

力学系における大局的分岐と  
局所的軌道拡大率の揺らぎのスペクトル  
九大理 宮崎修次・吉田健

これまで拡大率スペクトルの研究は、ある特定のアトラクターについて、ある分岐点上及びその近傍においてなされてきた。一般に相空間には複数の不変集合（リペラーも含む）が存在し、系の制御変数を変化させると、それらが生成消滅或いは分離結合する。このような大局的分岐を拡大率スペクトルの定義を拡張することによって捉えたい。

いま次式で与えられるような少数自由度の離散力学系を考える（flow の場合はポワソノ断面をとる）。

$$\mathbf{r}_{t+1} = f(\mathbf{r}_t) \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

そしてこの時系列の各点における局所軌道拡大率  $\lambda(\mathbf{r}_t)$  を十分長い時間にわたって粗視化する。

$$\Lambda_n(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \lambda(\mathbf{r}_t)$$

位相空間内に複数の不変集合があるとき、 $l$  番目の不変集合における  $\Lambda_n(\mathbf{r})$  の分布を  $P_l(\Lambda; n)$  と表す。

$$P_l(\Lambda; n) \propto n^\nu e^{-n\psi_l(\Lambda)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$\Lambda$  の分布が上式のようにスケールされると仮定し、拡大率スペクトル  $\psi_l$  を導入する。ここで  $\nu$  は一般には  $1/2$  だが他の値をとり得る。これまである特定の不変集合についてのみ定義されていた拡大率スペクトルの定義を、相空間に存在する複数の不変集合を含むように拡張する。

$$P(\Lambda; n) = \sum_l c_l P_l(\Lambda; n)$$

$$P(\Lambda; n) \propto n^\nu e^{-n\psi(\Lambda)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\psi(\Lambda) = \min_l \psi_l(\Lambda)$$

ここで  $c_l$  は  $\sum_l c_l = 1$  を満たす実数である。

不変集合がアトラクターのときは拡大率スペクトルを求めるのは容易であるが、リペラーのときは次のようにして求める。 $l$  番目の不変集合がリペラー（ $\Gamma$  で表す）の場合、 $\Gamma$  を覆う有限のルベグ測度をもった集合  $C$  を考える。 $C$  内に多数の点を取り、 $f$  を  $n$  回作用させても  $C$  の外へ逃げない点の割合は  $n$  が大きいとき  $\exp(-\kappa_l n)$  に比例して小さくなる。ここで  $\kappa_l$  は逃散率である。逃げない点について求めた拡大率スペクトルを  $\tilde{\psi}_l(\Lambda)$  とすると次のようにして求めるスペクトルが得られる。

$$P_l(\Lambda; n) \propto e^{-\kappa_l n} e^{-n\tilde{\psi}_l(\Lambda)} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\psi_l(\Lambda) = \kappa_l + \tilde{\psi}_l(\Lambda)$$

$\psi(\Lambda)$  の具体的な計算法は、各々の不変集合について basin そしてそれらの境界がわかっているときは、まずすべての  $l$  について  $P_l$  を求めてから  $\psi_l$  を経由して  $\psi$  に至る。basin などの

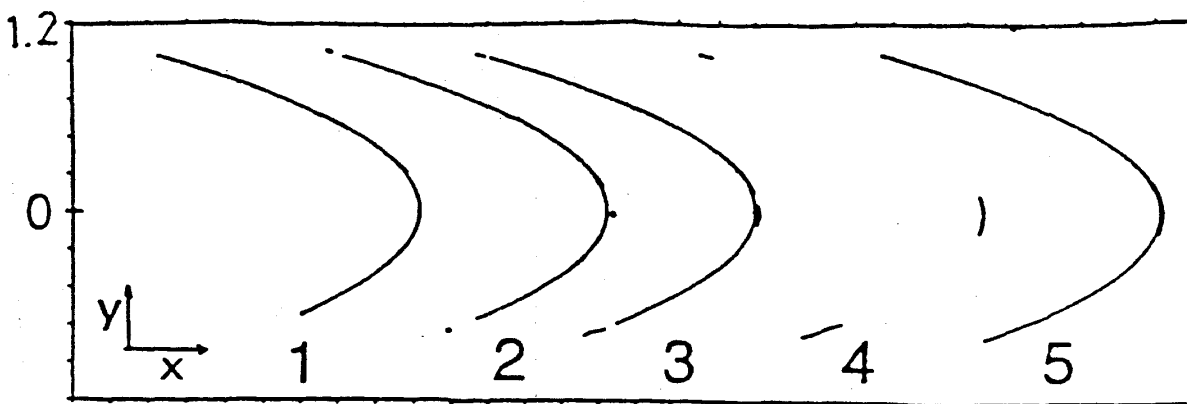
詳しい情報がわからない場合、あるいは近似として、位相空間全体に（全ての basin に跨って）初期点をとってその時間発展から  $P$  を求める。これより  $\psi$  を得る。

本講演ではロジスティック写像の周期3の窓周辺での  $\psi(\Lambda)$  を上の2つの方法で求めて比較し、後者が前者の良い近似となっていることを示した。そして後者の方法を用いてエノン系とローレンツ系の、ある大局的分岐における  $\psi(\Lambda)$  の概形の変化をみていった。

