

Boolean valued analysis とその応用

東工大・理 小澤 正直 (Masanao Ozawa)

§ 1. 序論.

1963年, P. J. Cohen は強制法という集合論の新しいモデルを構成する方法を開発して, 選択公理と連続体仮説が集合論の他の公理から独立であることを証明した. 1966年, D. Scott と R. Solovay は集合論の Boolean モデルを構成して, Cohen の強制法を再構成すると共に, その解析学への応用として, Boolean 解析学を導入した. 本稿では, この Boolean 解析学を用いて, Kaplansky が 1952 年に提出して以来 30 年間に解決できなかった等質的 AW*-環の基数の一貫性の問題が否定的に解決されることを示す. Boolean 解析学の基本的手法については, Takeuti [9] と, 以下の議論の詳細は Ozawa [7] と参照されたい.

§ 2. 集合論の Boolean モデル

集合論 ZFC は等号 $=$ と所属関係 $\in$ の二つの二項述語をもつ一階の述語理論で, 等号公理の他に, 外延性の公理, 対の

公理, 合併集合の公理, 中集合の公理, 置換公理, 正則性の公理, 無限公理, 選択公理と公理としてもとっている。(cf. [11]). これらすべての公理を満足する対象の集まりを ZFC のモデルと呼ぶが, 通常のモデル理論ではモデルはある論理式 φ を満足する ($M \models \varphi$) か, 満足しないかのいずれかであると仮定されている (cf. [11; §12]). ここで考える Boolean モデルでは, モデルは与えられた論理式を満足するかしないか他に, 与えられた Boolean 代数 B の任意の値とその論理式 φ の真理値 $\llbracket \varphi \rrbracket$ としてとるものである。この時, $M \models \varphi$ は $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$ によつて定義される。ZFC の Boolean モデルの構成法としては, D. Scott と R. Solovay による次のものが知られている (cf. [12; §13]).

B を完備 Boolean 代数として, 各順序数 α に対して, $\mathcal{D}_\alpha^{(B)}$ を超限帰納法によつて次の様に定義する:

$$\mathcal{D}_0^{(B)} = \emptyset, \quad \mathcal{D}_\alpha^{(B)} = \{u \mid u: \text{dom}(u) \rightarrow B, \text{dom}(u) \subseteq \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{D}_\beta^{(B)}\}.$$

この時, Scott と Solovay による ZFC の Boolean モデル $\mathcal{D}^{(B)}$ は $\mathcal{D}^{(B)} = \bigcup_{\alpha \in \text{On}} \mathcal{D}_\alpha^{(B)}$ で定義される。但し, On は順序数全体のなす類である。 $\mathcal{D}^{(B)}$ の元を Boolean 集合 とする。次に, $u, v \in \mathcal{D}^{(B)}$ に対して, B -値の真理値 $\llbracket u \in v \rrbracket, \llbracket u = v \rrbracket$ を次の様に $\mathcal{D}^{(B)}$ の構成による帰納法で定義する。

$$(1) \quad \llbracket u \in v \rrbracket = \bigvee_{y \in \text{dom}(v)} [v(y) \wedge \llbracket u = y \rrbracket].$$

$$(2) \quad \llbracket u=v \rrbracket = \bigwedge x \in \text{dom}(u) [\llbracket u(x) \Rightarrow \llbracket x \in v \rrbracket \rrbracket$$

$$\wedge \bigwedge y \in \text{dom}(v) [\llbracket v(y) \Rightarrow \llbracket y \in u \rrbracket \rrbracket.$$

但し, $b_1, b_2 \in B$ に対して, $(b_1 \Rightarrow b_2) = (\neg b_1) \vee b_2$ である. 各 u についても $\text{dom}(u)$ の元の方が $\mathcal{D}^{(B)}$ に対して $\mathcal{D}^{(B)}$ に属しているから, (1), (2) からすべての $u, v \in \mathcal{D}^{(B)}$ に対して, $\llbracket u \in v \rrbracket, \llbracket u=v \rrbracket$ が定義されることを示される. 集合論のすべての論理式 $\varphi(a_1, \dots, a_m)$ ($a_1, \dots, a_m \in \mathcal{D}^{(B)}$) に対して, その B -値の真理値 $\llbracket \varphi(a_1, \dots, a_m) \rrbracket$ が, 次の様に論理式の表式に関する帰納法により定義される.

