

変数変換を用いた特殊関数の新しい計算法

慶 大 工 高橋 秀俊
筑波大電子情報 森 正武

§1. はじめに

積分指数関数をはじめとして、特殊関数の多くは定積分で定義される。われわれは、これらの定義式の積分変数に適当な変数変換を行うことにより、収束する級数が導かれることを [2] で示した。しかし、この方法は、場合によっては独立変数が変わるごとに展開係数も計算しなおす必要があるという欠点をもつ。ここでは、積分変数ではなく、定義される関数の独立変数自体に変換を行うことにより、収束級数を導く方法を提案する。この方法により、広範囲の複素変数に対して具体的な計算が可能な、各種の特殊関数の単一の表現を導くことができる。われわれは以前、Taylor 級数の収束の加速について発表をしたが [1]、そこでは特異点という単一の "点" に注目して変換を行った。それに対し、分岐点を経る cut あるいは積分路という "線" に注目して変換を行うところに、ここでの考え方の中点がある。

§ 2. 積分指数関数

積分指数関数は

$$E_1(z) = e^{-z} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{z+t} dt \quad (2.1)$$

によって定義される。後の都合を考えて

$$F(z) = e^z E_1(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{z+t} dt \quad (2.2)$$

と置いて、この $F(z)$ を考察する。

原点と無限遠点とは $F(z)$ の分岐点であり、これらを経る
 頁の実軸から成る cut を除けば、全 z -平面で $F(z)$ は 1 価正
 則である。したがって、もちろん右半平面 $\operatorname{Re} z > 0$ には $F(z)$
 の特異点は存在しない。いま、この右半平面を単位円の内部
 に写像する変換が見つかったとすると、この変換によって
 $F(z)$ の分岐点である原点および無限遠点はこの単位円の周上
 に写像され、内部には特異点は存在しない。したがって、こ
 の変換後の関数は、原点を中心として単位円の内部で収束す
 る級数に展開することができるはずである。

この目的を実現させる変換は、 γ を適当に選んだ正の定数
 として

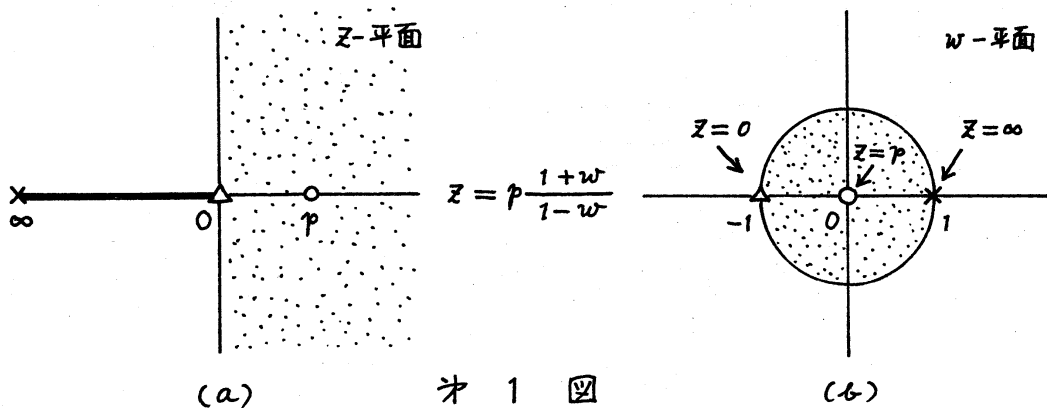
$$z = p \frac{1+w}{1-w}, \quad w = \frac{z-p}{z+p} \quad (2.3)$$

によって与えられる (※1図)。この変換を $F(z)$ にほどこすと

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{p \frac{1+w}{1-w} + t} dt \\ &= (1-w) \int_0^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{t-p}{t+p} w} \frac{e^{-t}}{t+p} dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

