

3 次の θ - τ ワイル和

(A CANDIDATE FOR CUBIC THETA-WEYL SUMS)

中井 喜信 (山梨大学 数理学部)

(Yoshinobu Nakai (Y.N. Nakai))

Waring の問題 $W(k)$ の他で登場する Weyl 和 (及び指数和) について, 実 2 次多項式の Weyl 和 については, β -級数との比較を (7-1), Poisson の和公式から (あるいは Euler の和公式から) 得られる van der Corput の方法により, 数論的に明示的に表示が得られる. ([7-1], [7-4] の第 2 章, [1] など). 当然, 3 次以上の多項式について, 何らかの β -級数的な性質を取り出せるかどうかの可否は, 古来, 数論的にある一定の性格をもちつつは, ある一定の困難さを示唆するものとして現れて来た. ([6], [8]; [3], [4], [9]; [5], [7-6], [11] など). 指数和を扱う通りの方法 (Hardy-Littlewood-Weyl, van der Corput, I.M. Vinogradov の方法) のうち, van der Corput の方法は, 高次の多項式には (7-2) が不十分で, その方法を述べている [7-3] で示唆した. 筆者は, [7-9] ([7-5], [7-7]) において, 「3 次の θ - τ ワイル和」と呼ぶべきものを見出し, 変換 $(\frac{1}{a} \ -a)$ ($a \in \mathbb{Z}$) に対応する形は, これを適用するだけ, 背後にあるものの見え方が変わってくる. ここで中間報告を行う

う.こゝとする. ([7-8]). 後述の式の中の $+O_\alpha(X^{-1})$ や $+O_{\alpha, \varepsilon_k}(X^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ 等の implied constant は, 最終的にはすべて明示的にすべきである, すべて routine works の範囲内の事にて趣旨は御理解いただけるであろう. ([7-2] の時の下計算の手法)

1° 3 次の連合数展開 ([7-5], [7-7])

良く知られてゐる通りに, 実数の正則連合数展開は, 通常の T - 2 級数, つまり 2 変式の (ある一定形式の) 指数和に対応するものと見て, 今から述べる連合数展開を "3 次の連合数展開" と呼ぼう. 後述の 3 次の T - 2 - 7 イレ和の変換から 3 次の展開は, 他の形は期待できよう. (なお, ここでは [7-5] に書いた時の形のままで述べよう, [7-1] のように $\alpha' > 2$, $\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} = a' + \varepsilon'' \alpha''$ ($a' \in \mathbb{N}$, $\varepsilon'' = \pm 1$, $\alpha'' > 2$) の形で書く方がよい.)

実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し, 初期変数として

$$\alpha = a_1 + \varepsilon_1 \alpha_0 \quad (\varepsilon_1 = \pm 1, a_1 \in \mathbb{Z}, \frac{1}{2} > \alpha_0 > 0)$$

として, 以下, α_0 から

$$\frac{1}{\sqrt{2\alpha_k}} = a_k + \varepsilon_{k+1} \alpha_{k+1} \quad (\varepsilon_{k+1} = \pm 1, a_k \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} > \alpha_{k+1} > 0)$$

を作り (今は途中経過の場合に述べよう) ($\varepsilon_0 = 1$ に注意)

$$\alpha_0 = \frac{1}{2 \left(a_0 + \frac{1}{2 \left(a_1 + \frac{\varepsilon_1}{2 \left(a_2 + \dots + \frac{\varepsilon_{k-1}}{2 \left(a_{k-1} + \frac{\varepsilon_k}{2 \left(a_k + \frac{\varepsilon_{k+1}}{2 \left(a_{k+1} + \frac{\varepsilon_{k+2}}{2 \left(a_{k+2} + \dots \right)} \right)} \right)} \right)} \right)} \right)} \right)} \right)}$$

