

複雑形状を有する平面図形や空間図形に対する 形状認識への複素関数論の応用

東京理科大学理工学部情報科学科 明石重男

1. 研究の経緯

『めがねや3日月のようなくぼみのある図形』に代表される複雑な2次元平面図形、さらに『浮き輪やビール瓶やヒトデのような中空個所を有する図形』に代表される複雑な3次元立体図形に対して、計算機に形状を把握させることは、難解な問題であるにも関わらず、現代の画像認識の領域ではかなりの程度まで実現されている。具体的に述べるならば、既存の画像認識システムは、円柱や球や多面体などの凸性を有する立体図形、もしくは（凹性と呼ばれるくぼんだ部分を実現するために）これらを張り合わせることによって構成される立体図形における形状認識は成功している。しかし一般に、単純形状の図形を組み合わせて表現できない立体の認識や、仮に計算機が認識できた図形の中において、新たな観測点の位置を認識すること、即ち、観測点に存在するか内部に存在するかを把握することは、さらに困難な作業として残された問題である。

本原稿では、「くぼみやへこみなどの凹凸形状を有する画像」や「空洞や中空個所を有する画像」などの「複雑形状を有する図形に対して、計算機に形状の定量的類似性を判断させること」を「計算機に画像認識をさせること」と呼ぶことにします。さらに「複雑形状を有する図形の内部と外部を識別させること、もしくは相異なる2個の観測点を結ぶ線分が、与えられた図形と交差する回数を求めること」を「計算機に平面把握もしくは空間把握をさせること」と呼ぶことにする。そして非線形解析と複素関数論を応用した画像認識と空間把握の方法を解説する。

本稿に関連した簡単な古典的問題として、「立体の陰線消去問題」がある。これは与えられた多面体と観測地点を空間に配置した場合に、観測者から見える線分と見えない線分を識別する問題である。これらの研究結果は、最近のコンピュータ・グラフィックスの発達に伴う成果である「仮想現実」に応用されている。

2. 画像認識および空間把握の方法

以下では、平面図形を対象とした解説を行う。与えられた図形に対する形状認識のためのデータを構成する作業は以下の通りである。

- ① 入力されたメッシュの分割幅を一辺に持つ正方形メッシュの方眼用紙を製作する。
- ② 対象となる図形を、上記方眼用紙の上に置く。具体的には、対象となる図形の輪郭となる曲線を構成する点列を左回りに入力する。但し、空洞を表す内部図形の輪郭となる曲線を構成する点列は右回りに入力するものとする。
- ③ 方眼紙を構成する各格子点が、設置された形状の内部に存在するか外部に存在するかを判定する「空間把握作業」を行う。

なお、2個の図形の類似性を把握する作業

- ④ 与えられた2個の図形にに対応する上記データからそれぞれの図形に対応する内部格子点を選び出し、Hausdorff 距離を計算する。

註 1. A と B を 2 次元平面内(もしくは 3 次元空間内)の境界線を含む有界な集合とする。
今、 $x \in A$ かつ $y \in B$ としたとき、

$$\begin{aligned} d(x, B) &= \min\{d(x, y); y \in B\}, \quad d(y, A) = \min\{d(x, y); x \in A\}, \\ \delta(A, B) &= \max\{d(x, B); x \in A\}, \quad \delta(B, A) = \max\{d(y, A); y \in B\}, \\ H(A, B) &= \max\{\delta(A, B), \delta(B, A)\} \end{aligned}$$

として定義される距離を、Hausdorff の距離という。

註 2. C を複素平面上の閉じた曲線(もしくは折れ線)とする。さらに点 W を、閉曲線 C 上に存在しない複素平面上の 1 点としたとき、

$$\int_C \frac{1}{(z-w)} dz$$

の値は、 W が C の外部に存在する場合に 0 となり、 W が C の内部に存在する場合に $2\pi i$ となる。この結果を Cauchy の積分定理という。

3. ベクトル解析的形状把握と複素関数論的形状把握との比較

前節の③で述べた「方眼紙を構成する格子点に対する内部外部所属判定」を複雑形状で実行するために、従来から用いられている「外積計算」による方法と、「Cauchy の積分定理」による方法の比較を行う。

