

ある特異積分作用素と Nelson-Szegő 測度

北海学園大 山本隆範 (Takamori Yamamoto)

この講演は、中路貴彦先生との共同研究([7])による。

I 章 問題

周期 2π をもつ $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 $f(\theta)$ に対して, その Fourier 係数 $\hat{f}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ を

$$\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$

によって定義する。 f は単位円周 $\mathbb{T}$ 上の関数と考えることもできる。 $dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$ なる測度 m は $\mathbb{T}$ 上の正規化された Lebesgue 測度である。可積分関数 f に対して共役関数 $\tilde{f}$ は特異積分によって,

$$\tilde{f}(\theta) = VP \int_{\mathbb{T}} f(\theta-t) \cot \frac{t}{2} dm(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \{f(\theta-t) - f(\theta+t)\} \cot \frac{t}{2} dm(t)$$

と表される。 f に対して $\tilde{f}$ を対応させる作用素を Hilbert 変換といい, $Hf = \tilde{f}$ と表す。

円板環 $A = \{f \in C(\mathbb{T}) ; \hat{f}(n) = 0, n = -1, -2, \dots\}$ に対して, $A_0 = \{f \in A ; \hat{f}(0) = 0\}$, $\bar{A}_0 = \{\bar{f} ; f \in A_0\}$ を考える。ただし, $\bar{f}$ は f の複素共役関数を表す。このとき $A + \bar{A}_0$ の要素 $f_1 + f_2$ ($f_1 \in A$, $f_2 \in \bar{A}_0$) に f_1 を対応させる

作用素を解析射影といい、

$$P_+(f_1 + f_2) = f_1 \quad (f_1 \in A, f_2 \in \overline{A_0})$$

と表す。 $A + \overline{A_0}$ 上の恒等作用素を I で表し、 $P_- = I - P_+$ で作用素 P_- を定めると、

$$P_-(f_1 + f_2) = f_2 \quad (f_1 \in A, f_2 \in \overline{A_0})$$

となる。このとき、 $f \in A + \overline{A_0}$ について

$$P_+ f = \frac{1}{2} \{ f + i\tilde{f} + \hat{f}(0) \} = \frac{1}{2} \{ (I + iH) f + \hat{f}(0) \}$$

$$P_- f = \frac{1}{2} \{ f - i\tilde{f} - \hat{f}(0) \} = \frac{1}{2} \{ (I - iH) f - \hat{f}(0) \}$$

となる。

つぎの問題を考える。

Γ $L^\infty(m)$ -関数 α, β が与えられたとき、荷重付きノルム不等式

$$(*) \quad \int_{\Gamma} |(\alpha P_+ + \beta P_-) f|^2 W dm \leq \int_{\Gamma} |f|^2 W dm \quad (f \in A + \overline{A_0})$$

を満たす荷重 W の条件を、 α, β を用いて表せ。」ただし、

荷重とは非負値可積分関数を表すものとする。作用素 P_+ ,

$P_+ - P_-$ についての荷重付きノルム不等式は、Nelson-Szego ([3])

Koosis ([5]) , Cotlar-Sadosky-Arocena ([1], [2]) の結果がある。

作用素 $\alpha P_+ + \beta P_-$ の荷重付き L^2 空間における可逆性について

は、Widom ([9]) , Nikolski ([8]) 等に述べられている。

我々は、 $\alpha P_+ + \beta P_-$ は、恒等作用素 I と、 P_+ と $P_+ - P_-$ という

3つの作用素を補間しているという点に興味を持ち上の問題を

考えた。一方、特殊な場合として、 $\beta \equiv 0$ のときを考える

と, Kurosis の定理と Nelson-Szegö の定理を補間する定理が得られる。

II 章 解答

補題 1 荷重 W が $m\{W=0\} > 0$ を満たしているとき
つぎの条件は同値である。

- (i) W は不等式 (*) を満たす。
- (ii) $W = 0$ a.e. on $\{\alpha \neq \beta\} \cup \{|\alpha| > 1\}$

したがって, $W > 0$ a.e. なる W について調べればよい。一方, α, β が $\alpha \equiv \beta$ a.e. を満たすときは $\alpha P_+ + \beta P_- = \alpha I$ となり明らかな場合になるから, $m\{\alpha \neq \beta\} > 0$ なる α, β について調べればよい。