となる。上に述べたように、被積分関数を w のべき級数に展開して項別積分すれば、 $|w| < 1$ 、すなわち $\operatorname{Re} z > 0$ において収束する、次のような級数が導かれる。

$$\begin{aligned} F(z) &= (1-w) \int_0^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t-p}{t+p} \right)^k w^k \right\} \frac{e^{-t}}{t+p} dt \\ &= (1-w) \sum_{k=0}^{\infty} J_k w^k \end{aligned} \quad (2.5)$$



$$= \frac{2p}{z+p} \sum_{k=0}^{\infty} J_k \left(\frac{z-p}{z+p} \right)^k \quad (2.6)$$

$$J_k = \int_0^{\infty} \frac{(t-p)^k}{(t+p)^{k+1}} e^{-t} dt \quad (2.7)$$

J_k の値は, p をあらかじめ適当な値に固定した上で二重指数関数型公式 [3] によって計算し, 表にしておけばよい。

実際に $F(z)$ の値を求めるには, まず与えられた z に対して $w = (z-p)/(z+p)$ を計算し, しかる後 w のべき級数 (2.5) によって $F(z)$ を計算する。 z が虚軸に近い値, あるいは絶対値が大きな値でない限り, このべき級数の収束は速い。表 1 に, $p=1$, $z=2$ のときの $J_k w^k$, $k=1, 2, \dots, 30$ を示す。

定義の積分 (2.2) の積分変数 t に対して

$$t = \phi(u) = p \frac{1+u}{1-u}, \quad u = \frac{t-p}{t+p} \quad (2.8)$$

なる変換をほどこすと

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{-1}^1 \frac{e^{-\phi(u)}}{1 + \frac{p(1+u)}{z(1-u)}} \phi'(u) du \\ &= \frac{1}{z+p} \int_{-1}^1 \left\{ 1 - \frac{2p}{z+p} u - \frac{2p}{z+p} \left(\frac{z-p}{z+p} \right) u^2 - \frac{2p}{z+p} \left(\frac{z-p}{z+p} \right)^2 u^3 - \dots \right\} \\ &\quad \times e^{-\phi(u)} \phi'(u) du \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z+p} \left\{ 1 - (1-w) (\tilde{J}_1 + \tilde{J}_2 w + \tilde{J}_3 w^2 + \dots) \right\} \quad (2.9)$$

$$\tilde{J}_k = \int_0^\infty \left(\frac{t-p}{t+p} \right)^k e^{-t} dt \quad (2.10)$$

が導かれる。ところが，(2.7) の J_k と (2.10) の $\tilde{J}_k$ の間には

$$J_k = \frac{1}{2p} (\tilde{J}_k - \tilde{J}_{k+1}) \quad (2.11)$$

なる関係があるので，(2.9) は結局 (2.6) に帰着される。このように，積分変数の変換 [2] と，本来の独立変数の変換とは密接に関係していることがわかる。

§3. 収束の加速

上で求めた級数は $\operatorname{Re} z > 0$ の範囲の z に対して収束する。そこでさらに，負の実軸に cut の入った全 z -平面を右半平面に写像する変換を中間的にもう 1 段採用すると，前節に述べた変換との合成により，原点と負の実軸を除くすべての複素数 z に対して収束する級数が求められることになる。そしてこの新しい級数は， $\operatorname{Re} z \leq 0$ なる新しい z に対して計算が可能になると同時に， $\operatorname{Re} z > 0$ における同一の z の値に対しては，上で求めた級数よりも当然収束が速いことが期待できる。つまり，収束の加速が実現される。

このような変換は

$$z = p \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right)^2, \quad \zeta = \frac{\sqrt{\frac{z}{p}} - 1}{\sqrt{\frac{z}{p}} + 1} \quad (3.1)$$

で与えられる。この変換によって、全 z -平面 から 負の実軸を
除いた部分が、 ζ -平面の単位円の内部に写像される。

$E_1(z)$ を ζ のべき級数の形に表現するために、前節で既に
求めた w のべき級数を利用することができる。変換 (2.3) お
よび (3.1) から、 w と ζ の間には次の関係があることがわか
る。

$$\frac{1+w}{1-w} = \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right)^2 \quad (3.2)$$

これから

$$w = \frac{2\zeta}{1+\zeta^2} = 2\zeta - 2\zeta^3 + 2\zeta^5 - 2\zeta^7 + \dots \quad (3.3)$$

が導かれ、これを (2.5) の w に代入して ζ のべき級数に展開
しなおせば、次のように $F(z)$ を ζ のべき級数で表現できた
ことになる。

$$F(z) = (1-w) \left(J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} K_k \zeta^k \right) \quad (3.4)$$