一般的に、外積計算による判定法は、「くぼみや穴などを有する形状に対する内部外部所属判定には不利」であり「複雑形状の図形では、境界線から離れた内部で判定が困難」という特徴を有する。一方、Cauchy の積分定理による判定法では、「くぼみや穴などを有する形状に対する内部外部所属判定には有利」であるが「複雑形状の図形では、境界線付近で判定が困難」という特徴を有する。以上の結果から、両判定法を組み合わせた以下の方法を採用することがもっとも有効であると考えられる。具体的アルゴリズムは以下の通りである。

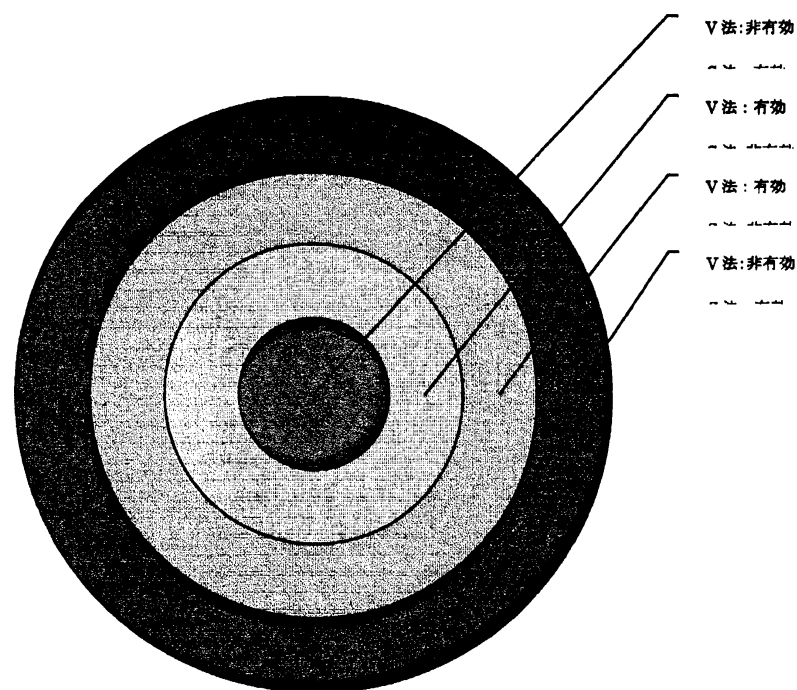
- ① 与えられた方眼紙上の格子点を 1 個選ぶ。
- ② 内部外部の所属判定を行う前に、格子点と境界線との距離を計算し「境界線付近」と判定された場合は③へ進み、「境界線から離れている」と判定された場合は、④へ進む。
- ③ 境界線付近と判定された格子点に対して、外積計算を行い、内部外部の所属判定を行う。終了後⑤へ進む。
- ④ 境界線から離れていると判定された格子点に対して、Cauchy の経路積分を計算し、内部外部の所属判定を行う。終了後⑤へ進む。
- ⑤ 未調査の格子点があれば、①へ戻る。全ての格子点の調査が終了した場合には作業終了。

外積計算による判定法と Cauchy の積分定理による判定法の比較

	外積計算(V 法と呼ぶ)	Cauchy の積分定理(法と呼ぶ)
判定に用いられる数学的原理	境界線上の隣り合う点列から構成されるベクトルと、評価の対象となっている格子点を始点とし、境界線上の点を終点とするベクトルとの外積を計算して、その符号から内部と外部の判定を行う。	境界線上の点列の座標および、評価の対象となる格子点の座標を複素数とみなして、格子点を軸とした複素経路積分を行い、その値から内部と外部の判定を行う。
両判定法の問題点	与えられた形状とは無関係な点を「外部に存在する点」として追加入力する必要がある、その点の所在地が境界線上の点列に関する誤判定を引き起こす。	経路積分計算を無限総和公式で置き換えているため、十分細かい輪郭情報を入力する必要がある。
両判定法が得意とする形状	凸多角形および折れ線的くぼみを有する多角形に対応	曲線を輪郭に持つ任意複雑形状に対応

誤判定を引き起こす可能性の高い格子点の存在領域	境界線から離れて内部に存在する格子点	境界線付近に存在する格子点
-------------------------	--------------------	---------------

