

(論文内容の要旨)

本論文は、常微分方程式に対する特異摂動法的一种である繰り込み群の方法を、ベクトル場の近似の観点から研究し、力学系の理論の手法を持ち込むことにより、厳密解の有限時間での近似ではなく、厳密解の無限時間の漸近挙動を予測可能としたものである。さらに、理論だけでなく、任意次数までのベクトル場の標準形を計算するための公式を具体的に導出することで、微分方程式の解析のために数式処理ソフトを援用することに道をひらき、実際に結合振動子系等に適用してその有効性を確認している。本論文は5章からなる。

第1章は序論であり、研究の動機、目的、続く各章の概要を述べている。

第2章では繰り込み群の方法に基づいて近似ベクトル場を構成する方法について述べている。従来の繰り込み群の方法では、有限時間では近似解が有効であることは証明されていたのであるが、長時間にわたる解の挙動を予測することは不可能であった。申請者は、繰り込み群方程式で構成される近似解の初期値に関する族から、与えられた微分方程式に付随するベクトル場をC1級で近似するベクトル場が構成できることを示した。このことにより、力学系の理論を活かすことが可能となった。特に、この近似ベクトル場が法双曲型不変多様体をもつとき、原ベクトル場もまたその不変多様体に微分同相で、かつ同じ安定性を有する不変多様体をもつことを示している。さらに、繰り込み群方程式は原方程式がもつ対称性をすべて許容することを証明している。もし原方程式が自律系ならば、繰り込み群方程式は付加的な対称性をもつことも示している。この事実は実際に微分方程式の解析に有効であり、分岐理論や結合振動子の同期現象に応用されている。また、繰り込み群の手法をさらに進めて、高次の繰り込み群方程式を定義し、近似解の精度が有限時間で高くなることを証明している。

第3章では、高次の繰り込み群方程式(ベクトル場)が、実際に原方程式に付随するベクトル場の標準形あるいは超標準形に同値であることを示している。一般に、高次の繰り込み群方程式は定義式の中に現れる積分定数のために一意的には決まらないのであるが、申請者はこの不定性をうまく活用すると、原方程式が自律系の場合に、ベクトル場の標準形の理論にならって、任意次数までの簡略化繰り込み群方程式(ベクトル場)が定義できることを、具体的な手続きを含めて示している。すでに述べたように、対称性の理由により繰り込み群方程式は原方程式より解きやすくなっているのであるが、ここで定義された簡略化繰り込み群方程式は、従来の繰り込み群方程式よりずっと簡単な方程式となっている。原方程式が非自律系の場合には、特に微小パラメータの冪に展開された線形方程式に対して、自明解が双曲的安定であるか不安定であるかを判断するには有限次数までの繰り込み群方程式で十分であることを示している。このことは、非線形方程式の変分方程式が線形方程式であることを考慮すると、非自律非線形方程式の解析にも有効である。実際、結合振動子系の同期解が安定であることを、変分方程式の解析により示している。

第4章では、繰り込み群の方法が近似中心多様体とその上の流れを与えることの厳密な証明を与えている。さらに、原方程式の繰り込み群方程式が法双曲型不変多様体をもつときには、原方程式もまた中心多様体上に不変多様体をもつことを証明している。この近似中心多様体とその上の流れを得るための繰り込み群法は、繰り込み群方程式の定義域が原方程式の非摂動項の中心部分空間に制限されるため、制限繰り込み群法と呼ばれている。最後に、制限繰り込み群の方法の適用例を数値計算とともに与えている。

第5章では本論文のまとめと今後の課題について述べている。

(論文審査の結果の要旨)

繰り込み群の方法は Chen, Goldenfeld, Oono によって提案された常微分方程式に対する特異摂動法の一つで、非摂動方程式の解が既知という仮定のもとで、繰り込み群方程式と呼ばれる補助的な方程式を介して近似解を構成する手法である。しかし、従来は有限時間での近似解の有効性しか証明されていなかったもので、この手法で長時間にわたる厳密解の漸近挙動を予測することは不可能であった。申請者は、繰り込み群方程式の初期値をパラメータとする解の族を考え、これを利用して、与えられた方程式に付随するベクトル場の近似ベクトル場が定義できることを示し、力学系の理論、特に不変多様体の理論などが有効に使えるようにした。このことにより、繰り込み群方程式の解の位相的性質から、原方程式の解の位相的性質が解明できることとなった。たとえば、繰り込み群方程式が法双曲型不変多様体をもてば、原方程式もそれと微分同相な不変多様体を持ち、それらの安定性は一致することが示された。特に、安定な不変多様体に対しては、その近傍での厳密解の長時間での漸近挙動が記述できる。また、繰り込み群の方法で、与えられたベクトル場の中心多様体およびその上の流れを近似的に構成する方法も与えている。さらに、繰り込み群方程式は原方程式よりも対称性が高いため解きやすくなっており、このことは実際上解析に有効であることも具体的に示されている。

与えられたベクトル場が多項式ベクトル場ならば、繰り込み群方程式（ベクトル場）はそのベクトル場の標準形と一致することを証明し、繰り込み群方程式が古くから知られているベクトル場の標準形の一般化であることを示した。さらに、繰り込み群方程式の非一意性を利用して、簡略化繰り込み群方程式を提案した。これは可能な繰り込み群方程式のうち最も簡潔なものであり、ベクトル場の標準形をさらに簡略化した超標準形の一般化にもなっている。従来のベクトル場の標準形は、一般論はあるものの計算が困難であったが、申請者は任意次数までのベクトル場の標準形を計算するための公式を導出している。これにより、数式処理ソフトを用いれば従来は計算が困難であった高次のベクトル場の標準形を容易に求めることができる。この結果、結合振動子系の同期現象の解析が容易になり、蔵本モデル等の分岐構造の解明が可能となった。

以上、本論文は摂動論に力学系の理論の視点を持ち込み、微分方程式の解の長時間にわたる位相的性質の解明を可能にしたばかりでなく、近似方程式を構成する実際的手続きを導いて具体的モデルに適用するなど、微分方程式、力学系の理論と実践に大きく寄与するものである。よって、本論文は博士（情報学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成21年2月10日実施した論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。