級数 (3.3) の右辺は ζ の 1 次のべきから始まっている。し
たがって、

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} b_k s^k \quad (3.5)$$

と置くとき, (3.4) の係数 K_k は次の形に有限の手間で計算ができる [4]。

$$K_k = \sum_{j=1}^k J_j W_{jk} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} W_{1k} = b_k, \quad k=1, 2, \dots \\ W_{jk} = \sum_{l=1}^{k-j+1} b_l W_{j-1, k-l}, \quad j=2, 3, \dots, k; \quad k=2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.7)$$

この手続きの証明は, W_{jk} が $(b_1 s + b_2 s^2 + \dots)^j$ の展開における s^k の係数であることに注意すれば直ちに得られる。

実際の計算では, p を適当な正の値に固定した上で, J_0 および (3.4) の係数 K_k を計算してあらかじめ表にしておく。そして, 与えられた z に対して

$$s = \frac{\sqrt{\frac{z}{p}} - 1}{\sqrt{\frac{z}{p}} + 1} \quad (3.8)$$

を計算し, しかる後らのべき級数 (3.4) によって $F(z)$ を計算すればよい。

表 1 表に $p=1$, $z=2$ のときの $K_k s^k$, $k=1, 2, \dots, 30$ を示す。1 次変換 (2.3) の場合よりも収束は速くなっている。

収束の加速はさらに続けることができる。たとえば, (3.1)

の代わりに

$$z = p \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right)^4, \quad \zeta = \frac{\sqrt[p]{\frac{z}{p}} - 1}{\sqrt[p]{\frac{z}{p}} + 1} \quad (3.9)$$

を採用すれば, (2.3) より

$$\begin{aligned} w &= \frac{(1+\zeta)^4 - (1-\zeta)^4}{(1+\zeta)^4 + (1-\zeta)^4} = \frac{4\zeta(1+\zeta^2)}{1+6\zeta^2+\zeta^4} \\ &= 4\zeta - 20\zeta^3 + 116\zeta^5 - 676\zeta^7 + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

が得られ, これを (2.5) の w に代入することにより新しい ζ の級数が導かれる。

この変換により, 2重に重なったその Riemann 面が ζ -平面の単位円の内部に写像される。この変換を使えば, 同一の z の値に対し収束のより速い級数が得られることが期待されるのはもちろんであるが, それよりも重要なことは, 主平面から外れた Riemann 面上の z の値に対する $E_1(z)$ の値, とくに負の実数の z に対する $E_1(z)$ の値を計算することができる点である。

変換の合成を (3.6) を利用して数值的に行うとき, 得られる新しい級数の係数に折落ちを生ずることがある。そのような危険がある場合には, 適当な数式処理システムを利用するをどして, 直接目的の級数を求めることも試みるべきであろう。

う。

§ 4. 誤差評価

級数 (2.5) を n 次の項で打ち切ったときの誤差は、被積分関数のべき級数展開の剰余項を使って評価することができる。

$$\lambda = \frac{t-p}{t+p} \quad (4.1)$$

と置くと、(2.4) は

$$F(z) = (1-w) \int_0^{\infty} \frac{1}{(t+p)(1-\lambda w)} e^{-t} dt \quad (4.2)$$

となるが、右辺の $1/(1-\lambda w)$ は剰余項と共に次の形に表現できる。

$$g(w) = \frac{1}{1-\lambda w} = 1 + \lambda w + \lambda^2 w^2 + \dots + \lambda^n w^n + \varepsilon_n(w) w^{n+1} \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_n(w) = \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda w} \quad (4.4)$$

これを (4.2) に代入して積分を実行すれば、次のような誤差項を含む表示が得られる。

$$F(z) = (1-w) \{J_0 + J_1 w + J_2 w^2 + \dots + J_n w^n\} + E_n(w) \quad (4.5)$$

$$E_n(w) = (1-w) w^{n+1} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(t+p)(1-\lambda w)} e^{-t} dt \quad (4.6)$$

ここではもちろん $\operatorname{Re} z > 0$ が仮定されている。このとき、
 $|w| < 1$ であり、また (4.1) より $0 \leq t < \infty$ のとき $-1 \leq \lambda < 1$
 となる。したがって、

$$\left| \frac{1}{1-\lambda w} \right| \leq \frac{1}{1-|\lambda w|} \leq \frac{1}{1-|w|} \quad (4.7)$$

