

Rings of automorphic forms which are
not Cohen-Macaulay

露 峰 茂 明 (Shiyeaki Tsuyumune)

automorphic forms の環 (特に, Hilbert, Siegel modular forms の環) が Cohen-Macaulay か? というのは Eichler [1], [2] によ, て問題にされた。Freitag [3] は 3次元以上の時の Hilbert modular form の環 において はじめて否定的な解答を与えた。我々は [8], [9] においてこの問題を扱ったが, Siegel modular forms の場合のみ に言及すれば, 以下の結果を得た。

Γ を $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ の congruence subgroup としたとき, $A(\Gamma)$ は Γ についての Siegel modular forms の環を表す。
 $\Gamma_n = Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ とし, また $\Gamma_n(l)$ は level l の principal congruence subgroup $\{M \in \Gamma_n \mid M \equiv I_{2n} \pmod{l}\}$ を表すことにする。

- (i) $A(\Gamma_n(l))$ は $l \geq 6$ のとき Cohen-Macaulay でない,
- (ii) Γ が $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ の neat な congruence subgroup で

あるとき、 $A(\Gamma)$ は Cohen-Macaulay でない、ただし $n \geq 3$,

(iii) $A(\Gamma_n)$ ($n \geq 4$) は Cohen-Macaulay でない。

Principal case, 即ち $A(\Gamma_n)$ に限れば, $A(\Gamma_1)$, $A(\Gamma_2)$ は Cohen-Macaulay であることが知られているので (Igusa [5]), 残っているのは $A(\Gamma_3)$ のみである。ここでは、 $A(\Gamma_3)$ が Cohen-Macaulay でないことを示す。詳しくは [11] を参照。

一方, $A(\Gamma_n)$ ($n \geq 3$) は U.F.D. であることが知られており (cf. Tsuyumine [10]), $A(\Gamma_n)$ ($n \geq 3$) は U.F.D. だが Cohen-Macaulay でない環の例を与えている。

1. H_n を Siegel space $\{Z \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t Z = Z, \operatorname{Im} Z > 0\}$ とし, Γ を $\Gamma_n = Sp_{2n}(\mathbb{Z})$ の congruence subgroup とする。 Γ は

$$Z \longmapsto MZ = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$$

により H_n に作用する。正則関数 f は

$$f(MZ) = |CZ+D|^k f(Z), \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$$

を満たし, さらに cusp でも正則であるならば (Siegel) modular form of weight k と呼ばれる ($n > 1$ の時は, はじめの条件から cusp でも正則であることが導かれる)。 f が cusp で消えるならば cusp form といわれる。 $A(\Gamma)_k$ (resp. $S(\Gamma)_k$) を modular forms of weight k (resp. cusp forms of weight k) の成す vector space を表す。この時,

$A(\Gamma) = \bigoplus_{k \geq 0} A(\Gamma)_k$ は graded ring になり $S(\Gamma)$ はその graded ideal となる。

$X = H_n / \Gamma$ とし, X^* をその自然 compact 化とする。

X^* は normal algebraic variety となり $\text{Proj}(A(\Gamma))$ に同型である。 $\mathcal{L}(k)$ を modular forms of weight k に対応する X^* 上の coherent sheaf とする,

$$H^0(X^*, \mathcal{L}(k)) = A(\Gamma)_k$$

である。 $Z \in H_n$ の成分を $Z = (z_{ij})$ とおくと,

differential $\omega = dz_{11} \wedge dz_{12} \wedge \dots \wedge dz_{nn}$ は

$$M \cdot \omega = |CZ + D|^{-n-1} \omega, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma$$

を満たす。

ここで X^* の smooth locus $X^\circ (\subset X \subset X^*)$ について,

$$(i) \quad \text{codim}(X^* - X^\circ) \leq 2,$$

(ii) X° は (Γ の作用の) fixed pt set in H_n の自然な射影 $H_n \rightarrow X$ による像の補集合である,

が成立するとする。 $f \in A(\Gamma)_{n+1}$ に対し $f\omega$ は Γ -不変な differential, 即ち X° 上の differential を定義することより,

$$\mathcal{L}(n+1)|_{X^\circ} \simeq K_{X^\circ}$$

が分かる, ここで K_{X° は X° の canonical invertible sheaf である。 Grauert-Riemenschneider [4] より X^* の dualizing sheaf ω_{X^*} は

$$\omega_{X^*} \simeq \mathcal{O}_*(K_{X^0})$$

で与えられる, ここで $\mathcal{O}$ は自然な写像 $\mathcal{O}: X^0 \hookrightarrow X^*$ である。また dualizing sheaf ω は, X^* 上の coherent sheaf $\mathcal{F}$ について, functorial な同型