である。文献[12]の「分岐型連分級」を「階」連分級として、
 十分には調べておく。

2° 3次のT-2・ワイル和のvander Corput型の反転関数

Vander Corput の方法の1例は、[10]の第4章や[2]に詳しい。
 いま、実数値関数 $f(x)$ は、 C^2 -級で、 f' は狭義単調増加で、
 y に対して、 x_y を $f'(x_y) = y$ で定める。 f の vander Corput 型の
 反転関数 $g(y) = f(x_y) - y \cdot x_y$ で定める。 $(\frac{d}{dy} g(y))$
 $= -x_y$ である)。

例として、 $f(x) = \frac{h-1}{h} \alpha \cdot x^h$ とすると、 $g(y) = -\frac{h-1}{h} \cdot \frac{y^{\frac{h}{h-1}}}{\sqrt[h-1]{(h-1)\alpha}}$
 となる。 $h=2$ の時のみ、 g が y について2次式になるが、
 $h \neq 2$ では、そうならず、古来、「3次のT-2級数」を得るの
 は、素直には出来ない、が次第である。

そこで、次のように考える。まず $X \in \mathbb{R}$, $X \rightarrow \infty$,
 $0 < N \ll X$ とし、 $k \in \mathbb{N}$ (induction 用) について、 k 変
 数の関数 $F(\xi_1, \dots, \xi_k) \in C^+(\mathbb{R})$ ($|\xi_1|, \dots, |\xi_k| \leq \frac{1}{X}$),
 $F(0, \dots, 0) = 1$, $(\xi) = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ とし、 $(F$ は k に応じて
 変化する) に対し、和 $\xi \in \mathbb{Q}$ での変数 $x \in \mathbb{N}$ ($X < x \leq X+N$) は、
 いて、 $x = x'^2 + x''$; $x' \in \mathbb{N}$, $x'' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x'^2 \leq x'^2 + x''$
 $< (x'+1)^2$ (即ち $0 \leq x'' \leq 2x'$) ; と分解し、 x' は本稿の変
 数、 x'' は x' に附随する局所的変数とする。実数 $\xi_1, \dots, \xi_k$ を

$|z_j| \ll X \quad (z) = (z_1, \dots, z_k) \quad \chi(17) \text{ 実数 } \alpha \quad (\frac{1}{2} > \alpha > 0) \quad 12$

1) χ

$$f(\chi') = \frac{2}{3} \alpha \cdot \chi^{\frac{3}{2}} \cdot F\left(\frac{z_1}{\chi}, \dots, \frac{z_k}{\chi}\right) \quad \left(\begin{array}{l} \chi' \text{ の } F \text{ の変数} \\ \chi'', z_1, \dots, z_k \text{ は } N \times 3 \text{ 変数} \end{array} \right)$$

とある。一掃の $G((z)) = F((z)) - \frac{2}{3} \sum_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j} F((z))$ 4 用意

17 とある。

[Lemma] $\frac{\partial}{\partial \chi'} f(\chi') = 2 \cdot \alpha \cdot \chi \cdot \sqrt{1-Q} \cdot G((z))$

但し $\chi = \chi'^2 + \chi'' \quad , \quad Q = \frac{\chi''}{\chi} \quad , \quad z_j = \frac{z_j'}{\chi}$

$\chi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad y \in \mathbb{C} \quad , \quad \chi_y \in \left(\frac{\partial}{\partial \chi'} f(\chi') \right)_{\chi' = \chi_y} = y \quad 7 \text{ とある。} \quad 3 \text{ 12}$

$\chi_y = \chi_y'^2 + \chi'' \quad \chi \text{ とある。}$

[定 34] (Cubic reciprocal fact. of van der Corput type)

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \alpha \cdot \chi_y^{\frac{3}{2}} \cdot F\left(\frac{z'}{\chi_y}\right) - y \cdot \chi_y' \\ &= -\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \cdot y^{\frac{3}{2}} \cdot \left(t \frac{1+\sqrt{-1}}{2} \left(1 + \sqrt{-1} \sqrt{\frac{\alpha \chi''}{y}} + \frac{1}{2} \left(G^2\left(\frac{2\alpha(z)}{y}\right) - 1 \right) \right)^{\frac{3}{2}} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} (F - G^3) \left(\frac{2\alpha(z)}{y} \right) \right) \end{aligned}$$