$$(1) \quad \llbracket \neg \varphi \rrbracket = \neg \llbracket \varphi \rrbracket,$$

$$(2) \quad \llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket = \llbracket \varphi \rrbracket \wedge \llbracket \psi \rrbracket,$$

$$(3) \quad \llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket = \llbracket \varphi \rrbracket \vee \llbracket \psi \rrbracket,$$

$$(4) \quad \llbracket (\forall x) \varphi(x) \rrbracket = \bigwedge a \in \mathcal{D}^{(B)} \llbracket \varphi(a) \rrbracket,$$

$$(5) \quad \llbracket (\exists x) \varphi(x) \rrbracket = \bigvee a \in \mathcal{D}^{(B)} \llbracket \varphi(a) \rrbracket.$$

但し, 左辺の $\neg, \wedge, \vee$ は論理記号で, 右辺の $\neg, \wedge, \vee$ は Boole 代数の演算記号である. 以上により, 集合論のすべての閉論理式 φ に対して, その真理値 $\llbracket \varphi \rrbracket \in B$ が定義されることになる. $\mathcal{D}^{(B)}$ が, ZFC の Boole 価モデルであることは, 次の定理で保証される.

定理 1. (Scott-Solovay, [12; Theorem 13.12, Theorem 14.25])

φ が ZFC の定理ならば, $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$.

上の定理の証明は、論理式 φ が $\mathcal{U}$ から演繹されるならば $\llbracket \varphi \rrbracket \geq \llbracket \varphi \rrbracket$, また論理式 φ が ZFC の公理ならば $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$ と示すことに
 ま、2行なわれる。 $\mathcal{V}$ を通常の集合の普遍類とする。各 $x \in \mathcal{V}$ に対して, $\mathcal{V}^{(B)}$ の元 $\check{x}$ と対応させて, $\llbracket \check{x} = \check{y} \rrbracket = 1 \Leftrightarrow x = y$,
 $\llbracket \check{x} = \check{y} \rrbracket = 0 \Leftrightarrow x \neq y$, $\llbracket \check{x} \in \check{y} \rrbracket = 1 \Leftrightarrow x \in y$, $\llbracket \check{x} \in \check{y} \rrbracket = 0 \Leftrightarrow x \notin y$,
 が成立するようにならされる。つまり, $\check{x}$ の全体は $\mathcal{V}^{(B)}$ 中における $\mathcal{V}$ の複製になっている。各 $\check{x}$ は $\check{x} = \{ \check{y} \mid y \in x \}$
 $\times \{1\}$ という関係によって, $\mathcal{V}$ の構成に関する (正則性の公理)
 帰納法で定義される。この時, 任意の $x \in \mathcal{V}^{(B)}$ に対して,

$$\llbracket x \text{ は順序数である} \rrbracket = \bigvee_{\alpha \in \text{On}} \llbracket x = \check{\alpha} \rrbracket$$

が成立する。これは, $\mathcal{V}^{(B)}$ において, 順序数の概念が絶対的
 である事を示している (cf. [12; Theorem 13.22]).

3. $\mathcal{V}^{(B)}$ における実数

数学で用いられる数には $\mathcal{U}$ を ZFC で定義される。例えば,
 各自然数 n に対して, n を定義する集合論の論理式 $\varphi_n(x)$ が
 ある。 $0 = \emptyset$, $1 = \emptyset \cup \{\emptyset\}$, ... といて, $(\exists! x) \varphi_n(x) \wedge \varphi_n(n)$ が
 証明可能である。この時, $\llbracket (\exists! x) \varphi_n(x) \wedge \varphi_n(n) \rrbracket = 1$ である。
 即ち, $\mathcal{V}^{(B)}$ における自然数 n は $\mathcal{V}$ における自然数 n の複製 $\check{n}$ である。
 また, $\varphi(x)$ が ' x は自然数である' を意味する論理式で,
 $N = \{x \mid \varphi(x)\}$ とすると, $\llbracket N = \check{N} \rrbracket$ が成立する。同様に有理数

の集合 $\mathcal{Q}$ に対し、 $\prod \mathcal{Q} = \bigcap \mathcal{Q} = 1$ が成立する。これは、 $\mathcal{D}^{(B)}$ に対し、自然数や有理数の概念が絶対的であることよりいえる。ところが、実数や複素数の概念は一般に $\mathcal{D}^{(B)}$ で絶対的ではない。(cf. [9; §2]).