補題 2 α, β が $m\{\alpha\bar{\beta} = 1\} > 0$ を満たしているとき, つぎの条件は同値である。

- (i) W は不等式 (*) を満たす。
- (ii) $W = 0$ a.e. on $\{\alpha \neq \beta\}$

したがって, $|1 - \alpha\bar{\beta}| > 0$ a.e. なる α, β について調べればよい。

補題3 α, β が, $W > 0$ a.e. なる荷重 W について
不等式(*)を満たしているならば, $|\alpha| \leq 1$ a.e. かつ $|\beta| \leq 1$ a.e.

以上の補題より, つぎの条件(**)を満たす α, β, W について調べればよい。

$$(**) \begin{cases} |\alpha| \leq 1 \text{ a.e.}, |\beta| \leq 1 \text{ a.e.}, |1 - \alpha\bar{\beta}| > 0 \text{ a.e.}, \\ m\{\alpha \neq \beta\} > 0, \\ W > 0 \text{ a.e.} \end{cases}$$

以下, $-\pi \leq \text{Arg } z < \pi$ とし,

$$s = \begin{cases} \text{Arg}(1 - \alpha\bar{\beta}) & \text{on } \{\alpha \neq \beta\} \\ 0 & \text{on } \{\alpha = \beta\} \end{cases}$$

$$r = \begin{cases} \left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\bar{\beta}} \right| & \text{on } \{\alpha \neq \beta\} \\ 0 & \text{on } \{\alpha = \beta\} \end{cases}$$

とする。このとき, Cotlar-Sadosky の lifting 定理([2], [1], [6], [10]) より, つぎの定理が導かれる。

定理1 α, β, W が条件(**)を満たし, 更に

$$\int_{\mathbb{T}} |1 - \alpha\bar{\beta}| e^{\tilde{s}} W \, dm < \infty$$

とする。このとき, つぎの条件は同値である。

(i) W は不等式(*)を満たす。

$$(ii) \quad 2 |1 - \alpha \bar{\beta}| W e^{\tilde{v} + \tilde{s}} \cos v \geq C \quad \text{a.e.}$$

$$W = C \cdot \frac{1}{|\alpha - \beta|} e^{u - \tilde{v} - \tilde{s}} \quad \text{a.e. on } \{\alpha \neq \beta\}$$

ただし, C は正の任意定数,

$$|v| \leq \cos^{-1} r \quad \text{a.e.}$$

$$|u| \leq \cosh^{-1} \left(\frac{\cos v}{r} \right) \quad \text{a.e. on } \{\alpha \neq \beta\}.$$

ただし, $\cos^{-1}$, $\cosh^{-1}$ はそれぞれ $\cos$, $\cosh$ の逆関数を表す。

系 1.1 α, β, W が条件 (**) を満たし, $s \in C^1(\Pi)$

とする。このとき, W が不等式 (*) を満たすならば,

$$\int_{\Pi} \frac{1}{|1 - \alpha \bar{\beta}| W} dm < \infty$$

となる。

系 1.2 $|\alpha| \leq 1$ a.e., $m\{\alpha \neq 0\} > 0$, $W > 0$ a.e.,

このとき, つぎの条件は同値である。

$$(i) \quad \int_{\Pi} |\alpha P_+ f|^2 W dm \leq \int_{\Pi} |f|^2 W dm \quad (f \in A + \bar{A}_0)$$

$$(ii) \quad 2 W e^{\tilde{v}} \cos v \geq C \quad \text{a.e.}$$

$$W = C \cdot \frac{1}{|\alpha|} e^{u - \tilde{v}} \quad \text{a.e. on } \{\alpha \neq 0\}$$

ただし, C は正の任意定数,

$$|v| \leq \cos^{-1} |\alpha| \quad \text{a.e.}$$

$$|u| \leq \cosh^{-1} \left(\frac{\cos v}{|\alpha|} \right) \quad \text{a.e. on } \{\alpha \neq 0\}$$

