^{\min\{x,2\}}$ の合同式を考えることで

$$c^{|rx-2z|} \equiv 1 \pmod{a^{\min\{x,2\}}}.$$

これらの合同式と Δ の定義から、

$$\Delta > \min\{y, 2\} \cdot \frac{\log b}{\log c} \quad (X = x \text{ のとき}),$$

$$\Delta > \min\{x, 2\} \cdot \frac{\log a}{\log c} \quad (X = y \text{ のとき}).$$

この不等式と、自明な不等式 $\max\{a^x, b^y\} < c^z$ を組み合わせることで、主張する X の下限評価が得られる。(証明終わり)

この補題から、 W_a, W_b の値を正確に評価する (共に小さいことを示す) ことが、解のより良い下限評価を可能にすることがわかる。

4 a と b の対数値の評価 ～(I) の場合～

以下では、複素数 α を次の様に定める。

$$\alpha = m + i.$$

すると α は次の様に極表示される。

$$\alpha = c^{1/2}(\cos \theta + i \sin \theta).$$

ここで、 $\theta = \text{Arctan}(1/m)$. また、 a と b の定義から

$$a = |\text{Re } \alpha^r| = c^{r/2} |\cos r\theta|, \quad b = |\text{Im } \alpha^r| = c^{r/2} |\sin r\theta|.$$

Lemma 2. $m \geq r$ を仮定する。このとき次の不等式が成り立つ。

$$\max\{W_a, W_b\} < \log(2m/r).$$

特に、次の不等式が成り立つ。

$$X > \min\{x, y, 2\} \cdot \frac{r \log c - \log 2}{4 \log(2m/r)}.$$

証明. まず、 θ について、次の不等式が成り立つことに注意する。

$$0.9/m < \theta < 1/m.$$

仮定より、 m は $(2/\pi)r$ より大きいので、容易に $r\theta$ が $\pi/2$ 未満の正数であることが確認できる。よって、 W_a と W_b は次の様に表される。

$$W_a = -\log \cos r\theta, \quad W_b = -\log \sin r\theta.$$

不等式 $0 < r\theta < r/m \leq 1$ と $\theta > 0.9/m$ を用いると、

$$\cos r\theta > \cos 1 > 1/2, \quad \sin r\theta > \sin(1) \cdot r\theta > (1/2)r/m.$$

以上のことから主張する第一の不等式が得られる。残りの X の下限評価は Lemma 1 から従う。(証明終わり)

5 a と b の対数値の評価 ～(II) の場合～

複素数 γ を次の様に定める.

$$\gamma = \alpha / \bar{\alpha}.$$

以下では, γ と -1 の対数の主値を考える. つまり

$$\log \gamma = 2\theta i, \quad \log(-1) = \pi i.$$

Lemma 3. $m > 10^{11}$ を仮定する. 二つの対数の一次形式 $A (\neq 0)$ を次の様に定める.

$$A = b_2 \log \gamma - b_1 \log(-1).$$

ここで, b_1, b_2 は自然数であり, $b_2 \geq m b_1$ を満たす. このとき次の不等式が成り立つ.

$$\log |A| > -W(\log c)(\log b_2)^2.$$

ここで, $W = 17.7$.

この補題は, [8, Theorem 1] のパラメータを適当に定めることで証明される. 特に, 条件式 $b_2 \geq m b_1$ が有効に用いられる. 大雑把に言うと, $|A|$ の対数の下限は, 対数の真数部分 $\gamma, -1$ の (絶対的対数) 高さと呼ばれる量たち, 係数 b_1, b_2 の最大値の対数値の二乗, および (負の) 絶対定数を乗じたものである.

Lemma 4. $10^{10} < r < 10^{74}$ を仮定する. このとき次の不等式が成り立つ.

$$\max\{W_a, W_b\} < W(\log r)^2(\log c).$$

特に, 次の不等式が成り立つ.

$$X > \min\{x, y, 2\} \cdot \frac{r \log c - \log 2}{4W(\log r)^2(\log c)}.$$

証明. θ は m だけに依存する数であることを思い出しておく. いま, $\sin$ あるいは $\cos$ の根の内, $r\theta$ に一番近いものを $j\pi/2$ とすれば (j は非負整数), 一次のテイラー展開等によって,

$$\min\{|\cos(r\theta/2)|, |\sin(r\theta/2)|\} \geq \frac{2}{\pi} |r\theta - j\pi/2|.$$