集合論 ZFC で実数を定義する方法にはいくつかの同等の方法があるが、ここでは Dedekind の切断により実数を定義することにする。つまり、実数は有理数の切断の端点をもたない下組のことであると定義する。形式的には ' α は実数である' という論理式は次の様に表現される。

$$\alpha \leq \mathcal{Q} \wedge (\exists \beta \in \mathcal{Q}) [\beta \in \alpha] \wedge (\exists \beta \in \mathcal{Q}) [\beta \notin \alpha] \\ \wedge (\forall \beta \in \mathcal{Q}) [\beta \in \alpha \Leftrightarrow (\exists t \in \mathcal{Q}) [\beta < t \wedge t \in \alpha]].$$

集合論 ZFC で実数の全体を表わす記号を $\mathbb{R}$ とする。また、 $\mathcal{D}^{(B)}$ の中で、実数であるものの全体を $\mathbb{R}^{(B)}$ で表わす。即ち、

$$\mathbb{R}^{(B)} = \{u \in \mathcal{D}^{(B)} \mid \llbracket u \in \mathbb{R} \rrbracket = 1\}.$$

以下では、 B が位相空間上の正則開集合のなす完備 Boolean 代数 (cf. [2; §4, §21], [12; §1]) の場合には、 $\mathbb{R}^{(B)}$ がどのようなものになるかを調べることにする。尚、 B が Hilbert 空間上の射影のなす完備 Boolean 代数の場合及び、 B が測度代数の場合の $\mathbb{R}^{(B)}$ については [9] を参照したい。任意の完備 Boolean 代数は必ずある位相空間の正則開集合のなす完備 Boolean 代数と同型だから、すべての完備 Boolean 代数 B に対する $\mathbb{R}^{(B)}$ を調

べるために、以下の議論が必要かつ十分なものとなる。

各 $\alpha \in \mathbb{R}^{(B)}$ に対して、拡張実数値関数 $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ を次の様に定義する。

$$(1) \quad f(\omega) = \sup \{ \rho \in \mathbb{Q} \mid \omega \in \bigcup_{\rho < t \in \mathbb{Q}} \llbracket t \in \alpha \rrbracket \}, \quad \omega \in \Omega.$$

この時、

$$(2) \quad \{ \omega \in \Omega \mid \rho < f(\omega) \} = \bigcup_{\rho < t \in \mathbb{Q}} \llbracket t \in \alpha \rrbracket, \quad \rho \in \mathbb{Q}$$

$$(3) \quad \llbracket \rho \in \alpha \rrbracket = \{ \omega \in \Omega \mid \rho < f(\omega) \}^{\circ}$$

が成立して、 f は下半連続関数である。更に、この f は次の性質をもつ、

$$(4) \quad \{ \omega \in \Omega \mid f(\omega) = -\infty \} \text{ は疎集合.}$$

$$(5) \quad \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{ \omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq m \}^{\circ} \text{ は } \Omega \text{ で稠密.}$$

そこで、 $LC(\Omega)$ には、(4), (5) を満たす $\mathbb{R}$ -値下半連続関数の全体とすると、 $\Phi(\alpha) = f$ に対して、対応 $\Phi: \mathbb{R}^{(B)} \rightarrow LC(\Omega)$ が得られる。任意の $f \in LC(\Omega)$ に対して、 $\alpha \in \mathbb{R}^{(B)}$ を $\text{dom}(\alpha) = \text{dom}(\Phi)$, $\alpha(\rho) = \{ \omega \in \Omega \mid \rho < f(\omega) \}^{\circ}$ ($\rho \in \mathbb{Q}$)、で定義すると、 $\Phi(\alpha) = f$ となる。従って、 Φ は $LC(\Omega)$ の上への写像で、次の意味で本質的に一対一である。

$$\llbracket \alpha_1 = \alpha_2 \rrbracket = 1 \iff \{ \omega \in \Omega \mid \Phi(\alpha_1)(\omega) \neq \Phi(\alpha_2)(\omega) \} \text{ が第一類集合.}$$