系 1.3 $W > 0$ a.e. とし, $U \geq 0$ a.e., $m\{U \neq 0\} > 0$

とする。このとき, つぎの条件は同値である。

$$(i) \quad \int_{\mathbb{T}} |P_+ f|^2 U \, dm \leq \int_{\mathbb{T}} |f|^2 W \, dm \quad (f \in A + \overline{A_0})$$

$$(ii) \quad U \leq W \quad \text{a.e.}$$

$$\frac{1}{W} \leq \frac{2}{C} e^{\tilde{v}} \cos v \quad \text{a.e.}$$

$$(WU)^{\frac{1}{2}} = C e^{u-\tilde{v}} \quad \text{a.e. on } \{U > 0\}$$

ただし, C は正の任意定数,

$$|v| \leq \cos^{-1} \left(\frac{U}{W} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{a.e.}$$

$$|u| \leq \cosh^{-1} \left[\left(\frac{W}{U} \right)^{\frac{1}{2}} \cos v \right] \quad \text{a.e. on } \{U > 0\}.$$

系 1.4 $W > 0$ a.e. とし, M は正の定数とする。この

とき, つぎの条件は同値である。

$$(i) \quad \int_{\mathbb{T}} |P_+ f|^2 W \, dm \leq M \int_{\mathbb{T}} |f|^2 W \, dm \quad (f \in A + \overline{A_0})$$

$$(ii) \quad M \geq 1$$

$$W = C e^{u-\tilde{v}} \quad \text{a.e.}$$

ただし, C は正の任意定数,

$$\|v\|_{\infty} \leq \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$|u| \leq \cosh^{-1} [\sqrt{M} \cos v] \quad \text{a.e.}$$

つぎの章において, 定理 1 およびその系より導かれる諸定理について調べる。

Ⅲ章 応用

Koosis の定理 荷重 W についてつぎの条件は同値である。

$$(i) \quad \int_{\mathbb{T}} |P_+ f|^2 U \, dm \leq \int_{\mathbb{T}} |f|^2 W \, dm \quad (f \in A + \bar{A}_0)$$

が成り立つような荷重 U で $m\{U \neq 0\} > 0$ なるものが存在する。

$$(ii) \quad W^{-1} \text{ は可積分関数である。}$$

証明 W が条件 (i) を満たしているとき、補題 1 より

$W > 0$ a.e. となる。系 1.3 より

$$\frac{1}{W} \leq \frac{2}{C} e^{\tilde{v}} \cos v \quad \text{a.e.}, \quad \|v\|_{\infty} \leq \frac{\pi}{2}.$$

よって、 $W^{-1} \in L^1(m)$ 。逆に W が条件 (ii) を満たしているとき、

$$k = \frac{1}{W} + i\left(\frac{1}{W}\right)^{\sim} \quad \text{とおくと、} k \text{ は } \operatorname{Re} k \geq 0 \text{ a.e.}$$

かつ $k \neq 0$ なる outer 関数である。このとき、 $\frac{1}{k}$ は H^1 に

属し、 $\operatorname{Re} \frac{1}{k} \geq 0$ a.e. なる outer 関数である。よって、

$$\frac{1}{k} = C e^{iv - \tilde{v}} \quad \text{a.e.} \quad \text{なる正の定数 } C \text{ と } \|v\|_{\infty} \leq \frac{\pi}{2} \text{ なる } v \text{ が存在する。}$$

$$\text{このとき、} \frac{1}{W} = \operatorname{Re} k = C^{-1} e^{\tilde{v}} \cos v \quad \text{a.e.} \quad \text{ゆえ}$$

$$\cos v > 0 \text{ a.e. となる。よって、} U = C e^{-\tilde{v}} \cos v \text{ とおく}$$

$$\text{と、} U > 0 \text{ a.e. かつ } (WU)^{\frac{1}{2}} = C e^{-\tilde{v}} \text{ a.e. かつ } \left(\frac{U}{W}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos v \text{ a.e.}$$

よって、系 1.3 より、 U は条件 (i) を満たす。 (証明終)

Nelson-Szegő の定理 非負値有界正則な Borel 測度 μ

についてつぎの条件は同値である。

$$(i) \quad \int_{\mathbb{T}} |P_+ f|^2 d\mu \leq C \int_{\mathbb{T}} |f|^2 d\mu \quad (f \in A + \bar{A}_0)$$