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_{X^*}) \simeq H^n(X^*, \mathcal{F})^\vee$$

を与えるもので, complete variety 上には必ず存在する。
よ, ω

$$\omega_{X^*} \simeq \mathcal{O}_*(\mathcal{L}(n+1)|_{X^0})$$

であるが, 正則関数が codimension 2 以上の subvariety を超えて拡張されること及び Koecher's principle より $\mathcal{O}_*(\mathcal{L}(n+1)|_{X^0}) = \mathcal{L}(n+1)$ である。よ, ω

$$\omega_{X^*} \simeq \mathcal{L}(n+1).$$

ここで $X_n = H_n/\Gamma_n$ とすると, $n \geq 3$ ならば X_n は上の条件を満たしている。特に

$$\omega_{X_3^*} \simeq \mathcal{L}(4)$$

である。

我々の目的は $A(\Gamma_3)$ が Cohen-Macaulay でないことを示すことである。今 $A(\Gamma_3)$ が Cohen-Macaulay であるとする, $X_3^* = \mathrm{Proj}(A(\Gamma_3))$ は Cohen-Macaulay scheme となり, その上で Serre duality が成立する, 特に

$$H^0(X_3^*, \mathcal{L}(4)) \simeq H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*})^\vee$$

となるはずである。Siegel modular form of weight 4 は定数倍を除いてただひとつであることが知られていて、即ち $\dim H^0(X_3^*, \mathcal{L}(4)) = 1$ である。これより、もし $\dim H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) \neq 1$ が示されれば、目的は達成される。

Our aim: To show $\dim H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) = 0$.

2. Γ は上述のように congruence subgroup とする。 $M_{n,n}(\mathbb{Z})$ を加法により群とみなすことにし、 $\Gamma \times M_{n,n}(\mathbb{Z})$ を群の直積とする。 $\Gamma \times M_{n,n}(\mathbb{Z})$ は 積空間 $H_n \times M_{n,n}(\mathbb{C})$ に

$$(Z, \zeta) \longmapsto (M, u) \cdot (Z, \zeta)$$

$$= (MZ, {}^t((Z+I)^{-1}(\zeta + (Z, I_n)u)), M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix})$$

により作用する。この作用による $H_n \times M_{n,n}(\mathbb{C})$ の商空間を W' とすると W' は normal algebraic variety であり、さらに自然に得られる射影

$$W' \longrightarrow X = H_n / \Gamma$$

は、 $-I_n \in \Gamma$ のときは generic fibre が Kummer variety の、 $-I_n \notin \Gamma$ のときは、 generic fibre が abelian variety の fibre space となる。 $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^n) \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, ${}^t\zeta^0 = (\zeta_1^0, \dots, \zeta_n^0)$ とし、

$$\omega_0 = (dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^n (d\zeta_1^i \wedge \dots \wedge d\zeta_n^i) \right)$$

とおく。この時

$$(M \cdot u) \omega_0 = |z+p|^{-m-n-1} \omega_0$$

が成立する。よ、 τ が modular form of weight $m+n+1$ であれば $\tau \omega_0$ は $\Gamma \times M_{n,n}(\mathbb{Z})$ -不変であり $n \geq 3$ であれば W' の smooth locus 上の differential form となる。 W を W' のある compact 化とし、 $W-W'$ は W の smooth point を含んでいるものとする。 $\tau \omega_0$ が W の smooth locus にまで holomorphic に拡張されるならば、 τ は cusp form でなければならぬ (cusp form ならばいつも拡張されることは限らない)。Serre duality を用、 τ を得る。

補題 1. $\phi: W \rightarrow X^*$ を projective varieties の morphism で、 $W' \rightarrow X$ の拡張になっているものとする。さらに W は Cohen-Macaulay variety であるとし、 $W - (W \text{ の smooth locus })$ は codimension ≥ 2 以上とする。この時、

$$\dim H^{n(n+1)/2 + mn}(W, \mathcal{O}_W) \leq \dim S(\Gamma')_{m+n+1}$$

注意; Γ' を Γ を normal subgroup として持つ, congruence subgroup とする。 Γ'/Γ は W に作用するが、 V をその商とする。このとき

$$H^{n(n+1)/2 + mn}(W, \mathcal{O}_W)^{\Gamma'/\Gamma} \cong H^{n(n+1)/2 + mn}(V, \mathcal{O}_V)$$