更に、 Φ が $\mathbb{R}^{(B)}$ における代数演算と順序を $LC(\Omega)$ 上の代数演算と順序が第一類集合の外で成立するように保存するこゝが示される。さて、 $\mathbb{R}^{(B)}$ の有界部分 $\mathbb{R}_{\infty}^{(B)}$ を

$$R_\infty^{(B)} = \{a \in R^{(B)} \mid \exists M \in \mathbb{R}, \llbracket |a| \leq M \rrbracket = 1\},$$

で定義する。この時, " $a \in R_\infty^{(B)} \Leftrightarrow \psi(a)$ が有界" が成立する。

12, Ω が B の Stone 表現空間の場合には, この対応を用い

て, 次の同型定理が成立する。

$$\text{定理 2. } R^{(B)} \cong B_R(\Omega), \quad R_\infty^{(B)} \cong C_R(\Omega).$$

但し, $B_R(\Omega) = (B_R(\Omega) / \mathcal{N}_R(\Omega))$ で, ここに, $B_R(\Omega)$ は Ω 上の Borel 関数の全体, $\mathcal{N}_R(\Omega)$ は第一類の集合の外で 0 となる Borel 関数の全体である。また, $C_R(\Omega)$ は Ω 上の連続関数の全体である。

同様に 12, $\mathcal{D}^{(B)}$ の要素数についても

$$\text{定理 3. } C^{(B)} \cong B_C(\Omega), \quad C_\infty^{(B)} \cong C_C(\Omega)$$

が成立する。

詳しくは, [7; §3] を参照された。

§ 4. $\mathcal{D}^{(B)}$ における Hilbert 空間.

$H \in \mathcal{D}^{(B)}$ における Hilbert 空間, 即ち, $\llbracket H \text{ は Hilbert 空間である} \rrbracket = 1$, とする。 $H^{(B)}$ 及び u , $H^{(B)}$ の有界部分 $H_\infty^{(B)}$ を次の様に定義する。

$$H^{(B)} = \{u \in \mathcal{D}^{(B)} \mid \llbracket u \in H \rrbracket = 1\},$$

$$H_\infty^{(B)} = \{u \in H^{(B)} \mid \exists M \in \mathbb{R}, \llbracket \|u\| \leq M \rrbracket = 1\}.$$

H の $\mathcal{D}^{(B)}$ における内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$, norm を $\|\cdot\|_B$ で表わすと,

$u, v \in H_\infty^{(B)}$ なるば, $\langle u, v \rangle_B \in C_\infty^{(B)}$, $\|u\|_B \in R_\infty^{(B)}$ となる。12,

B の Stone 表現空間を Ω とし、 $Z = C_c(\Omega)$ とすると、 Z は可換な AW^* -環で、 B は Z の射影的な完備 Boolean 代数と同型になる。また、定理 3 から $Z \cong C_\infty$ であるから、 $H_\infty^{(B)}$ は Z -値の内積をもつ Z -加群である。

Z -値の内積をもつ Z -加群 X は、次の条件を満たす時、 AW^* -加群 とよばれる。

(1) 関数 $\|x\| = \|\langle x, x \rangle\|^{1/2}$ ($x \in X$) で定義される X 上の norm $\|\cdot\|$ に関する、 X は Banach 空間である。

(2) X の vector の任意の族 $\{x_i\}$ と B の単位の分解 $\{b_i\}$, 即ち、 $\sum_i b_i = 1$ かつ $b_i \wedge b_j = 0$ ($i \neq j$), に対して、ある $x \in X$ が存在して、任意の i に対して $b_i x = b_i x_i$ が成立する。