が成り立つような定数 C が存在する。

$$(ii) \quad d\mu = W dm, \quad W = e^{u+\tilde{v}} \quad \text{a.e.}$$

が成り立つような $u, v \in L^\infty(m)$ で, $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$ なるものが存在する。

証明 μ が条件 (i) を満たしているとき, μ が m について絶対連続になることは, Nelson-Szegö ([3]) の方法, または lifting 定理による方法 ([1], [2], [10]) によって示される。したがって, 非負値可積分関数 W によって $d\mu = W dm$ と書ける。補題 1 より, $W > 0$ a.e. より, 系 1.4 より,

$$W = e^{u+\tilde{v}} \quad \text{a.e.}, \quad \|v\|_\infty \leq \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{C}} < \frac{\pi}{2},$$

$$\|u\|_\infty \leq \cosh^{-1} \sqrt{C} + C' < \infty \quad (C, C' \text{ は正の定数})$$

と書ける。逆に W が条件 (ii) を満たしているとき, 定数 M を

$$M = \left(\frac{\cosh \|u\|_\infty}{\cos \|v\|_\infty} \right)^2 \text{ と定めると, } \|v\|_\infty = \cos^{-1} \left(\frac{\cosh \|u\|_\infty}{\sqrt{M}} \right) \leq \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \right)$$

$$\text{かつ } \frac{\cosh |u|}{\cos v} \leq \sqrt{M} \quad \text{a.e. より } |u| \leq \cosh^{-1} (\sqrt{M} \cos v) \quad \text{a.e.}$$

となる。よって, 系 1.4 より (i) が導かれる。(証明終)

つぎの命題 1, 命題 2 は系 1.2 より導かれる。前者は, $\alpha(\theta) = \cos \theta$, 後者は $\alpha(\theta) = \sqrt{\frac{1}{M} W^{p-1}(\theta)}$ として得られる。

命題 1. 荷重 W について, つぎの条件は同値である。

$$(i) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |(P_+ f)(\theta)|^2 (\cos \theta)^2 W(\theta) d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 W(\theta) d\theta \quad (f \in A + \bar{A}_0)$$

$$(ii) \quad W(\theta) = C \cdot \frac{1}{|\cos \theta|} e^{u(\theta) + \tilde{v}(\theta)} \quad \text{a.e.}, \quad \text{または } W(\theta) \equiv 0 \quad \text{a.e.}$$

ただし, C は正の任意定数,

$$|v(\theta)| \leq \frac{\pi}{2} - \left| \frac{\pi}{2} - |\theta| \right| \quad \text{a.e.} \quad (-\pi \leq \theta < \pi)$$

$$|u(\theta)| \leq \cosh^{-1} \left(\frac{\cos v(\theta)}{\cos |\theta|} \right) \quad \text{a.e.}$$

命題2 正の定数 M と P が与えられたとき, 荷重 W

について, つぎの条件は同値である。

$$(i) \quad \int_{\mathbb{T}} |P + f|^2 W^P dm \leq M \int_{\mathbb{T}} |f|^2 W dm \quad (f \in A + \bar{A}_0)$$

$$(ii) \quad W = C \cdot e^{\frac{2}{P+1}(u + \tilde{v})} \quad \text{a.e.}, \quad \text{または } W \equiv 0 \quad \text{a.e.}$$

ただし, C は正の任意定数,

$$|v| \leq \cos^{-1} \left(\frac{W^{P-1}}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{a.e.}$$

$$|u| \leq \cosh^{-1} \left[\left(\frac{M}{W^{P-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \cos v \right] \quad \text{a.e.}$$

つぎの命題は, *lifting* 定理から直接導くこともできるが, ここでは定理1より導くことにする。

命題3 $|\alpha - \beta| > 0$ a.e. かつ $\alpha\bar{\beta}$ が H^∞ 関数 (i.e.,

単位円の内部で有界正則な関数の境界値関数) なる α, β が与えられたとき, $W > 0$ a.e. なる荷重 W について, つぎの条件は同値である。

(i) W は不等式(*)を満たす。

$$(ii) \quad W = C \cdot \frac{1}{r} \cdot e^{u - \tilde{v}} \quad \text{a.e.}$$

ただし, C は正の任意定数, $|\alpha| \leq 1$ a.e., $|\beta| \leq 1$ a.e.