$$\hookrightarrow S(\Gamma')_{m+n+1} = S(\Gamma)^{\Gamma'/\Gamma}_{m+n+1}$$

3. $\Gamma_n(l)$ は level l の principal congruence subgroup $\{M \in \Gamma_n \mid M \equiv I_n \pmod{l}\}$ を表す。 $X_3(l) = H_3/\Gamma_3(l)$ ($l > 1$) とし, $X_3^*(l)$ は その 自然 compact 化 とする。 $\bar{X}_3$, $\bar{X}_3(l)$ は、各々 X_3 , $X_3(l)$ の Igusa's compactification ([6]) とする。 $l \geq 3$ の時は, $\bar{X}_3(l)$ は $X_3^*(l)$ の

$$D^*(l) = X_3^*(l) - X_3(l)$$

に沿った monoidal transform として与えられており, $\bar{X}_3$ は $\bar{X}_3(l)$ の $\Gamma_3/\Gamma_3(l)$ による商空間である。 $D^* = X_3^* - X_3$, $D = \bar{X}_3 - X_3$, $D(l) = \bar{X}_3(l) - X_3(l)$ とおく。 $D(l)$ は normal crossings のみの特異点を持つ divisor である。

$D_0(l)$ を $D(l)$ の 1 つの component, $\tilde{D}$ を $D_0(l)$ の normalization の, $D_0(l)$ の (Γ_3 の中の) stabilizer group による商とする。自然な写像 $\psi: \tilde{D} \rightarrow D$ は D の normalization を与える。今, π を $\bar{X}_3$ から X_3^* への morphism とする。 $X_3^* = X_3 \cup X_2^* = X_3 \cup X_2 \cup X_1 \cup X_0$, $X_0 = \{\text{a point}\}$ である。 ψ は $\pi^{-1}(X_2)$ 上では同型で, $\tilde{D}|_{\pi^{-1}(X_2)}$ 及び $D|_{\pi^{-1}(X_2)}$ は §2 において, $n=2$, $m=1$, $\Gamma = \Gamma_2$ とおいた W' に等しい。 $\tilde{\pi}$ を $\psi: \tilde{D} \rightarrow D$ と $\pi: D \rightarrow D^*$ の合成とする。 $D^* = X_2^*$ に注意。

補題 2. $\dim H^i(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) \leq \dim H^i(D^*, R^2 \tilde{\pi}_* \mathcal{O}_{\tilde{D}}).$

証明) $R^2\pi_*\mathcal{O}_D \simeq R^2\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{D}}$ は X_1^* を除いて同型であることを
 とを仮して、

$$H^3(D^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_D) \simeq H^3(D^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{D}})$$

が導かれるので、 $\dim H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) \leq \dim H^3(D^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_D)$ を
 示せばよい。 $R^2\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}_3}$ と (0 で拡張した) $R^2\pi_*\mathcal{O}_D$ は、
 $2 > 0$ のときは少なくとも X_1^* を除いた所では同型である (Tsugumura [], Prop 2)。よって $H^3(D^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_D)$ と $H^3(X_3^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}_3})$
 は同型となる。よって問題は $\dim H^3(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) \leq \dim H^3(X_3^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}_3})$
 を示すことに帰着される。

$\tilde{X}_3$ は 商特異点を持つのみなので、canonical coherent sheaf
 $K_{\tilde{X}_3}$ (Grunt-Riemenschneider [4] の意味での) は dualizing
 sheaf となる。よって

$$H^0(\tilde{X}_3, K_{\tilde{X}_3}) \simeq H^0(\tilde{X}_3, K_{\tilde{X}_3}) \simeq H^6(\tilde{X}_3, \mathcal{O}_{\tilde{X}_3})^\vee,$$

ここで $\tilde{X}_3$ は X_3 の non-singular model を表す。 $\tilde{X}_3$ は
 unirational であるから、上の cohomology group はすべて消え
 る。よって $H^3(X_3^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}_3})$ から $H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*})$ へのある
 homomorphism d が存在して $H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*})/d(H^3(X_3^*, R^2\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}_3}))$
 が $H^6(\tilde{X}_3, \mathcal{O}_{\tilde{X}_3}) (= \{0\})$ に同型なることを示せばよい。こ
 こで Leray の spectral sequence

$$E_2^{p,q} = H^p(X_3^*, R^q\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}_3}) \Rightarrow H^{p+q}(\tilde{X}_3, \mathcal{O}_{\tilde{X}_3})$$

を考へる。 π は proper morphism で、 $\dim \pi^{-1}(x) = 2$, $x \in X_2$,

また $\dim \pi^{-1}(x) = 3$, $x \in X_1^*$ であるから, $p+q = 5$ なる (p, q) に対しては $(3, 2), (0, 5)$ の場合以外は $H^p(X_3^*, R^q \pi_* \mathcal{O}_{X_3})$ は消えてしまう。Leray spectral sequence の初等的な考察により, homomorphism α は構成される。 $\square$ p. d.