よって, W_a, W_b の定義から

$$\max\{W_a, W_b\} < \log \pi - \log |2r\theta - j\pi|.$$

補題を示すためには, j は正で, $|2r\theta - j\pi|$ が比較的に小さい場合を考えればよいことが分かる. 例えば, 不等式

$$(cf) \quad |2r\theta - j\pi| < \frac{\pi}{r^{10}}$$

が成り立つと仮定してよい. $\theta < 1/m$ なので, 上記の不等式から, j は r/m 以下であることがすぐに分かる. ここで, Lemma 3 を用いる為に, 二つの対数の一次形式 A を次の様に定める.

$$A = r \log \gamma - j \log(-1).$$

すると, $\Lambda = (2r\theta - j\pi)\sqrt{-1}$ なので

$$\max\{W_a, W_b\} < \log \pi - \log |\Lambda|.$$

Lemma 3 より, $m \leq 10^{11}$ の場合を考えれば十分である. そこで, すべてのその様な各 m に対し, 不等式 (cf) が成立しないことを示して証明を終えよう. 不等式 (cf) の両辺を $r\pi$ で割ることで

$$\left| \xi - \frac{j}{r} \right| < \frac{1}{r^{11}}.$$

ここで, $\xi = \xi(m) = 2\theta/\pi = (2/\pi)\text{Arctan}(1/m)$. 上記の不等式は (無理) 数 ξ が有理数 j/r によって非常に良く近似されていることを意味する. 特に右辺は $1/r^2$ の半分以下であるので, 連分数論の有名な Legendre の定理から, j/r は ξ の近似分数となる. それが第 t 番目の近似分数であるとし, $j/r = p_t/q_t$ と書けば,

$$\frac{1}{(a_{t+1} + 2)q_t^2} < \left| \xi - \frac{j}{r} \right| < \frac{1}{r^{11}}.$$

ここで, a_{t+1} は ξ の $(t+1)$ 番目の部分商である. 上記不等式と, 自明な不等式 $q_t \leq r (< 10^{74})$ から, 部分商 a_{t+1} が非常に大きいものであることが結論される. そこで, 10^{11} 以下の各偶数 m に対し, q_t が 10^{74} を超えない各 (有限個の!) t に対し部分商 a_{t+1} が巨大になるかどうかを計算で確認すると, そうはならないことが分かる (Pari/Gp で一週間程度). 残りの X の下限評価は Lemma 1 から従う. (証明終わり)

Lemma 4 の証明の中で, “不等式 (cf) が成り立たない”ことを連分数論を用いて確認した. もし m が 10^{14} 程度まで同じことが確認できると, Lemma 4 の Λ の ‘Baker 理論による評価’ は不要になり, Theorem 1 (あるいは Theorem 2 の (II)) の r の必要下限は 10^{10} まで落ちることが分かる.

6 解に付随するある対数一次形式

解 (x, y, z) に依存する二つの対数の一次形式 $\Lambda_0 (> 0)$ を次の様に定める.

$$\Lambda_0 = z \log c - \max\{x \log a, y \log b\}.$$

$\Lambda_0 < \log 2$ なので Λ_0 の対数値は負である. また, 数 S を次の様に定める.

$$S = \begin{cases} y/\log c & (a^x < b^y \text{ のとき}), \\ x/\log c & (a^x > b^y \text{ のとき}). \end{cases}$$

Lemma 5. $r > 10^{10}$ かつ $S > 10^7$ を仮定する. もし $r > 10^{14}$ または $m > 10^{10}$ ならば, 次の不等式が成り立つ.

$$\log \Lambda_0 > \begin{cases} -C_1 (\log b)(\log c) h^2 & (a^x < b^y \text{ のとき}), \\ -C_1 (\log a)(\log c) h^2 & (a^x > b^y \text{ のとき}). \end{cases}$$

ここで, $C_1 = 13$ であり, $h = \log(2S + 1) + 2.143$.

この補題は, [8, Theorem 2] のパラメータを自然に定めることで証明される.

7 解の一般的な上限評価

Lemma 6. $r > 10^{10}$ を仮定する. このとき次のことが成り立つ.