二つの AW^* -加群は一方から他方の上への Z -値内積を保存する Z -線型写像が存在する時、同型 であるという。

以上、 $\mathcal{D}^{(B)}$ における Hilbert 空間と Z 上の AW^* -加群の間には、次の様な一対一対応 (関手としての同値対応) がある。

定理 4. ([7]; Theorem 5.5)] $H \in \mathcal{D}^{(B)}$ における Hilbert 空間とすると、 $H_\infty^{(B)}$ は Z 上の AW^* -加群であり、逆に任意の Z 上の AW^* -加群 X に対して、 $X \cong H_\infty^{(B)}$ となる $\mathcal{D}^{(B)}$ における Hilbert 空間 H が構成される。

§5. 強制法 (forcing)

強制法 (forcing) とは, P. J. Cohen が連続体仮説及び選択公理の独立性を証明するたりに関して, 集合論のモデルを構成する方法である。ここでは, D. Scott と R. Solovay に基づき, Boolean モデルを用いて強制法を再構成する議論の概要を示そう。

M を集合論 ZF の推論的標準モデルとする ([11; Definition 12.7]). 強制概念 とは, 半順序集合 $\langle P, \leq \rangle$ のこととする。実際には, P はある種の集合論のモデルに関する条件の集合と考えるが, 一般論のたりに抽象的な半順序集合で十分である。強制法とは, P 上の生成 filter とよばれる filter G を用いて, M の生成拡大とよばれる拡大モデル $M[G]$ を構成する方法である。これを Boolean モデルを通じて行うには次の様にする。 P に順序位相 (切片と閉基とする位相) を導入し, P を位相空間とし, その正則開集合から成る完備 Boolean 代数を B とする。 B -値モデル M^B を, V から V^B を構成した方法を M に相対化して, 構成する。 B の ultra filter G で次の性質をもつものを 生成 filter とよぶ。

$$X \subseteq G \cap M \Rightarrow \sup X \in G.$$

但し, $\sup X$ は X の G における上限である。与えられた生成 filter G に対して, M の 生成拡大 (generic extension) $M[G]$ は

集合論 ZFC の 2-価モデルで, 次の様に構成される. $M^{(B)}$ の G -解釈 とよばれる関数 i_G を

$$i_G(x) = \{i_G(y) \mid x(y) \in G\}, \quad x \in M^{(B)}$$

によつて, 帰納的に定義して, $M[G] = \{i_G(x) \mid x \in M^{(B)}\}$ とすれば, $M[G]$ が得られ, $x_1, \dots, x_n \in M^{(B)}$ を定項にもつ論理式の解釈と

$$M[G] \models \varphi(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \llbracket \varphi(x_1, \dots, x_n) \rrbracket \in G$$

によつて定めれば, M の生成拡大 $M[G]$ は ZFC の 2-価モデルになる. (cf. [3; §18]).

α と β を二つの無限基数とし, P を次の条件を満たす一対一写像の全体とする.

$$\text{dom}(p) \leq \alpha, \quad \text{ran}(p) \leq \beta, \quad \text{card}(\text{dom}(p)) < \alpha.$$

更に, P に

$$p \leq q \Leftrightarrow p \text{ は } q \text{ の 拡張}$$

という関係で順序を入れ, $[p] = \{q \in P \mid q \leq p\}$ ($p \in P$) とし, $\{[p] \mid p \in P\}$ を開基とする位相を導入する. この強制概念 $\langle P, \leq \rangle$ に関する, 次の結果が知られている.

定理 5. ([3; Lemma 19.9]) B を P の正則開集合からなる完備 Boolean 代数とすると, 次の (1), (2) が成立する.

