

Null transversal をもたない余次元1葉層について.

京大 教養 今西英器

$\mathcal{F}$ を多様体 M 上の t -orientable な C^r 級の余次元1葉層 ($r \geq 2$) とする. $\mathcal{F}$ に transverse な閉曲線 C がホモトープ0 のとき, C を null transversal という. $\mathcal{F}$ は次の場合には *null transversal* をもたない.

- (1) $\mathcal{F}$ が transverse に C^∞ 級るとき. (Haefliger)
- (2) $\mathcal{F}$ が Lie 群の局所自由な余次元1作用の軌道で定義されているとき. (Roussarie, Plante [5] 参照)
- (3) $\mathcal{F}$ がホロノミーをもたないとき.

一般には, $\mathcal{F}$ が C^∞ 級で M がコンパクトであって $\mathcal{F}$ が例外葉をもつことがある (Hector [1]). しかし $\pi_1(M)$ に制限を加えると, $\mathcal{F}$ が *null transversal* をもたなければ, その構造は非常に簡単なものとなる.

定義. 連結な多様体 N 上の余次元1葉層 $\mathcal{F}$ に対し, 多様体 N' と N' 上の零点をもたない閉1形式 ω および,

N から N' への同相写像 h が存在して、 h が π の葉を ω の積分多様体にうつすとき、 π は 位相的に閉 1 形式で定義される という。

このとき $\text{Per}(\omega)$ で ω の周期のなす $\mathbb{Z}$ -加群をあらわし、その階数を π の階数 という。また、 C を π に transverse な閉曲線とし、 $\int_{h(C)} \omega = 1$ となるように ω を正規化したときの $\text{Per}(\omega)$ を $\text{Per}(\pi) = \text{Per}(\pi)_C$ であらわす。

さらに $\omega(X) \equiv 1$ となる N' 上のベクトル場 X で完備なものが存在すれば、 ω は 完備 であるという。(このとき、 N 上には π の葉を葉にうつすような位相的な flow が X と h により定義され、 π のすべての葉は同相となる。)

また、 N' 上の任意の曲線 $l(t), 0 \leq t \leq 1$, にたいし、 $\int_l \omega \in \text{Per}(\omega)$ なら $l(0)$ と $l(1)$ が ω の同じ連結積分多様体上にあるとき、 ω は 擬完備 であるという。 ω が完備なら擬完備である。 ω が擬完備で階数が 2 以上なら、 π のすべての葉は N で稠密である。また ω の階数が 1 以下なら π のすべての葉は N の開部分多様体である。

定理 1 (土屋 [7]) M はコンパクト、 π は C^∞ 級とする。 $\pi_1(M)$ が多項式の growth をもつは、 π の proper な葉 $L_1, L_2, \dots, L_k$ が存在して、 $M - \bigcup_{i=1}^k L_i$ の各連結成分上で π は完備な閉 1 形式で位相的に定義される。

ここでは上の定理で $\pi_1(M)$ の条件を強くすることにより、 M のコンパクト性をとりのぞき、 $\mathcal{F}$ に関する条件も弱められることを示す。

定理 2 $\pi_1(M)$ は有限生成アーベル群、 $\mathcal{F}$ は null transversal をもたないとする。 $\mathcal{F}$ のすべての閉葉の和を F とすると、 $M-F$ の各連結成分上で $\mathcal{F}$ は擬完備な開 1 形式により位相的に定義される。また各連結成分上で $\mathcal{F}$ の階数は M の 1 次元 Betti 数 b_1 以下である。さらに、 C を $\mathcal{F}$ に transverse な閉曲線とし、 $C \cap F \neq \emptyset$ なら $S(C) = \{x \in M \mid L_x \cap C \neq \emptyset, L_x \text{ は } x \text{ を通る葉}\}$ の境界を通る $\mathcal{F}$ に transverse な閉曲線は存在しない。

Remarks (i) 閉葉とは M の閉部分集合であるような葉をいう。よって F は閉集合となる。(ii) $M = F$ なら M から $\mathbb{R}$ または S^1 への位相的な submersion f が存在して $f^{-1}(*)$ の連結成分が $\mathcal{F}$ の葉となっている。

