

## Homogeneous space について

筑波大数学系 川村一宏 (Kazuhiko Kawamura)

Homogeneous continuum の研究の中で与えられた continuum の decomposition を考える事により得られる結果がいくつかある。ここでは、T. Maćkowiak の論文 [M] の中から completely regular decomposition を使って得られる結果を 2 つ紹介する。

### 1. Homogeneous continuum

定義 1. continuum (=compact connected metric space)  $X$  が homogeneous であるとは、 $\forall x, y \in X$  に対し onto homeomorphism  $h: X \xrightarrow{\sim} X$  で  $h(x) = y$  を満たすものが存在することである。以下  $X$  上の onto homeomorphism の全体を  $H(X)$  で表わす。

次の定理は homogeneous continuum を調べる為の基本的な道具である。( (1.6) は論文 [M] の中の番号。以下同様。)

定理 2 (1.6) continuum  $X$  が homogeneous なら  $X$  の compatible metric  $\sigma$  (Effros metric という) が次を満たす様に存在する。

$\forall x, y \in X$  に対し  $\sigma(x, y) < \varepsilon$  (但し  $\varepsilon > 0$ ) ならば、 $h \in H(X)$  が  $h(x) = y$  かつ  $\sigma(h, id_X) < \varepsilon$  を満たす様にとれる。

従って特に

系 3. continuum  $X$  が homogeneous なら  $X$  は property K を持つ。  
(注) 参照).

## 2. Completely regular maps

定義 4. compact metric space の間の onto map  $f: X \rightarrow Y$  が次を満たすとき、completely regular という。

任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、次を満たす  $\delta > 0$  が存在する。

$\forall y, z \in Y$  with  $d(y, z) < \delta$  に対し、homeo.  $h: f^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} f^{-1}(z)$  が  $d(h(p), p) < \varepsilon, \forall p \in f^{-1}(y)$  を満たす様に存在する。

上の定義から completely regular map は常に open map であることがわかる。completely regular map 及び open map についての次の 2 つの定理が後で用いられる。

定理 5 (1.5) ([Ma-W]).  $f: X \rightarrow Y$  は completely regular monotone map,  $X$  は 1 次元 compact metric space,  $Y$  は continuum とする。この時、 $Y$  も 1 次元でかつ、任意の  $y \in Y$  に対し  $f^{-1}(y)$  は tree-like

である。

定理 6 ([D], [K]).  $f: X \rightarrow Y$  は continuum の間の monotone open onto map とする。次の様な dense G $\delta$  subset  $A \subset Y$  が存在する。

任意の  $y \in A$ , 任意の continuum  $B \subset f^{-1}(y)$ , 任意の  $x \in \text{int}_{f^{-1}(y)} B$  と任意の  $B$  の mbd  $\sqcup$  in  $X$  に対して、次の様な continuum  $Z \supset B$  と  $y$  の mbd  $V$  in  $Y$  が存在する。

- 1)  $x \in \text{int } Z$ .      2)  $(f|Z)^{-1}(V) \subset \sqcup$ .
- 3)  $f|Z: Z \rightarrow Y$  は monotone onto map.

### 3. Terminal continua in homogeneous continua

定義 7  $Q \subset X$  は 2 つの continuum とする。  $Q$  が次を満たす時、  $Q$  は terminal in  $X$  という。

任意の continuum  $K \subset X$  with  $K \cap Q \neq \emptyset$  に対し  $K \subset Q$  or  $K \supset Q$ .

$X$  の terminal continuum の全体を  $T(X)$  で表わす。

命題 8 (1.2) - (1.4).  $X, Y$  は continuum とする。

- (1)  $X$  が property K を持てば、  $T(X)$  は closed in  $C(X)$ . 但し  $C(X)$  は  $X$  の non empty subcontinuum の全体に Hausdorff metric (dist で表わす) を入れたものとする。

(2) 任意の map  $f: X \rightarrow Y$  と任意の  $K \in T(Y)$ , 任意の  $f^{-1}(K)$  の component  $C$  に対して  $f(C) = K$ .

(3)  $X$  が homogeneous なら、 $X$  の全ての proper terminal subcontinuum は indecomposable (即ち、2つの proper subcontinuum の union として 表わされない).