- (i) $\min\{x, y\} \geq 4$.
- (ii) $r < 10^{74}$ かつ $m < 10^{34}$ ならば, $X < 31.4 r (\log c)^2 (\log(82 r \log c))^2$.

この補題は, Lemmas 3,5 と同様に, 二つの対数の一次形式の評価の問題に帰着させて示される. 特に, (i) では, 仮に x または y のいずれかが小さい (< 4) と仮定すると, その一方が大きい場合に, 方程式 (rm) において, その右辺 c^z は左辺の二項のいずれかと値の比がとても 1 に近くなる, という事実が利用される. また, (i) は, r の m によるなるべく良い下限を得る際に必要になるが (Lemma 7 を参照), 下限の値 (= 4) を増やすことに効用は無い.

8 Theorems 1,2 の証明

まず, Theorem 2 (I) の証明の概略を述べる. 次のことを仮定する.

$$r > 10^{10}, \quad m \geq r, \quad m < 10^{34}.$$

次の補題は, r の対数値が m の対数値の定数倍以上であることを保証する. このことは前提条件 $n = 1$ がもたらす最も重要な帰結である. (もし同様のことが一般の Conjecture において示された場合, Proposition 1 と同じ結論が Conjecture について得られるからである!)

Lemma 7. 不等式 $r > c^{1/3.81}$ が成り立つ.

証明. r が偶数である場合だけを考える. すると, b が m で割り切れ, 特に b^y が m の 4 乗で割り切れる (Lemma 6 (i) より). そこで, 方程式 (rm) を法 m^4 で考えると, $a^x \equiv c^z \pmod{m^4}$. $c = m^2 + 1$ かつ $\pm a \equiv 1 - \frac{r(r-1)}{2} m^2 \pmod{m^4}$ なので, $\pm(1 - \frac{r(r-1)}{2} m^2 x) \equiv 1 + m^2 z \pmod{m^4}$ となる. この合同式を一旦法 m で考えると, ($m > 2$ より) 複合はプラスであることが分かり, 整理すると $z + \frac{r(r-1)}{2} m^2 x \equiv 0 \pmod{m^2}$. この合同式は, 正数である左辺の下限を与え, 不等式 $z < rX$ と組み合わせると, X の下限 $2(c-1)/r^2$ を得る. これと Lemma 6 (ii) の評価を組み合わせると結論が得られる. (証明終わり)

Lemma 8. c の任意の素因数 p に対し, 次の不等式が成り立つ.

$$z < 1721.6 f(p) r (\log c) |x - y|.$$

ここで, $f(p) = \frac{\log \max\{c^{1/2}, p\}}{(\log p)^2}$ は p の減少関数である.

略証. 代数的数の累乗の差の形で表される $\Gamma (\neq 0)$ を次の様に定める. $\Gamma := a^{2x} - b^{2y}$. すると, Γ の p 進付値は z 以上である ($a^{2x} \equiv b^{2y} \pmod{c^z}$ より). その値の '上限' 評価を行う為に, 対数一次形式の p 進版を用いる (例えば, [1, THEOREM 2]). 特に, 底数 a, b の適当なベキ乗が, p 進的に近い事実が有効に用いられる. (略証終わり)

Lemma 9. 次の不等式が成り立つ.

$$|x - y| < \frac{2|\log A_0|}{r \log c} + \frac{2 \max\{W_a, W_b\}}{r \log c} X.$$

証明. $|\log A_0|$ の値を考察すればよい. 例えば $a^x < b^y$ の場合には, 次の不等式たちが成り立つ.

$$|\log A_0| = -\log A_0 > y \log b - x \log a = \frac{r \log c}{2} (y - x) + R > 0.$$

ここで, $R = W_a x - W_b y$ であり, $|R| < \max\{W_a, W_b\} X$. (証明終わり)

Lemma 10. $S > 10^7$ を仮定する. このとき次のことが成り立つ.

- (i) c の任意の素因数は $r^{2.79/5}$ より大きい.
- (ii) c の重複を含めた素因数は高々 6 個である.