$+ O_{k, \alpha, F}\left(\frac{1}{X}\right)$

但し $t \frac{1+\sqrt{-1}}{2} (1 + O + \sqrt{-1}V)^{\frac{3}{2}} = \frac{1+\sqrt{-1}}{2} (1 + O + \sqrt{-1}V)^{\frac{3}{2}} + \frac{1-\sqrt{-1}}{2} (1 + O - \sqrt{-1}V)^{\frac{3}{2}}$

とある。

最終的には

勿論 $+ O_{k, \alpha, F}(\dots)$ の中の係数は、すべて明示的に与えられる。

がある。但し induction を食った際には $+O(\dots)$ の代り、[7-4]の

第2章中のように、漸近顕微的に表示して与える必要では

ある。定理の右辺の形が本命と見る ($y = y'^2 + y''$) と分解して与える

本当の変数 λ を y の表示で与える。注意として、

$$F = 1 \quad \text{or} \quad G = 1$$

$$F = \frac{1}{2} \frac{1+\sqrt{1+4V}}{1-\sqrt{1+4V}} \quad \text{or} \quad G = \frac{1}{2} \frac{1+\sqrt{1+4V}}{1-\sqrt{1+4V}} \quad \left(\begin{array}{l} 0, V \text{ は 任意の 数} \\ V=0 \text{ のとき 定理は } +O(\frac{1}{x}) \text{ となる} \\ V \neq 0 \text{ のとき 定理は } +O(\frac{1}{x}) \text{ となる} \end{array} \right)$$

証明は、係数 7 の項まで展開し両辺を比較する。このとき

$$F = 1 \text{ のときは } 1 + \sqrt{\frac{4V}{y}} = r e^{i\theta} \text{ と極形式で表す}$$

(θ は 0 から 2π の間)。両辺 (の $+O(-)$ の $(\frac{1}{x})$) の平方を比較すると、

$\sin 3\theta$ の三倍角公式に帰着することから示すことができる。

これは、 $\frac{1}{2} \frac{1+\sqrt{1+4V}}{1-\sqrt{1+4V}}$ の多項式を連想させる。このとき

より、実は定理の右辺は ($x \neq 0$ のとき)

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + O(x^4)$$

$$\frac{1}{2} \frac{1+\sqrt{1+4V}}{1-\sqrt{1+4V}} = 1 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + O(x^4)$$

の比較から見つけた次等式 $F - G^3 = 0 \Leftrightarrow F = (1 + \frac{1}{2} \frac{1+\sqrt{1+4V}}{1-\sqrt{1+4V}})^{\frac{3}{2}}$

3° parabolic 変換 $(\frac{1}{y}, -\frac{1}{y})$ ($a \in \mathbb{Z}$) について、10年前に見

つけた形の多項式で、 $\frac{1}{y}$ 自身に解けるものが見つかった。また、

"messy" なものもあって、もう少し考察を続けた。が、整理

の後は、次の形のものを扱うべきである。まず初期変数 y 1

$$x = a_1 + \varepsilon_1 x_0 \quad (a_1 \in \mathbb{Z}, \varepsilon_1 = \pm 1, \frac{1}{2} > x_0 > 0) \text{ として}$$

$$\sum_{x_0} e(\frac{2}{3} \alpha x_0^3) (x < x_0' \leq x_0 + w) \leq \sum_{x_0'} e(\frac{2}{3} \varepsilon_1 \alpha_0 \cdot \frac{1}{2} \frac{1+\sqrt{1+4V}}{1-\sqrt{1+4V}} (x_0'^2 + \sqrt{1+4V} x_0)^{\frac{3}{2}}) + O(x^2)$$