(1) と (2) は定義から容易. (3) を示す為に定理 6 の系として、

系 9.  $f: X \rightarrow Y$  は continuum の間の monotone open map とする.

dense  $G_\delta$  set  $A \subset Y$  を定理 6 のものとする. この時、任意の  $y \in A$  に対して、 $f^{-1}(y)$  は indecomposable.

homogeneous continuum  $X$  の terminal subcontinuum  $T$  をとる.

定理 2 を使って continuum  $K \supset T$  と completely regular monotone map  $f: K \rightarrow Y$  s.t.  $T = f^{-1}(y)$  for some  $y \in Y$  を構成できる.  $f$  に対して系 9 を使えば (3) が示せる. ([M-T] p.16-18).

#### 4. Main Theorem

定義 10. continuum  $T$  が triod であるとは、subcontinuum  $S \subset T$  が存在して、 $T \setminus S$  が互いに separate された 3 つの open set の union であること、とする. continuum が triod を含まな

い時、atriodic といふ。

次の 2 つを目標とする。

定理 11 (1.12).  $X$  が atriodic homogeneous continuum とする。

$X$  の任意の proper subcontinuum は tree-like である。

定理 12 (1.13).  $X$  は 1 次元 homogeneous continuum とする。  $X$

の任意の proper terminal subcontinuum は tree-like である。

まず次の定理を示す。

定理 13 (1.7).  $X$  は homogeneous continuum とする。  $Y \in$

$C(X) \setminus T(X)$  に対して、

$$\mathcal{D} = \left\{ T \mid \begin{array}{l} T \text{ は } Y \text{ に含まれる } X \text{ の terminal subcontinuum のうち} \\ \text{極大であるもの} \end{array} \right\}$$

とおく。  $\mathcal{D}$  は  $Y$  の continuous decomposition であって、 quotient map  $p: Y \rightarrow Y/\mathcal{D}$  は completely regular である。

証明. 命題 8 (1) と Zorn の Lemma を使うと、  $\mathcal{D}$  が upper semi-continuous decomposition であることが分かる。以下  $\mathcal{D}$  が lower semi-continuous である (i.e.  $p$  が open map) ことを示す。

$X$  は定理 2 の metric  $\sigma$  を持つとする。  $\varepsilon = \text{dist}(Y, T(X)) > 0$  とおく。任意の  $0 < \delta < \varepsilon/2$  に対して、

(\*)  $\mathcal{F}'p(B(x,\delta)) = \bigcup \{K \in \mathcal{D} \mid K \cap B(x,\delta) \neq \emptyset\}$  は open in  $Y$

を示せばよい。ここで  $B(x,\delta)$  は  $x$  の  $\delta$ -mbd in  $Y$ .  $U = B(x,\delta) \subset Y$  とおく。  $q \in K \subset \mathcal{F}'p(U)$ ,  $K \in \mathcal{D}$  を任意にとり、  $y \in K \cap U$  とする。  
 $\eta > 0$  を十分小さくとり、  $0 < \eta < \delta$  かつ  $B(y,\eta) \subset U$  とする。

$$B(q,\eta) \subset \mathcal{F}'p(U)$$

を示す。  $r \in B(q,\eta)_{\subset Y}$  を任意にとる。定理 2 から、  $h \in H(X)$  が  $h(q) = r$  かつ  $\sigma(h, id_X) < \eta$  を満たすように取れる。  $h(K) \cap Y \ni r$  に注意する。

$h(K) \in \mathcal{T}(X)$  だから  $h(K) \subset Y$  または  $h(K) \supset Y$ . もし  $h(K) \supset Y$  なら、  
 $\text{dist}(K, Y) < \delta < \varepsilon/2$  となり  $\varepsilon$  の取り方に反する。従って  $h(K) \subset Y$ .  
 $r$  を含む  $\mathcal{D}$  の member を  $L$  とすると、  $K, L$  の極大性から  $h(K) = L$ .  
 かつ  $L \cap U \supset L \cap B(y,\eta) = h(K) \cap B(y,\eta) \neq \emptyset$  から、  $r \in L \subset \mathcal{F}'p(U)$ .  
 従って (\*) が示せた。

上の議論の中で  $p: Y \rightarrow Y/\mathcal{D}$  が completely regular であることも同時に示されているので、定理の証明が終った。