が成り立ち、

$$|E_n(w)| \leq \frac{|1-w|}{1-|w|} |w|^{n+1} \int_0^\infty \frac{|t-p|^{n+1}}{(t+p)^{n+2}} e^{-t} dt \quad (4.8)$$

が得られる。とくに z が $z > p$ なる実数で、かつ n が奇数で
 あるとすると、 $0 < w < 1$ かつ $|t-p|^{n+1} = (t-p)^{n+1}$ となるか
 ら

$$E_n(w) \leq w^{n+1} J_{n+1} \quad (4.9)$$

が得られる。すなわち、 n 次の項 ($n = \text{奇数}$) までとって打
 ち切ったときの誤差は、切り捨てた最初の項でおさえられる。

たとえば、 $\gamma = 1$ 、 $z = 2$ のとき、 $n = 9$ 項までとって打
 ち切ったとすると、誤差は表 1 より

$$E_9(w) \leq w^{10} J_{10} = 7.7 \times 10^{-7} \quad (4.10)$$

であることがわかる。

積分指数関数以外の一般の場合の誤差評価を導くためには、

(4.4) の $\varepsilon_n(w)$ の表示に次の Cauchy の積分表示を利用するとよい。

$$\varepsilon_n(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(u)}{(u-w)u^{n+1}} du \quad (4.11)$$

ただし、積分路 C は原点および $u=w$ を内部に含み、 $g(u)$ の特異点は含まないようにとる。

§5. 他の関数への応用

これまで述べてきた方法は、積分指数関数に限らず、定積分で定義されるいろいろな関数に適用することができる。関数が

$$F(z) = \int_a^b f(z;t) \mu(t) dt \quad (5.1)$$

の形で定義されているとしよう。 $\mu(t)$ は、 z を含む部分 $f(z;t)$ から分離されているそれぞれの関数に特有の重みである。積分指数関数の場合には、 $a=0$, $b=\infty$, $f(z;t)=1/(z+t)$, $\mu(t)=e^{-t}$ である。

まずオーになすべきことは、 $F(z)$ の特異点（分岐点）を含まない z -平面の適当な領域を、 w -平面の単位円の内部に写像するような変換

$$z = \psi(w) \quad (5.2)$$

を見出すことである。あるいは、主平面上の z の値に対する展開形を求める場合には、 t が $a \leq t \leq b$ の範囲を動くとき $f(z; t)$ が特異性をもたないような z -平面の適当な領域を、 w -平面の単位円の内部に写像する変換 $z = \psi(w)$ を見出せば十分である。

次に、被積分関数の $f(z; t)$ にこの変換をほどこした上で、これを

$$f(z; t) = f(\psi(w); t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) w^k \quad (5.3)$$

の形に展開し、(5.1) の積分を項別に行う。この操作により、次の展開が導かれる。

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w^k J_k \quad (5.4)$$

$$J_k = \int_a^b a_k(t) \mu(t) dt \quad (5.5)$$

$J_k, k=0, 1, \dots$ はあらかじめ計算して表にしておく。与えられた z に対し $F(z)$ の値を求めるには、 $w = \psi^{-1}(z)$ の値を計算し、その値に対する (5.4) のべき級数を計算すればよい。

例として、誤差関数

$$\operatorname{erf} z = 1 - \frac{2z e^{-z^2}}{\pi} \int_0^{\infty} f(z; t) e^{-t^2} dt \quad (5.6)$$

$$f(z; t) = \frac{1}{z^2 + t^2} \quad (5.7)$$

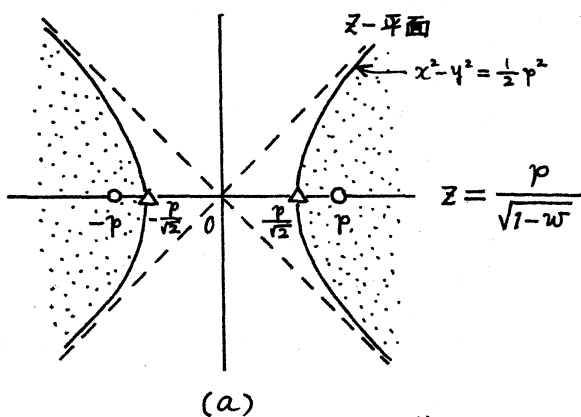
を考えよう。 t が $0 \leq t < \infty$ を動くとき $f(z; t)$ が特異性をもたないためには、 z -平面の虚軸を除外しなければならない。したがって、 z の適用範囲を $\operatorname{Re} z > 0$ に限るとすれば、変換(2.3)を利用することができる。