補題 3. $\dim H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) \leq \dim H^1(D^*, R^3 \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{D}})$.

証明) Leray spectral sequence $E_2^{p,q} = H^p(D^*, R^q \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{D}}) \Rightarrow H^{p+q}(\tilde{D}, \mathcal{O}_{\tilde{D}})$ を考える。上の証明と同様にして,

$\dim H^3(D^*, R^2 \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{D}}) \leq \dim H^5(\tilde{D}, \mathcal{O}_{\tilde{D}}) + \dim H^1(D^*, R^3 \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{D}})$ を得る。補題 1 より $\dim H^5(\tilde{D}, \mathcal{O}_{\tilde{D}}) = 0$ を得る, なるべからずは $S(\mathbb{P}^2)_4 = \{0\}$ である。 $\square$ p. d.

3. 補題 3 より 計算は $H^1(X_1^*, R^3 \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{D}}) = \{0\}$ を示すことに帰着された。所が $R^3 \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{D}}$ の support は X_1^* であり我々は $H^1(X_1^*, R^3 \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{D}}) = \{0\}$ を示せば良いことになる。cohomology の計算法は, 補題 2, 3 のものと同様に行えばこの結果が得られる。ただ morphism π の X_1^* における fibre の構造が(上の場合のようには)簡単でないのでは, かいがあるが, 基本的には全く同じ計算をくり返すことによつて次を得る。ここでは補題 1 及び $S(\mathbb{P}^2)_4 = \{0\}$ なる事実も用いる。

補題 4 $\dim H^1(D^*, R^3 \hat{\otimes}^* \mathcal{O}_D) = 0.$

これより次を得る。

命題 1 $\dim H^6(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) = 0.$

§1 に述べたことにより、次を得る。

定理 X_3^* は Cohen-Macaulay variety でない、特に graded ring $A(\mathbb{P}_3)$ は Cohen-Macaulay でない。

4. $A(\mathbb{P}_3)$ の生成元、次元公式、そして(ある程度の)その構造は Tsuyumine [7] に決定されている。次元公式より X_3^* の arithmetic genus $\sum_{i=0}^6 (-1)^i \dim H^i(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*})$ は 2 であることが分かる。よ、このある偶数 $i > 0$ に対し $\dim H^i(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*})$ キ 0 であるが命題 1 よりそれは 6 ではない。

一方、同じ論文により $A(\mathbb{P}_3)$ が 5 変数多項式環上の free-module として実現されている。以上より

$$\dim H^4(X_3^*, \mathcal{O}_{X_3^*}) > 0$$

$$\text{depth } A(\mathbb{P}_3) = 5$$

が分かる。一般の $A(\mathbb{P}_n)$ ($n \geq 4$) については depth も

$\text{depth } \Delta(\Gamma_n) < \frac{1}{2}n(n+1)$ となること以外は何も与えられ、ない。

参考文献

1. M. Eichler; Projective varieties and modular forms, Lecture Notes in Math. 210, Springer, 1970.
2. ———; On the graded ring of modular forms, Acta Arith., 18 (1971), 87-92.
3. E. Freitag; Lokale und globale Invarianten der Hilbertschen Modulgruppen, Invent. Math., 17 (1972), 106-134.
4. H. Grauert and O. Riemenschneider; Verschwindungssätze für analytische Kohomologiegruppen auf komplexen Räumen, Invent. Math., 11 (1970), 263-292.
5. J. Igusa; On the Siegel modular forms of genus two (II), Amer. J. Math. 86 (1964) 392-412.
6. ———; A desingularization problem in the theory of Siegel modular functions, Math. Ann. 168 (1967), 228-260.
7. S. Tsuyumine; On the Siegel modular forms of degree three, Amer. J. Math., to appear.

- 8 ———; Rings of modular forms (On Eichler's Problem), Nagoya Math. J. 99 (1985), 31-44
9. ———; Rings of automorphic forms which are not Cohen-Macaulay, I, J. Math. Soc. Japan 38 (1986) 147-162.
- 10 ———; Factorial property of a ring of automorphic forms, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.
- 11 ———; Rings of automorphic forms which are not Cohen-Macaulay, II. Preprint