定義 14. continuum  $Y$  が discoherent とは、任意の subcontinuum  $A, B \subset Y$  with  $Y = A \cup B$  に対し、  $A \cap B$  は 連結でない こととする。continuum  $X$  の discoherent subcontinuum の全体を  $D(X)$  で表わす。

次の命題は graph of a universal cover が (infinite) tree であることを

使って証明できる。

命題 15 (1.10)  $f: X \rightarrow K$  は continuum  $X$  から graph  $K$  への map で次を満たすとする (以下  $f \text{ irr.} \neq 0$  と表わす)。

$f \neq 0$  かつ任意の proper subcontinuum  $Y \subsetneq X$  に対し、 $f|Y \simeq 0$ 。  
このとき  $X$  は discoherent。

命題 16 (1.11).  $X$  は 1 次元 homogeneous continuum とする。

$D(X) \subset T(X) \Rightarrow X$  の任意の proper subcontinuum は tree-like.

証明  $X$  は定理 2 の metric  $\sigma$  を持つとする。continuum  $Y \subsetneq X$  が tree-like でないとする。graph  $K$  と null-homotopic でない map  $f: Y \rightarrow K$  が存在する。 $Y$  の subcontinuum  $Y'$  で、 $f|Y' \text{ irr.} \neq 0$  を満たすものを改めて  $Y$  とおくことにより、最初から  $f \text{ irr.} \neq 0$  と仮定してよい。命題 15 から  $Y \in D(X) \subset T(X)$  だから、[G-T] Cor 3.6 から  $f$  の  $X$  上への extension  $f^*: X \rightarrow K$  が存在する。 $\varepsilon$  と  $\delta$  を次の様にとる。

1)  $\forall a, b: X \rightarrow K$  に対し、 $d(a, b) < \varepsilon \Rightarrow a \simeq b$ 。

2)  $\sigma(x, y) < \delta \quad x, y \in X \Rightarrow d(f^*(x), f^*(y)) < \varepsilon$

また map の class  $\mathcal{F}$  を  $\mathcal{F} = \{g: X \rightarrow K \mid g \simeq f^*\}$  とする。各  $g \in \mathcal{F}$  に対して subcontinuum  $Y_g$  を

3)  $g|Y_g \text{ irr.} \neq 0$

を満たすようにとれば、命題 15 と仮定より  $Y_g \in T(X)$ 。従って

$$4) \quad Y_g \cap Y_h \neq \emptyset \Rightarrow Y_g = Y_h.$$

$\mathcal{D} = \{Z \in C(X) \mid Z \subset B(Y, \delta) \text{ かつ } \exists g \in \mathcal{T} \text{ s.t. } g|Z \text{ irr. } \neq 0\}$  とおく時.

1), 2) から次が成立する.

5) 任意の  $w \in H(X)$  with  $\sigma(w, \text{id}_X) < \delta$  に対し,  $w(Y) \in \mathcal{D}$ .

実際,  $f^*w|Y \simeq f^*|Y \neq 0$  から  $f^*|w(Y) \neq 0$ . もし proper subcontinuum

$S \subsetneq w(Y)$  に対して  $f^*|S \simeq 0$  なら,  $f^*w|S \simeq f^*|S \simeq 0$  から  $f^*|w(S) \simeq 0$  となり,  $f^*|Y \text{ irr. } \neq 0$  であることに反する. 従って  $w(Y) \in \mathcal{D}$ .

5) と metric  $\sigma$  と取り方から,  $B(Y, \delta) = \bigcup \mathcal{D}$  であり任意の  $K \in \mathcal{D}$  は terminal in  $X$  である.  $Y \in \mathcal{D}$  に注意する.

continuum  $Z$  を  $Y \subsetneq Z \subset B(Y, \delta)$  ととると各  $K \in \mathcal{D}$  が terminal であることから,  $\{K \in \mathcal{D} \mid K \subset Z\}$  は  $Z$  の decomposition を与える. 5) と同様な議論によつてこれは completely regular decomposition であることが分かる. 定理 5 を適用して  $Y$  が tree-like になるから最初の仮定に反する. 従つて証明が終つた.

定理 11 は命題 16 と次の 2 つの定理を組み合わせて得られる.

定理 17 ([H], [R]). Atriadic homogeneous continuum は 1 次元である.

定理 18 ([M-T] p.30).  $X$  が atriadic  $\Rightarrow D(X) \subset T(X)$ .