証明. p を $c = m^2 + 1$ の勝手な素因数とする. Lemma 7 より (i) だけ示せば十分である. p は $\mathbb{Z}[i]$ 上で二つの異なる素イデアルの積に分解されるが, そのうち $m - i$ を割るものを π とする. 方程式 (rm) を法 $\pi^{[r/2]}$ で考えることで, 次の合同式が得られる.

$$(m + i)^{4r|x-y|} - 2^{4|x-y|} \equiv 0 \pmod{\pi^{[r/2]}}.$$

この左辺は代数的 (整) 数の累乗の差の形をしている. その値の $\mathbb{Z}[i]$ 上での素イデアル分解における π の指数は, 上記の合同式からだいたい $r/2$ 以上である. その指数の '上限' 評価を行う為に, π 進版の対数一次形式 ([2] を参照) の理論が用いられる. 大雑把に書いてみると, 次の様な不等式を得る.

$$r \leq \frac{192 p \log c}{(\log p)^3} (\log \max\{r|x-y|, p^5\})^2.$$

この右辺の $\max$ 内の $|x-y|$ は, 既に Lemma 9 で評価を行った. Lemmas 5, 6 (ii) と合わせると, その値は r 程度であることが分かる. そこで上記の不等式で $|x-y|$ を r に置き換え, $p^5 \leq r^{2.79}$ とすると, 結局 r だけにに関する不等式が出てきて, それは r が大きい場合 ($> 10^{11}$) には成り立たないことが示される. (証明終わり)

Lemma 11. 不等式 $X < 4.2 \cdot 10^8 \log c$ が成り立つ.

証明. a, b の対数の大きさは, $(r/2) \log c$ とだいたい同じであるので (Lemma 2 より), X の大きさは $S \log c$ とほぼ同じであることが容易に考察される. よって $S > 10^7$ を仮定してよい. すると Lemma 10 (ii) より, c の最大素因子の大きさは $c^{1/6}$ 以上なので, Lemma 8 より,

$$z < C_2 r |x - y|. \quad \text{ただし } C_2 = 860.8 \cdot 6^2.$$

Lemmas 5, 9 より

$$z < C_1 C_2 r (\log c) (\log(2S + 1) + 2.143)^2 + C_2 X.$$

一方で, Lemma 2 より,

$$z > \frac{\log \min\{a, b\}}{\log c} X > \left(r/2 - \frac{\log(2m/r)}{\log c} \right) X.$$

これら z の上・下限評価を組み合わせれば

$$\left(r/2 - \frac{\log(2m/r)}{\log c} - C_2\right) S' < C_1 C_2 r (\log(2S' + 1) + 2.143)^2.$$

ここで, $S' := X/\log c$. 上記不等式の左辺の括弧の中身は, r がある程度大きいことから, 正であるので

$$\frac{S'}{(\log(2S' + 1) + 2.143)^2} < \frac{C_1 C_2}{1/2 - \frac{\log(2m/r)}{r \log c} - C_2/r}.$$

これより S' の上限評価が成される。(証明終わり)

以上の Lemma たちを組み合わせると, 矛盾に辿り着く. Lemma 7 の証明の中で示された不等式 $X > 2(c-1)/r^2$ および Lemma 11 から

$$c-1 < 2.1 \cdot 10^8 r^2 \log c.$$

これは, Lemma 7 より良い r の m による下限評価 $r > c^{1/3.11}$ を与える. すると, Lemma 10 の証明が改良されて, c の最大素因子の大きさが $c^{1/5}$ 以上であることが結論される. このことがまた Lemma 11 の議論を改良し, 不等式 $X < 2.8 \cdot 10^8 \log c$ が示される. これより

$$2 \log(m/r) < \log(1.4 \cdot 10^8) + \log \log c.$$

Lemmas 2,6 (i) より

$$X > \frac{r \log c - \log 2}{2 \log(2m/r)} > \frac{r \log c - \log 2}{\log 4 + \log(1.4 \cdot 10^8) + \log \log c}.$$

得られた X の上・下限評価および $r > c^{1/3.11}$ を組み合わせると

$$r < \frac{\log 2}{\log c} + (\log 4 + \log(1.4 \cdot 10^8) + \log \log r^{3.11}) \cdot 2.8 \cdot 10^8.$$

これは仮定 $r > 10^{10}$ に反する.

ケース (II) の証明も同様に進むが, 大きな違いは, Lemma 2 の代わりに Lemma 4 を用いざるを得ない点である. このことにより最終的な評価が悪くなるが, $r > m$ なので $r > c^{1/2}$ が成り立っている. よって, Lemma 10 がかなり改良されるのである. この部分が最終的な r の評価を (I) に比べて悪くなり過ぎることを防いでる.