($x_0 = 0$ のとき α は定数と見做す) ($x_0' = 0$ と解する) である。 $e(+(-)) = \overline{e(-(-))}$

なので、 $e(\pm(-))$ は、和全体の複素共役で処理 ($\frac{1}{2}$ の $e(-)$)

の意味 $O(\frac{1}{X})$ ではなく $O(\frac{1}{X})$ の $\frac{1}{X}$ に外
 へとして (この時 $p \leq 1/2$ の処理を要する), 和の変換は
 可換, 通常の θ -公式や保型形式のように完全な等式で成立
 する事は期待せずに, かつ "admissible error" 附 α 公式
 として考えるわけである. かつ, $\ll 1 + O + \sqrt{N} \gg$ 等
 $= \left(t_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (1 + O + \sqrt{N})^{\frac{1}{2}} \right) - \left(t_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (1 + O + \sqrt{N})^{\frac{1}{2}} \right)^3$ を用意し
 て, α_0 から 3 次の連合数展開と行, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -a_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 による変換を k 回行う, $\tau_1 \chi_1$ ([7-1] の事を参照). χ_1
 $\left(\prod_{j=0}^k \sqrt{2\omega_j} \right) \cdot N \gg 1$ ならば, $(\chi_n = \chi_n' + \chi_n'')$. 取ろうとすれば,

$$A_k \sum_{\chi_n'} (\chi_n')^{-\frac{k}{2}} \sum_{\chi_n'' \neq \chi_n'} e^{i \frac{2}{3} \alpha_k \left(t_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(\chi_n + \sqrt{1 + (\text{linear in } \chi_1'', \dots, \chi_{n-1}'') + \text{const}} \right)^{\frac{1}{2}} \right.} \\ \left. + \sum_{j=1}^k \sum_{h=1}^4 k_{j,h} \langle \dots \rangle \right) \\ + O_{\alpha,k}(\sqrt{X})$$

$t_1 t_2$ ($\left(\prod_{j=0}^k \sqrt{2\omega_j} \right) X < \chi_n' \leq \left(\prod_{j=0}^k \sqrt{2\omega_j} \right) (X + N)$
 $\chi_n'' = (\chi_1'', \dots, \chi_n'')$ $0 \leq \chi_j'' \leq B_j^{(k)} \chi_n'$ ($B_n^{(k)} = 2$)
 $A_k, B_j^{(k)}, k_{j,h}$ は α_0 の連合数展開から定まる数.
 $\langle \dots \rangle$ は $\chi_n^{\frac{3}{2}} \ll \left\langle 1 + (\text{linear in } \chi_1'', \dots, \chi_n'') + \text{const} \right\rangle / \chi_n$
 $\left\langle 1 + \sqrt{1 + (\text{linear in } \chi_1'', \dots, \chi_n'') + \text{const}} \right\rangle / \chi_n$
 の平均

(以下 k 4 induction に従って)

である. $\left(\left(\prod_{j=0}^k \sqrt{2\omega_j} \right) N \gg 1 \gg \left(\prod_{j=0}^k \sqrt{2\omega_j} \right) N \right)$ ならば, 種々
 $\frac{1}{2}$ の vander Corput の lemma ([10] の (Lemma 4.8)) の形に整理
 することができる. 勿論 $+O_{\alpha,k}(\dots)$ は, 定数の係数を持つ

んを行わねばならぬ。また, Poisson 和公式では, θ の区間の端点の項は, 適宜に重み $(\frac{1}{2})^*$ をつけねばならぬので, γ の処理が必要。この $\sum_n K_{jn} \langle \dots \rangle$ は γ の "Mayer" の形の所である。

固定した x'_k について $x_k^{-\frac{1}{2}} \sum_{x'_k \rightarrow x_k} e(\dots)$ の所は, Hessian の形から $O_{k,\alpha,\varepsilon}(X^{k\varepsilon})$ の形となる (γ 期待して) ので, x'_k 連を, x'_k に附随する局所変数と見てよいからである。文献 [7-8]