次に定理12の証明にうつる。まず定理5と13の系として、

系19 (1.8).  $X$  は1次元 homogeneous continuum とする。

terminal continuum  $A$  が terminal でない subcontinuum  $Y \subset X$  に含まれていれば、 $A$  は tree-like である。

証明は “tree-like である” という性質は subcontinuum に伝わることに注意して、定理5と13を使えばよい。

定理12の証明.  $X$  は1次元 homogeneous continuum であるとし、 $A \in T(X) \setminus \{X\}$  をとる。もし  $A$  が terminal でない subcontinuum に含まれていれば、系19から証明が終わる。従って

(1)  $A$  を含む任意の subcontinuum は terminal in  $X$  としてよい。 $A$  の subcontinuum  $B$  を

(2) 「 $B$  を含む任意の subcontinuum は terminal in  $X$ 」 という性質について極小

であるものとする (c.f. 命題18(1)). 特に  $B \in T(X)$  に注意。

$\mathcal{B} = \{h(B) \mid h \in H(X)\}$  とおく。定理2から  $\mathcal{B}$  は  $X$  の completely regular monotone decomposition を与えることが分かる。 $\mathcal{B} \subset T(X)$  に注意する。

$p: X \rightarrow X/\mathcal{B}$  を quotient map とすると、上の注意と定理5から、 $p$  は次をみたす。

(3)  $p$  の任意の fibre は tree-like.

(4)  $X$  の任意の subcontinuum  $K$  で  $p(K)$  が 1 点でないものに対して、 $K = p^{-1}p(K)$ .

また (2) を使うと、 $X/B$  は homogeneousかつ hereditarily indecomposable (i.e. 全ての subcontinuum が indecomposable) であることが分かる。特に  $X/B$  は homogeneous atriodic continuum だから、定理 11 を使って

(5)  $X/B$  の任意の proper subcontinuum は tree-like.

$X$  の任意の proper subcontinuum  $K$  をとる。 $p(K)$  が 1 点なら (3) から  $K$  は tree-like である。 $p(K)$  が 1 点でないなら (4) から、 $K = p^{-1}p(K)$  だから定理 5 を  $p|_K: K \rightarrow p(K)$  に適用すると、 $sh K = sh p(K) = 0$ 、 $\dim K = 1$  だから、 $K$  は tree-like である。 $K$  は任意だから、特に  $A$  も tree-like であり、定理の証明が終わった。

注) continuum  $X$  が次の性質を持つ時、property K を持つ、と言う。

任意の  $\varepsilon > 0$  に対し次のような  $\delta > 0$  が存在する。

$\forall p \in \forall K \in C(X), \forall q \in X$  with  $d(p, q) < \delta$  に対して、 $\exists L \in C(X)$   
s.t.  $q \in L$  かつ  $\text{dist}(K, L) < \varepsilon$ .

定理 11 と 12 の中の “tree-like” を “arc-like” に変えられるのはどのような場合か？ というのは面白い問題であると思われる。

## References

- [C-M] J.J. Charatonik - T. Maćkowiak, Around Effros' theorem, Trans. A.M.S. 298 (1986), p.579-602.
- [D] E.Dyer, Irreducibility of the sum of elements of continuous collection of continua, Duke Math. J. 10 (1953), p. 589-592.
- [G-T] J. Grispolakis - E.D. Tymchatyn, On the Čech cohomology of continua with no  $n$ -ods, Houston J. Math. 11 (1985), p.505-513.
- [H] C.L. Hagopian, Atriadic homogeneous continua, Pacific J. Math. 113 (1984) p.333-347
- [K] J. Krasinkiewicz, On two theorems of Dyer, Colloq. Math. 50 (1986) p.201-208.
- [M] T. Maćkowiak, Terminal continua and the homogeneity, Fund. Math. 127 (1987) p.177-186.
- [M-T] ——— - E.D. Tymchatyn, Continuous mappings of continua II, Dissertation Math. 225 (1984).
- [Ma-W] A. Mason - D.C. Wilson, Monotone mappings on  $n$ -dimensional continua, Houston J. Math. 9 (1983) p.49-62.
- [R] J.T. Rogers, Atriadic homogeneous nondegenerate continua are one dimensional, Proc. A.M.S. 102 (1988) p.191-192.