系 3 定理 2 の条件と記号のもとで、

- (i) $F = \emptyset$ なら $\mathcal{F}$ はホロノミーをもたない。
- (ii) F の葉 L の片側ホロノミー群は、階数が b_1 以下のアーベル群である。特に、 $F \supset L' \neq L$ で $L' \supset L$ なら L の片側のホロノミー群は $\mathbb{Z}$ と同型である。
- (iii) $\mathcal{F}$ が C^∞ 級とすると、 $S(C) - F$ の連結成分は有限個 (

k 個とする) であるが、各成分への $\mathcal{F}$ の制限を $\mathcal{F}_i$ とすると、
 $\text{Per}(\mathcal{F}_1) = \dots = \text{Per}(\mathcal{F}_k)$ とできる。

(iv) $\mathcal{F}$ がホロノミーをもたなければ、 F の葉は M を 2 つの連結成分に分ける。とくに $F \cap S(C) = \emptyset$ であるが、さらに $M = F \cup S(C)$ となる。

応用として、 $\mathbb{R}^{n-1}$ の n 次元多様体への局所自由な作用の線形化の問題を考える。 $\psi: \mathbb{R}^{n-1} \times M \rightarrow M$ を n 次元多様体 M への C^r 級の局所自由な (すなわち、すべての軌道が $(n-1)$ 次元である) 作用とする。 ψ が C^s 級の線形作用 であるとは、 M から $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^k$ ($0 \leq k \leq n$) への C^s 級の同相写像 f と、 $(n, n-1)$ 行列 A が存在して、 $\forall x \in M, \forall y \in \mathbb{R}^{n-1}$ に対して

$$f \circ \psi(y, x) = f(x) + A \cdot y \pmod{\mathbb{Z}^k}$$

となることをいう。

仮定 (i) M は向きづけ可能で $\pi_1(M)$ は有限生成アーベル群
 (ii) ψ は M の閉集合であるような軌道をもたない。(iii) $3 \leq r \leq \infty$

この仮定のもとで、 ψ の軌道の集合で定義される M 上の葉層を $\mathcal{F}_\psi$ とすると、系 3(ii) より $\mathcal{F}_\psi$ は位相的に閉 1 形式で定義され、 $\text{Per}(\mathcal{F}_\psi)$ が定義される。

定理 4 $\mathbb{R}$ の測度 0 の部分集合 D が存在して、上の仮定のもとで、 $\text{Per}(\mathcal{F}_\psi) \not\subset D$ なら ψ は C^{r-3} 級の線形作用

である。

Remark 上の D は $\mathbb{Q}$ を含む。 $D \ni x$ となる x は “有理数で近似しにくい” 無理数である (正確には Herman [2] と Tischer-Tischer [6] を参照のこと)。 仮定を満たす ψ の集合に適当に位相を入れると $\text{Per}(\mathcal{A}_\psi)$ は ψ に関して連結となり、上の定理は “殆んどすべての ψ は線形作用である” と標語的に言える。 また $\text{Per}(\mathcal{A}_\psi) \subset D$ なら線形化できない ψ は存在する。

定理 2, 系 3, 定理 4 の証明は [3], [4] にあるので、ここでは省略する。

なおこれらの結果は、 $\pi(M)$ が非可換でも、交換子群 $[\pi(M), \pi(M)]$ が有限群ならそのままなりたつ。

文 献

- [1] G. Hector ; Quelques exemples de feuilletages ; espèces rares,
Ann. Inst. Fourier 26.1 (1976) 239-264.
- [2] M.R. Herman ; Conjugaison C^∞ des difféomorphismes du cercle
pour presque tout nombres de rotation ; C.R. Acad. Sci. Paris
t 283 (1976) 579-582.
- [3] H. Imanishi ; Structure of codimension one foliations without
holonomy on manifolds with abelian fundamental group.
to appear in J. of Math. of Kyoto Univ.
- [4] ———— , 余次元1葉層の Denjoy-Siegel 理論,
「数学」に投稿中.
- [5] J.F. Plante ; Asymptotic properties of foliations
Comm. Math. Helv. 47 (1972), 449-456.
- [6] D. Tischler - R. Tischler ; Topological conjugacy of locally free
 $\mathbb{R}^{n-1}$ actions on n -manifolds. Ann. Inst. Fourier 24.4 (1974) 215-217
- [7] N. Tsuchiya ; Growth and depth of leaves, preprint