また, Theorem 1 の証明では, Theorem 2 より m がある程度大きい場合を考えればよいことが分かるが, Lemma 7 の証明中に示された r の m による下限は (必要な条件の元で) 成立することが分かる. したがって r が大きいことが示され, Theorem 2 からその証明が成される.

REFERENCES

- [1] Y. Bugeaud, 'Linear forms in p -adic logarithms and the Diophantine equation $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$ ', *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **127** (1999), 373–381.
- [2] Y. Bugeaud and M. Laurent, 'Minoration effective de la distance p -adique entre puissances de nombres algébriques', *J. Number Theory* **61** (1996), 311–342.
- [3] Z.F. Cao and X.L. Dong, 'On the Terai-Jeśmanowicz conjecture', *Publ. Math. Debrecen* **61** (2002), 253–265.

- [4] Z.F. Cao and X.L. Dong, 'An application of a lower bound for linear forms in two logarithms to the Terai-Jeśmanowicz conjecture', *Acta Arith.* **110** (2003), 153–164.
- [5] M. Cipu and M. Mignotte, 'On a conjecture on exponential Diophantine equations', *Acta Arith.* **140** (2009), 251–270.
- [6] V.A. Dem'janenko, 'On Jeśmanowicz' problem for Pythagorean numbers', *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.* **48** (1965), 52–56 (in Russian).
- [7] L. Jeśmanowicz, 'Several remarks on Pythagorean numbers', *Wiadom. Mat.* **1** (1955/56), 196–202 (in Polish).
- [8] M. Laurent, 'Linear forms in two logarithms and interpolation determinants II', *Acta Arith.* **133** (2008), 325–348.
- [9] M. Laurent, M. Mignotte and Y. Nesterenko, 'Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation', *J. Number Theory* **55** (1995), 285–321.
- [10] M.H. Le, 'A conjecture concerning the exponential diophantine equation $a^x + b^y = c^z$ ', *Acta Arith.* **106** (2003), 345–353.
- [11] W.T. Lu, 'On the Pythagorean numbers $4n^2 - 1$, $4n$ and $4n^2 + 1$ ', *Acta Sci. Natur. Univ. Szechuan* **2** (1959), 39–42 (in Chinese).
- [12] F. Luca, 'On the system of Diophantine equations $a^2 + b^2 = (m^2 + 1)^r$ and $a^x + b^y = (m^2 + 1)^z$ ', *Acta Arith.* **153** (2012), 373–392.
- [13] T. Miyazaki, 'On exponential Diophantine equations concerning Pythagorean triples', *RIMS Kokyuroku* **1710** (2010), 113–123.
- [14] T. Miyazaki, 'Upper bounds for solutions of exponential Diophantine equations with applications to Fibonacci numbers', *RIMS Kokyuroku* **1806** (2012), 134–142.
- [15] T. Miyazaki, 'On an analogue of Jeśmanowicz' conjecture on exponential Diophantine equations', *RIMS Kokyuroku* **1874** (2014), 64–70.
- [16] T. Miyazaki, 'On an exponential equation concerning Pythagorean numbers with congruence relations', *RIMS Kokyuroku* **2013** (2016), 50–59.
- [17] T. Miyazaki, 'A note on the article of F. Luca "On the system of Diophantine equations $a^2 + b^2 = (m^2 + 1)^r$ and $a^x + b^y = (m^2 + 1)^z$ " (Acta Arith. 153 (2012), 373–392)', *Acta Arith.* **164** (2014), 31–42.
- [18] T. Miyazaki, 'Terai's conjecture on exponential Diophantine equations', *Int. J. Number Theory* **4** (2011), 981–999.
- [19] T. Miyazaki, 'On Terai's exponential equation with two finite integer parameters', preprint.
- [20] N. Terai, 'The Diophantine equation $a^x + b^y = c^z$ ', *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **70** (1994), 22–26.
- [21] N. Terai, 'The Diophantine equation $a^x + b^y = c^z$ II', *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **71** (1995), 109–110.
- [22] N. Terai, 'The Diophantine equation $a^x + b^y = c^z$ III', *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **72** (1996), 20–22.
- [23] N. Terai, 'Applications of a lower bound for linear forms in two logarithms to exponential Diophantine equations', *Acta Arith.* **90** (1999), 17–35.