また、別の変換

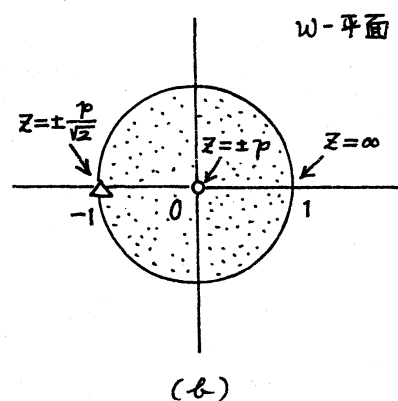
$$z = \frac{p}{\sqrt{1-w}}, \quad w = 1 - \frac{p^2}{z^2} \quad (p \text{ は正の定数}) \quad (5.8)$$

は、 $z = x + iy$ とするとき、 $x^2 - y^2 \geq \frac{1}{2}p^2$ なる双曲線で分けられる z -平面の領域のうち虚軸を含まない領域の方(お2回)を w -平面の単位円の内部に写像する。したがって、この変換により右辺の積分は

$$F(z) = \int_0^\infty f\left(\frac{p}{\sqrt{1-w}}; t\right) e^{-t^2} dt = (1-w) \int_0^\infty \frac{1}{1 - \frac{t^2}{p^2 + t^2} w} e^{-t^2} dt \quad (5.9)$$



お 2 回



となり，これから図 2 図 (a) の斜線の部分の z に対して収束する次のような展開が導かれる。

$$F(z) = \frac{p^2}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} J_k \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right)^k \quad (5.10)$$

$$J_k = \int_0^{\infty} \frac{t^{2k}}{(p^2 + t^2)^{k+1}} e^{-t^2} dt \quad (5.11)$$

変換の関数 $\psi(w)$ が見出されたとすると，次になすべきことは $f(\psi(w); t)$ を w のべき級数に展開することである。これまで述べてきた例はいずれも簡単に展開が求められた。しかしこれらはむしろ例外で，一般にはこの展開のところで何らかの数式処理システムが必要になるであろう。

表 1 $E_1(z)$ における $p=1, z=2$ のときの $J_k w^k$ および $K_k z^k$

k	$J_k w^k$	$K_k z^k$
1	-7.0×10^{-2}	-7.2×10^{-2}
2	1.9×10^{-2}	2.0×10^{-2}
3	-4.4×10^{-3}	-2.7×10^{-3}
4	1.3×10^{-3}	1.9×10^{-4}
5	-3.4×10^{-4}	-2.6×10^{-5}
6	9.8×10^{-5}	4.9×10^{-6}
7	-2.8×10^{-5}	-6.1×10^{-7}
8	8.5×10^{-6}	9.2×10^{-8}
9	-2.5×10^{-6}	-1.5×10^{-8}
10	7.7×10^{-7}	2.2×10^{-9}
15	-2.2×10^{-9}	-2.2×10^{-13}
20	6.8×10^{-12}	2.4×10^{-17}
25	-2.2×10^{-14}	-2.9×10^{-21}
30	7.8×10^{-17}	3.6×10^{-25}

参考文献

- [1] 高橋秀俊・森正武；変数変換による Taylor 級数の収束の加速，数理解析研講究録 172 (1973) p.78-87.
- [2] 森正武；漸近級数の収束級数への変換——特殊関数の計算機向き解析的表示，数理解析研講究録 373 (1979) p.91-113.
- [3] Takahasi, H. and Mori, M.; Double exponential formula for numerical integration, Publ.RIMS, Kyoto Univ. 9 (1974) 721-741.
- [4] Estes, R. and Lancaster, E.; Some generalized power series inversion, SIAM J.Numer.Anal. 9 (1972) 241-247.