ロジスティック写像、ローレンツ系の結果については最後に掲げる論文にその詳細を報告してあるので、ここではエノン系についての結果を示す。2次元のエノン写像  $(x_{n+1}, y_{n+1}) = f(x_n, y_n) = (1 - ax_n^2 + y_n, bx_n)$  の2つの制御変数のうち  $b$  は  $b = -0.015$  に固定し  $a$  を  $1.7 \leq a \leq 1.77$  の間で変化させる。図1にアトラクターの形、図2に  $\psi(\Lambda)$  の図を示した。両図の中の1から5までの数はそれぞれ対応し1~5がそれぞれ  $a = 1.7, 1.73, 1.7458, 1.75, 1.77$  を表す。図2の曲線のがたつきは  $n$  が大きくなればなめらかになるものと思われる。図2-1と図2-2の顕著な違いは図2-2で  $\Lambda < 0$  の部分に現れた鋭い谷間である。これは負のリヤプノフ数を持つ安定周期点が発生し、それがカオス的なアトラクターと共存していることを表している。この周期点がファイゲンバウムのシナリオに従ってカオスに至り図2-3に示すように2つのカオス的なアトラクターが共存することになる。やがて片方のアトラクターがクライシスによって崩壊しリペラーとなる。このリペラーの逃散率とリヤプノフ数は図2-4の右側の極小値とそれを与える  $\Lambda$  の値でよく近似される。その後このリペラーは共存するアトラクターと融合して1つの大きなアトラクターができる。そのときの  $\psi(\Lambda)$  は図2-5で与えられる。

本講演の内容をまとめると、拡張した拡大率スペクトル  $\psi(\Lambda)$  の概形から共存する不変集合の種類（アトラクター、リペラー、安定周期点など）及びその特性量（リヤプノフ数、逃散率など）の情報が得られる。そして系の制御変数の変化に伴う  $\psi(\Lambda)$  の概形の変化から大局的分岐のシナリオが読み取れる。詳細は次の論文を参照のこと。

T. Yoshida and S. Miyazaki, Global Bifurcations and Fluctuation Spectra of Local Expansion Rates in Nonlinear Dynamical Systems *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 99(1990)



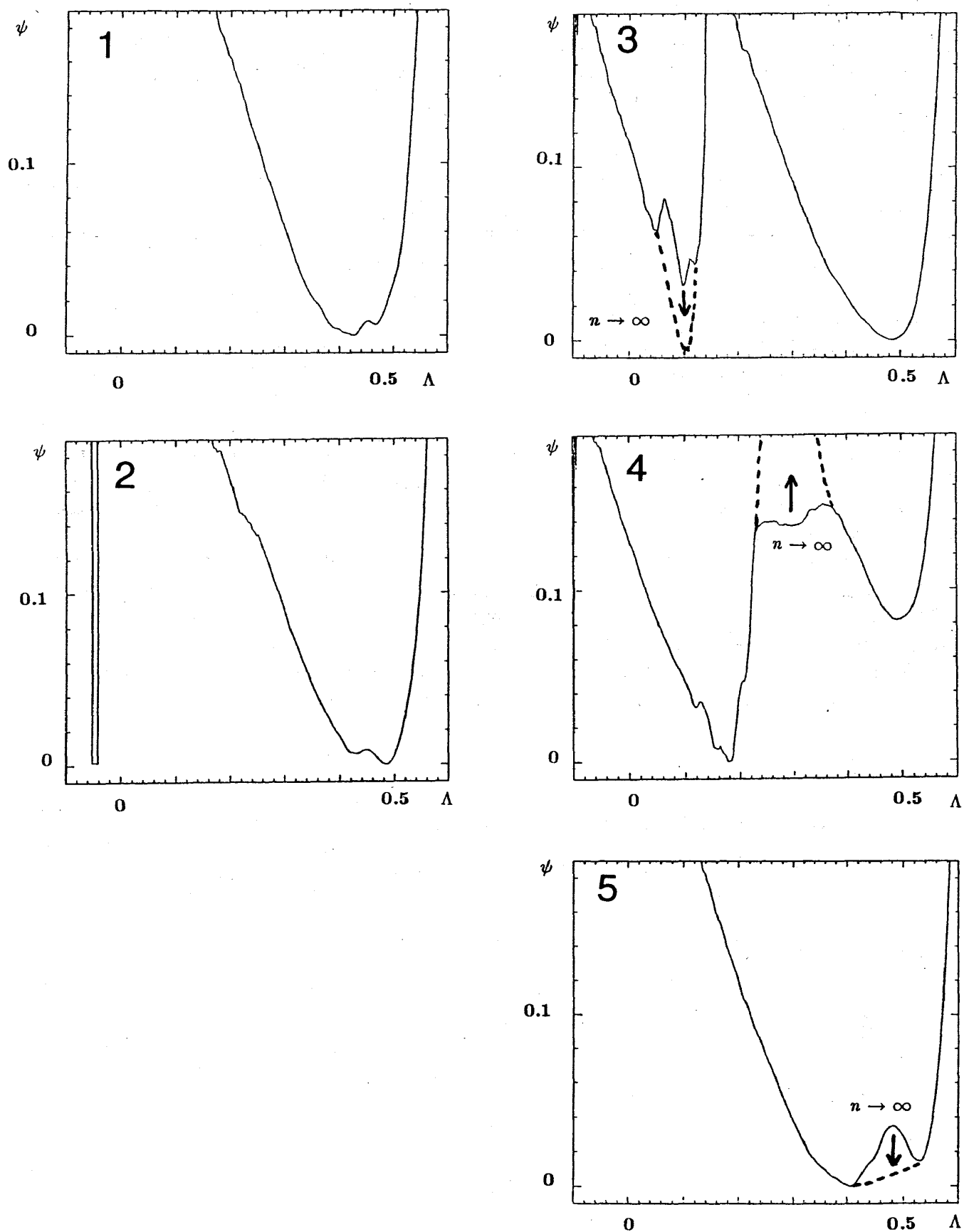


図 2