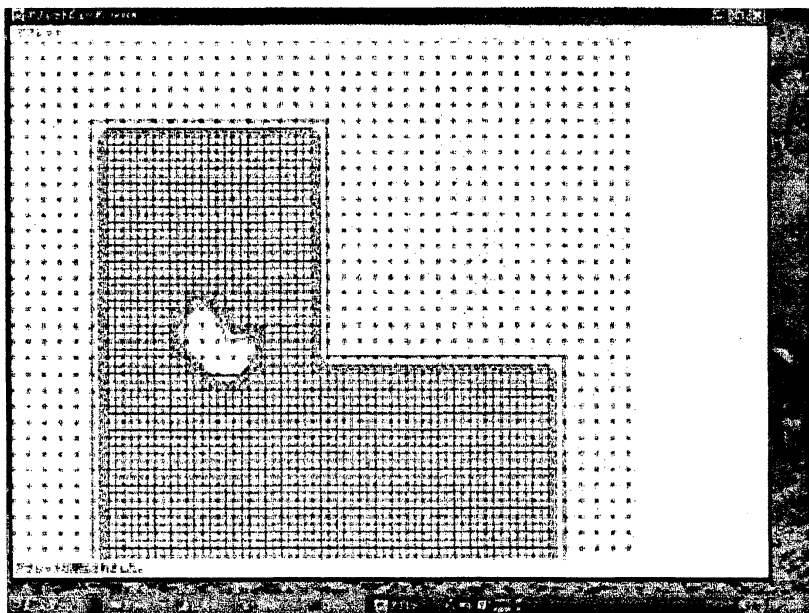
上記の比較表に基づいて、両判定法による格子点の内部外部所属判定の有効領域を図示すると次のようになる。ここでは、「入力された境界線外部は、緑色系統の領域」であるものとし、「入力された境界線外部は、青色系統の領域」であるものとする。また、境界線から離れるほど緑色もしくは青色の色彩が濃くなるものと仮定する。なお下の図において、境界線が円周形状であることには意味がないものとします。



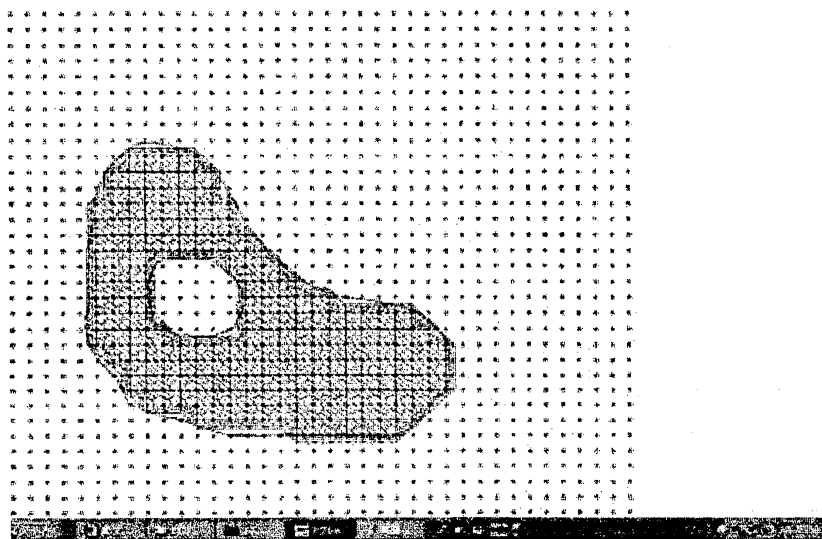
上記イメージ図からも分かるように、境界線付近の領域では外積計算による方法(V法)が有効であることが分かり、境界線を離れた領域では積分定理による方法(C法)が有効であることが分かる。このような理由で、方眼紙を構成する全ての格子点に関して、まず「境界線との距離関係」を判定した後、「境界線付近と判断された格子点」に対しては、V法を適用し、「境界線から離れていると判断された格子点」に対しては、C法を適用するのが良いと思われる。

4. 内部外部所属判定に基づく形状再生の具体的計算例

4-1. 穴の開いたクランク形状の場合



4-2. 凹みを持つ穴空き形状の場合



参考文献

1. 高橋渉著、非線形・凸解析学入門、横浜図書、2005年。
2. 村上伸一著、画像処理工学、東京電機大学出版会、1996年。