(1) 任意の推移的標準モデル M と任意の生成 filter G に対して, $M[G] \models \text{card}(\alpha^M) = \text{card}(\beta^M)$. 但し, α^M, β^M

は基数 α, β の M への相対化である。

$$(2) \quad \mathcal{V}^{(B)} \text{ において, } \llbracket \text{card}(\dot{\alpha}) = \text{card}(\dot{\beta}) \rrbracket = 1.$$

(1) の型の結論は強制法特有の結論の型であり, (2) の型の結論は Boolean モデル特有の結論の型である。強制法と Boolean モデルの二つの方法は互に同等なので, 一方から他方を導く標準的な方法が存在する。(2) から (1) を導くには, 前述の強制法の Boolean モデルによる再構成から明らかである。(1) から (2) を導くには, Löwenheim-Skolem の定理によつて, M が可算モデルと仮定しても一般性を失わない事と, Rasiowa-Sikorski の定理によつて, M が可算ならば, generic filter が十分に存在する事を用いる。尚, 生成 filter の概念は P だけに依存して決定するもので, 強制法は句論 B を用いずに定式化することが出来る。

§6. 等質的 AW^+ 環 における基数の一貫性の問題

§4. において, AW^+ 加群の問題を $\mathcal{V}^{(B)}$ における Hilbert 空間論に帰着させた事を示し, §5 において, 強制法で得られた結果を $\mathcal{V}^{(B)}$ に対する結論に変換する方法を示した。従つて, この事を用いて, 強制法という非常に突きの多いモデル論の手法と解析学の問題に適用する道が開かれた事になる。この§では, この道の果てを用いて, 1952 年に Kaplansky が提出し

これまで未解決であった等質的 (homogeneous) AW^* 環に関する基数の一意的の問題に適用することにした。

AW^* 環 A は, その単位元が同値な可換射影の直交族の上限である時, 等質的であるといわれ, その様な直交族の基数が κ の時, κ -等質的であるといわれる (cf. [1; §18]). 基数の一意的の問題とは, この様な射影の直交族の基数が A に対して一意に定まるかという問題である。 A が W^* 環の場合には, この基数は一意的であって, この基数は A の同型の不変量となる。更に, 任意の I 型 W^* 環は等質的 W^* 環の直和に分解されるので, その直和因子の等質的 W^* 環の基数によってその構造が決定される。 Kaplansky はこの様な I 型の構造理論を AW^* 環に拡張する事を意図したのであるが, I 型 AW^* 環が等質的 AW^* 環に直和分解される事は示す事が出来たが, その基数の一意的性は中心が局所的可算分解可能な場合に証明できたのみで, 一般の場合には未解決であった。 (cf. [4]).

更に, 彼は, [5; p. 843, Footnote] で問題は否定的であろうと予想している。 以下で, この問題が否定的に解決されることを示そう。

12, [5] で示したように, 中心が可換 AW^* 環 Z に同型な任意の I 型 AW^* 環 A は, ある Z 上の AW^* 加群 X 上の有界 Z -線型写像のなる AW^* 環 $\text{End}_Z(X)$ と同型になる。 この事から, 基数の

一意性の問題は, 次の様に AW^* -加群の問題に帰着される.

AW^* -加群 X の vector の族 $\{e_i\}$ が次の条件 (1) - (3) を満たす時, それは X の 基底 であるといわれる.

$$(1) \text{ 任意の } i \text{ に対して, } \langle e_i, e_i \rangle = 1.$$

$$(2) \quad i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$$

$$(3) \text{ 任意の } x \in X \text{ に対して, } \langle x, e_i \rangle = 0 \text{ が任意の } i \text{ に対して}$$

成立すれば, $x = 0$ である.

定理 6. ([5; Theorem 7, Theorem 8]) AW^* -環 A が κ -等質的であるための必要十分条件は, $A \cong \text{End}_Z(X)$ となる濃度 κ の基底をもつ AW^* -加群 X が存在することである.

従って, 問題は, AW^* -加群の基底の濃度の一意性の問題に帰着される. そこで, この問題を $\mathcal{D}^{(B)}$ における Hilbert 空間の問題に帰着せると次の様になる.

定理 7. ([7; Theorem 6.2]) 可換 AW^* -環 Z 上の AW^* -加群 X が濃度 κ の基底をもつための必要十分条件は, Z の射影からなる完備 Boolean 代数を B とし, $X \cong H_\infty^{(B)}$ となる $\mathcal{D}^{(B)}$ の Hilbert 空間 H に対して, $\llbracket \dim(H) = \text{card}(\mathcal{A}) \rrbracket = 1$ が成立することである.