細部で詰めた定式を示すのは, 3 月何年かである (あるいは, 未完?) と思われるので, 中間報告とする次第で。

REFERENCES

- [1] H. Fiedler, W. Jurkat & O. Körner; "Asymptotic expansions of finite theta series", Acta Arith., Vol. 32 (1977), 129-146.
- [2] S.W. Graham & G. Kolesnik; "Van der Corput's Method of Exponential Sums", London Math. Soc. Lecture Note Series 126, (1991).
- [3] J.-I. Igusa;
 - "Theta Functions", Grundlehren math. Wiss. Einzel., Bd. 194, Springer Verlag (1972),
 - "Lectures on forms of higher degree", Tata Inst. Fundamental Research, Bombay (1972).
- [4] T. Kubota;
 - "On an analogy to the Poisson summation formula for generalized Fourier

- transformation", J. reine angew. Math., 268/269 (1974), 180-189.
- "A generalized Weil type representation and a function analogous to e^{-x^2} ", Bull. Amer. Math. Soc., 81 (1975), 902-908.
 - "A complex Airy integral", Nagoya Math. J., 61 (1976), 111-116.
 - "On a generalized Fourier transformation", J. fac. Sci. Tokyo, Sect. IA Math., 24 (1977) no. 1, 1-10.
- [5] 栗原幸男; 「擬Fourier変換について」, 数理解析研究所講義録 No. 1039, 応用函数解析の研究, 1998年4月刊, pp 152-164.
- [6] W. Maier; "Transformation der kubischen Thetafunktion", Math. A., 111 (1975), 183-196.
- [7-1] Y. N. Nakai; "On a $\mathcal{D}$ -Weyl sum", Nagoya Math. J., 52 (1973), 163-172,
同 Enslin, 同 J. 60 (1976), 217.
- [7-2] 中井喜信; 「 π - σ の一般化」, 第22回代数学レクチャーの報告集, 1976年 秋・冬号, pp 11-30.
- [7-3] 中井喜信; 「Weyl 数と van der Corput の定理」, 数理解析研究所講義録 No 456, 1982年, 2-17.
- [7-4] Y. N. Nakai; "On Diophantine inequalities of real indefinite quadratic forms of additive type in four variables", Advanced Studies in Pure Mathematics 13, Investigations in Number Theory, 1988年, 25-170.
- [7-5] 中井喜信; 「3次の連分数展開」, 山梨大学教育学部研究報告, 第4号第2分冊, 1990年, 4-6.

- [7-6] 中井喜信; 「Fuchs 変換不変」の関数の実質に2次多項式であることの例証, 同上誌, 第43号第2分冊_A, 1-3. (1992)
- [7-7] 中井喜信; 「3次の連分級展開II」, 同上誌, 第44号第2分冊_A, 1-3. (1993)
- [7-8] 中井喜信; 「3次のT-θ-ワイル種(I)」, 同上誌, 第49号第2分冊_A, 1-4. (1998)
- [7-9] 中井喜信; (1991年度数学会年会, 慶応大学同窓会での報告会)
- [8] W. Raab; "Kubische und biquadratische Thetafunktionen I und II", Sitzungsber. Österreich. Akad. Wiss., Mat-Natur. Kl., 188 (1979), 47-77 und 230-246.
- [9] T. Suzuki; "Weil type representation and automorphic forms", Nagoya Math. J., 77 (1980), 45-106.
- [10] E.C. Titchmarsh; "The Theory of the Riemann Zeta-Function", Oxford (1951年),
- [11] R.C. Vaughan; "Some Remarks on Weyl sums", Colloquia Math. Soc. János Bolyai, 34(II), Topics in classical number theory, Budapest, Hungary, (1987), 1585-1602.
- [12] Д.И. Боднар, "Ветвящиеся цепные дроби", Киев Наукоса Думка (1986).
(D.I. Bodnar, "Branching continued fraction")