$$|v| \leq \cos^{-1} r \quad \text{a.e.}$$

$$|u| \leq \cosh^{-1} \left(\frac{\cos v}{r} \right) \quad \text{a.e.}$$

証明 $|\alpha - \beta| > 0$ より, $s = \operatorname{Arg}(1 - \alpha\bar{\beta})$ a.e.,

$$r = \left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha\bar{\beta}} \right| \quad \text{a.e.} \quad \text{よって, } -\tilde{s} = \log |1 - \alpha\bar{\beta}| + C' \quad \text{a.e.}$$

ここで C' は定数 ($= -\int_{\mathbb{T}} \log |1 - \alpha\bar{\beta}| dm$) である。したがって,

定理 1 の前提条件は,

$$\int_{\mathbb{T}} |1 - \alpha\bar{\beta}| e^{\tilde{s}} W dm = e^{-C'} \int_{\mathbb{T}} W dm < \infty$$

より, 満たされている。定理 1 の条件 (ii) において,

$$W = C \cdot \frac{1}{|\alpha - \beta|} e^{u - \tilde{v} - \tilde{s}} = C \cdot e^{C'} \left| \frac{1 - \alpha\bar{\beta}}{\alpha - \beta} \right| e^{u - \tilde{v}} \quad \text{a.e.}$$

$$= C'' \frac{1}{r} e^{u - \tilde{v}} \quad \text{a.e.}$$

$$2 |1 - \alpha\bar{\beta}| e^{\tilde{v} + \tilde{s}} \cos v = 2C \cdot e^u \cdot \frac{\cos v}{r}$$

$$\geq C e^u (e^{|u|} + e^{-|u|}) \geq C \quad \text{a.e.} \quad (\text{証明終})$$

つぎの定理において, 前提条件 $r^{-1} \in L^{\infty}(m)$ を更に強い条件 $\frac{1}{|\alpha - \beta|} \in L^{\infty}(m)$ におきかえると $W dm$ は Nelson-Szegő 測度になる。

定理 2 $r^{-1} \in L^{\infty}(m)$ かつ $s \in C(\mathbb{T})$ なる α, β が与えられ

たとき, $W > 0$ a.e. なる荷重 W について, つぎの条件は同値である。

(i) W は不等式 (*) を満たす。

$$(ii) \quad W = C \cdot \frac{1}{|\alpha - \beta|} e^{u - \tilde{v} - \tilde{s}} \quad \text{a.e.}$$

ただし, C は正の任意定数, $|\alpha| \leq 1$ a.e., $|\beta| \leq 1$ a.e.

$$|v| \leq \cos^{-1} r \quad \text{a.e.}$$

$$|u| \leq \cosh^{-1} \left(\frac{\cos v}{r} \right) \quad \text{a.e.}$$

参考文献

- [1] Arcena, R., Cotlar, M. and Sadosky, C. : Weighted inequalities in L^2 and lifting properties, *Advances in Math. Suppl. Studies* 7A, 95-128, Academic Press, 1981.
- [2] Cotlar, M. and Sadosky, C. : On the Nelson-Szegö theorem and a related class of modified Toeplitz kernels, *Proc. Symp. Pure Math. A.M.S.* 35(1979), 383-407.
- [3] Nelson, H. and Szegö, G. : A problem in prediction theory, *Annali di Mat. Pura et Applicata* 4, 51 (1960), 107-138.
- [4] Koosis, P. : Weighted quadratic means of Hilbert transforms, *Duke Math. J.* 38(1971) 609-634.
- [5] ——— : Moyennes quadratiques pondérées de fonctions périodiques et de leurs conjuguées harmoniques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 291 (1980) 255-257.
- [6] Nakazi, T. and Yamamoto, T. : A lifting theorem and uniform algebras, to appear in *T. A. M. S.*
- [7] ——— : Some singular integral operators and weighted norm inequalities, in preparation.
- [8] Nikolskiĭ, N. K. : *Treatise on the shift operator*, Springer Verlag, 1986.
- [9] Widom, G. : Singular integral equations in L^p , *T. A. M. S.* 97(1960) 131-160.
- [10] Yamamoto, T. : On the generalization of the theorem of Nelson and Szegö, *Hokkaido Math. J.*, 14 (1985) 1-11.