以上により, 問題は $\mathcal{D}^{(B)}$ における基数の問題に帰着された. そこで, §5 において, 強制法によって得られた, $\mathcal{D}^{(B)}$ の基数に関する定理 5 を利用すると, 次の結論が得られる.

定理 8. ([7; Theorem 6.3]). α, β を任意に与えられた
二つの無限基数で $\alpha < \beta$ とする. この時, $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ とする任意
の基数 γ に対して, 同時に γ -等質的となる一つの AW^* 環
が存在する.

証明は, 定理 3 から定理 7 をつなげて「やりこみ」. つまり,
定理 5 により, 与えられた強制概念 $\langle P, \leq \rangle$ から構成された
完備 Boolean 代数 $\mathcal{B}$ として, $\mathcal{Z} = \mathcal{C}_{\infty}^{(\mathcal{B})}$ とする. 定理 3 から, $\mathcal{Z}$ は射
影の身体が $\mathcal{B}$ と同型な可換 AW^* 環である. 定理 5 から $\mathcal{D}^{(\mathcal{B})}$ で
 $\llbracket \text{card}(\check{\alpha}) = \text{card}(\check{\beta}) \rrbracket = 1$ が成立している. 従って, $\alpha \leq \gamma \leq \beta$
なる γ は $\llbracket \text{card}(\check{\alpha}) = \text{card}(\check{\gamma}) \rrbracket = 1$ でもある. そこで, $\mathcal{D}^{(\mathcal{B})}$ に
おける Hilbert 空間 $\ell^2(\check{\alpha})$ を $\mathcal{D}^{(\mathcal{B})}$ で構成して, $\mathcal{H} \in \mathcal{H}$ とする.
すると, 定理 1 から $\llbracket \dim(\mathcal{H}) = \text{card}(\check{\alpha}) = \text{card}(\check{\gamma}) \rrbracket = 1$ である.
よって, $\mathcal{Z}$ 上の AW^* -加群 X を定理 4 により $X = \mathcal{H}_{\infty}^{(\mathcal{B})}$ と定義する
と, 定理 7 から, X は濃度 γ の基底をもつこととなる. 従って,
定理 6 から, AW^* 環 $\text{End}_{\mathcal{Z}}(X)$ に対し, $\text{End}_{\mathcal{C}_{\infty}^{(\mathcal{B})}}(\ell^2(\check{\alpha})_{\infty}^{(\mathcal{B})})$ は
 $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ なる任意の γ に対して, γ -等質的である.

文献 [7] では更に, Boolean 解析学を用いて, I 型 AW^* 環の
完全な分類が与えられている. [8] では, 定理 8 の直接的な証
明が与えられている. [6] と [9] には, Boolean 解析学の重複度
理論への応用と von Neumann 環への応用が述べられている.

References.

- [1] Berberian, S. K., Baer $\ast$ -rings, Springer, Berlin, 1972.
- [2] Halmos, P. R., Lectures on Boolean algebras, Van Nostrand, New York, 1963.
- [3] Jech, T., Set theory, Academic Press, New York, 1978.
- [4] Kaplansky, I., Algebras of type I, Ann. of Math., 56(1952), 460-472.
- [5] Kaplansky, I., Modules over operator algebras, Amer. J. Math., 75(1953), 839-858.
- [6] Ozawa, M., Boolean valued interpretation of Hilbert space Theory, J. Math. Soc. Japan, 35(1983), 609-627.
- [7] Ozawa, M., A classification of type I AW $\ast$ -algebras and Boolean valued analysis, preprint.
- [8] Ozawa, M., Non-uniqueness of the cardinality attached to homogeneous AW $\ast$ -algebras, preprint.
- [9] Takeuti, G., Two applications of logic to mathematics, Iwanami and Princeton University Press, Tokyo and Princeton, 1978.
- [10] Takeuti, G., Von Neumann algebras and Boolean valued analysis, J. Math. Soc. Japan, 35(1983), 1-21.
- [11] Takeuti, G. and Zaring, W. M., Introduction to axiomatic set theory, Springer, New York, 1971.
- [12] Takeuti, G. and Zaring, W. M., Axiomatic set theory, Springer, New York, 1973.